

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

Филиппов Григорий Александрович

ФОРМИРОВАНИЕ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫХ НОМИНАЛЬНЫХ ПРОГРАММ
УПРАВЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА
С КОНЕЧНОЙ ТЯГОЙ НА ОКОЛОКРУГОВЫХ ОРБИТАХ

2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением
летательных аппаратов

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:

Ишков Сергей Алексеевич,
доктор технических наук, профессор

Самара – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ОКОЛОКРУГОВЫХ ОРБИТАХ	11
1.1 Состояние задач оптимизации траекторий относительного движения . . .	12
1.2 Современные и перспективные двигательные установки конечной тяги	14
1.3 Математическая модель движения	18
1.4 Постановка задачи двухкритериальной оптимизации номинальных программ управления относительным движением	26
ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ	28
2 ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ УПРАВЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ С ПАССИВНЫМ УЧАСТКОМ	29
2.1 Оптимальное управление без ограничений на ориентацию вектора тяги	29
2.1.1 Управление вековыми составляющими движения	30
2.1.2 Управления периодическими составляющими движения	31
2.1.3 Оптимальное управление относительным движением без ограничений на ориентацию вектора тяги	32
2.2 Оптимальное управление с трансверсальной ориентацией вектора тяги	34
2.2.1 Управление вековыми составляющими движения	34
2.2.2 Управление периодическими составляющими движения	36

2.2.3	Оптимальное управление относительным движением с трансверсальной ориентацией вектора тяги	38
2.2.4	Численное решение задач оптимального управления	39
	ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ	68
3	ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ УПРАВЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ	
	С ДВУМЯ И ТРЕМЯ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ТЯГИ	70
3.1	Управление с двумя включениями тяги	72
3.1.1	Оптимизация программы с двумя включениями тяги разного знака	74
3.1.2	Оптимизация программы с двумя включениями тяги одинако- вого знака	83
3.2	Управление с тремя включениями тяги	87
3.2.1	Управление с одинаковым знаком тяги	87
3.2.2	Управление со структурой «разгон и два торможения»	93
3.2.3	Управление со структурой «два разгона и торможение»	98
3.3	Сравнение результатов параметрической оптимизации с оптимальны- ми решениями	103
	ВЫВОДЫ ПО ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ	106
4	ЗАДАЧА ПРИВЕДЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ В ТОЧКУ СТОЯНИЯ ГЕОСТАЦИОНАРНОЙ ОРБИТЫ	107
4.1	Сравнение с результатами других авторов	108
4.2	Моделирование оптимальных траекторий на исходной модели	111
	ВЫВОДЫ ПО ЧЕТВЁРТОЙ ГЛАВЕ	122
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	123
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	125

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена двухкритериальной оптимизации программ номинального управления относительным движением космического аппарата на околокруговых орбитах.

Актуальность темы исследований. Относительным движением будем называть движение центра масс маневрирующего космического аппарата относительно центра масс пассивного (целевого) космического аппарата. Относительное движение в гравитационном поле Земли относится к числу сложных и специфических задач управления полётом космического аппарата.

Относительное движение связано с прикладными задачами космического полёта – сближение космических аппаратов, организация группового полёта космических аппаратов, приведение космического аппарата в точку стояния геостационарной орбиты, задачи инспекции космических аппаратов.

В настоящее время существует широкая номенклатура типов маршевых двигателей космических аппаратов, включающая в себя импульсные (химические) двигатели и непрерывно работающие двигатели. Широкое применение нашли двигательные установки конечной тяги (представленные в основном электроракетными двигательными установками), которые за счёт высокого удельного импульса повышают массовую эффективность космического аппарата.

Применение двигательных установок конечной тяги в составе маневрирующего космического аппарата приводит к применению методов управления относительным движением с учётом конечной величины тяги, когда управляющие воздействия составляют значительную часть траектории, а оставшуюся её часть составляют участки пассивного полёта.

Критериями оптимизации в задаче управления относительным движением выступают или общая продолжительность манёвра (задача быстрогодействия) или суммар-

ные затраты моторного времени (времени работы двигательной установки) манёвра при фиксированной продолжительности.

Оптимизация номинального управления, когда на космический аппарат кроме силы тяги двигательной установки действует только сила притяжения небесного тела, для разных типов двигательных установок представляет сложную вычислительную процедуру.

Проблеме оптимизации номинальных траекторий относительного движения космического аппарата с двигательной установкой конечной тяги посвящено большое количество работ. Для оптимизации номинальных законов управления существуют косвенные и прямые методы.

