МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»

УТВЕРЖДЕНА

Решением научно-технического совета

протокол № 1 от «24» января 2022 г.

Председатель НТС, первый проректор - проректор по научно-исследовательской работе _____ А.Б. Прокофьев

Ученый секретарь НТС

_____ Л.В. Родионов

ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

по научной специальности

1.1.1. Вещественный комплексный и функциональный анализ

Самара 2022

Введение

Настоящая экзаменационная программа соответствует утвержденному паспорту научной специальности «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» - это область математики, посвященная изучению дифференциальных уравнений. В основу программы положены следующие дисциплины: теория функций действительной переменной, теория функций комплексной переменной, функциональный анализ, а также программы соответствующих курсов лекций, читаемых на механико-математических факультетах.

Действительный анализ

Меры измеримых функций, интеграл. Аддитивность функций множеств(меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые продолжения мер. Теорема Фубини.

Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования. Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченной вариацией. Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона-Никодима. Интеграл Стилтьеса.

Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды. $L_{p,}$ их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы L_2 в и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам: стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.

Тригонометрические ряды. Преобразования Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье--Стилтьеса.

Комплексный анализ

Интегральные представления аналитических функций. Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сухоцкого.

Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса.

Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки(однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций многочленами..

Целые и мероморфные функции. Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг – Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

Конформные отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

Аналитическое продолжение. Аналитическое разложение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие Римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля – Шварца. Модулярная функция. Нормальные свойства функций. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара.

Гармонические функции. Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга.

Функциональный анализ

Метрические и топологические пространства. Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах.

Нормированные и топологические линейные пространства.

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана--Банаха. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах C и L_p. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.

Гильбертовы пространства и линейные операторы в них. Изоморфизм сепарабельных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и

спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы.

Гильбертовы пространства и линейные операторы в них. Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы.

Дифференциальное исчисление в линейных пространствах. Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона.

Обобщенные функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста: их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем.

Основная литература

1.Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000.

2.Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Изд-во Наука, 1976.(1989).

3.Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

4.Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т.!. 2. М.: Наука, 1967-1968..

5.Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

6.Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1.2. М.: Наука, 1975(1991).

7Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977(1999).

8.Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1976..

Дополнительная литература

1.Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М.: Факториал. 1998.

2.Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Изд-во Наука, 1991.

3.Зорич В.А. Математический анализ. Т.2. М.: Наука, 1984.

4.Садовничий В.А.Теория операторов. М.: Высшая школа, 1999.