К косвенным методам оптимизации относится использование необходимых условий оптимальности – принцип максимума Понтрягина [30], метод динамического программирования Беллмана [8].

Использование принципа максимума Понтрягина [16, 27] связано с известными вычислительными трудностями – определение значения сопряжённых переменных, удовлетворяющего граничным условиям перелёта, получаемое в ходе решения двухточечной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений. Численных методов, гарантирующих сходимость и регулярность решения краевых задач, не существует, что делает достаточно затруднительным применением результатов оптимизации на практике. Так, в монографии В. Н. Лебедева [24] методом принципа максимума Понтрягина получен ряд решений различных задач оптимального управления, но регулярность и сходимость этих решений для произвольных граничных условий не гарантирована.

В работе Салмина В. В. [32 – 33] с использованием метода динамического программирования Беллмана составлен трёхшаговый алгоритм приведения космического аппарата в точку стояния геостационарной орбиты.

В работах Баранова А. А. [5 – 7], на основе теории базис-векторов найдено невырожденное шести импульсное решение задачи встречи, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности.

Особенность упомянутых работ заключается в том, что строгим методом определяется лишь структура управления, как правило количество включений тяги и, возможно, ориентация вектора тяги на каждом включении, а расчёт параметров

управления происходит с привлечением других методов вычислительной математики.

При оптимизации траекторий относительного движения прямыми методами могут быть использованы различные подходы. В работе Авксентьева А. А. [1] разработана схема раздельного управления продольными и боковыми составляющими относительного движения, необходимые приращения скорости рассчитываются в импульсной постановке.

Прямым методам оптимизации посвящена работа Улыбышева Ю. П. [34], в которой траектория разделена на большое, но конечное число сегментов, в некоторых из которых допускается проведение коррекции. Получена оптимальная (по критерию минимума затрат характеристической скорости) ориентация вектора тяги на каждом сегменте, а затем сегменты траектории соединялись в манёвры. Количество переменных в такой задаче составляет несколько тысяч, что определяет недостаток прямых методов – большая размерность задачи, на несколько порядков больше, чем в косвенных методах.

В научной литературе появилось новое направление – многокритериальная оптимизация траекторий относительного движения. Такой тип задач значительно сложнее традиционной однокритериальной оптимизации.

В работах Красильщикова М. Н., Малышева В. В., Федорова А. В. [10, 21] решено множество задач, связанных с управлением относительным движением. Одной из особенностей работы является многокритериальная оптимизация траекторий относительного движения. Применён метод свёртки критериев задачи с учётом ограничений по методу штрафных функций. Метод свёртки критериев задачи позволяет свести многокритериальную задачу к однокритериальной, но, следует отметить, что существуют и другие методы решения многокритериальных задач.

Таким образом, можно заключить, что решение задач однокритериальной оптимизации траекторий относительного движения принципиально получено, а задача многокритериальной оптимизации траекторий относительного движения исследована недостаточно и является **актуальной**.

Целью работы является разработка алгоритма построения множества номинальных оптимальных по Парето программ управления продольным относительным движением космического аппарата в двухкритериальной постановке – по критериям

затраты моторного времени и затраты общего времени.

Для достижения поставленной цели, необходимо решение следующих **задач**:

1. разработка математической модели относительного движения центра масс космического аппарата;
2. получение оптимальных программ управления и исследование структур управления относительным движением по критерию минимум затрат моторного времени при фиксированном общем времени методом принципа максимума Понтрягина;
3. выбор структуры и исследование параметрических программ управления с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальном направлении, разработка алгоритмов расчёта параметрического управления;
4. разработка алгоритмов двухкритериальной оптимизации параметрических программ управления в рамках теории эффективности Парето по критериям минимум моторного времени и минимум общего времени;
5. разработка программного обеспечения для выполнения расчёта параметрических программ управления с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальном направлении.

Объектом исследования является управление относительным движением космического аппарата.

Предметом исследования является двухкритериальная оптимизация номинальных программ управления относительным движением космического аппарата.

Научная новизна. В диссертации получены новые научные результаты:

1. построена математическая модель относительного движения космического аппарата, инвариантная к параметрам опорной орбиты и величине ускорения от тяги маневрирующего космического аппарата;
2. методом принципа максимума Понтрягина получены серии решений задачи оптимального управления относительным движением космического аппарата, определены структуры оптимального управления и оценены предельные минимальные затраты моторного времени;
3. определены структуры параметрических программ управления относительным движением с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальном направлении;
4. получены аналитические соотношения для расчёта размеров активных участков параметрических программ управления, определены области граничных условий,

допускающие их применение, получены аналитические соотношения для расчёта предельных затрат моторного и общего времени;

5. разработан алгоритм построения множества оптимальных по Парето номинальных программ управления относительным движением с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальном направлении по критериям минимум моторного времени и минимум общего времени.

Теоретическая значимость работы заключается в определении оптимального управления относительным движением с пассивным участком методом принципа максимума Понтрягина.

Практическая значимость работы заключается в получении аналитических соотношений для размеров активных участков и предельных значений критериев параметрических программ управления с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальном направлении по критериям минимум моторного времени и минимум общего времени и получение исчерпывающего множества оптимальных по Парето программ управления.

Положения, выносимые на защиту:

1. оптимальные программы управления относительным движением по критерию минимум затрат моторного времени для случая свободной и трансверсальной ориентации вектора тяги;
2. аналитические соотношения для расчёта размеров участков постоянства тяги параметрических программ управления, определение областей применения параметрических программ управления;
3. алгоритмы построения множества оптимального по Парето номинального управления с двумя и тремя включениями тяги в пространстве критериев минимум моторного времени и минимум общего времени;
4. результаты решения задачи приведения космического аппарата с двигательной установкой конечной тяги в заданную точку стояния геостационарной орбиты в двухкритериальной постановке.

Соответствие паспорту специальности. Полученные в диссертации результаты соответствуют следующим пунктам паспорта специальности 2.5.16 – Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов: пункту 1 – Разработка и совершенствование математических моделей, используемых для описания движе-

ния и управления летательным аппаратом на различных режимах полета, пункту 8 – Синтез терминального управления движением ЛА, пункту 12 – Совершенствование методов навигации и управления движением летательных аппаратов, совершенствование баллистико-навигационного обеспечения полета летательных аппаратов. Разработка новых методов оптимизации состава навигационных измерений и методов планирования навигационных измерений. Разработка методов оптимальной обработки навигационной информации.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением известных численных методов решения краевых задач оптимального управления, известных методов численного интегрирования уравнений движения, сравнением результатов, полученных в диссертации, с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные научные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на:

1. XIX Всероссийский семинар по управлению движением и навигации летательных аппаратов (г. Самара, 2016 г.);
2. V Всероссийская научно-техническая конференции с международным участием «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» (г. Самара, 2017 г.);
3. XXI Научно-техническая конференция молодых учёных и специалистов, посвящённая 60-летию со дня запуска первого искусственного спутника (г. Королёв, Московская обл., 2017);
4. 6 Российско-Германской конференция по электроракетным двигателям и их применению (г. Самара, 2017 г.);
5. Международная конференция по нелинейным задачам в авиации и космонавтике 2018 (респ. Армения, г. Ереван, 2018 г.);
6. XXII Международная научно-практическая конференция, посвящённая памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика Михаила Фёдоровича Решетнёва (г. Красноярск, 2018 г.);
7. Международный семинар «Навигация и управление движением» (NMC 2022) (г. Саратов, 2022 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано шесть работ, три из которых в ведущих рецензируемых научных журналах, определённых Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и науки Российской Федерации, три в издани-

ях индексируемых Scopus.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы, содержащего 60 наименований. Работа изложена на 131 странице.

1 ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ОКОЛОКРУГОВЫХ ОРБИТАХ

Под относительным движением космических аппаратов понимают – сближение космических аппаратов (рисунок 1.1), организацию группового полёта космических аппаратов, приведение космического аппарата в точку стояния геостационарной орбиты, задачи инспекции космических аппаратов.



Рисунок 1.1 – Первое в истории мировой космонавтики сближение космических аппаратов «Космос-188» (пассивный КА) и «Космос-186» (активный КА), 30 октября 1967 года

В относительном движении задействованы по крайней мере два (например, в задаче сближения) космических аппарата. Первый из них является маневрирующим (ак-

тивным) космическим аппаратом (КА2), оснащённый маршевой двигательной установкой конечной тяги, а второй является пассивным космическим аппаратом (КА1). КА2 оснащён двигательной установкой.

Следует отдельно выделить задачу приведения космического аппарата в точку стояния геостационарной орбиты. Здесь отсутствует КА1 как таковой, а КА2 совершает относительное движение в окрестности некоторой «виртуальной» точки геостационарной орбиты.

1.1 Состояние задач оптимизации траекторий относительного движения

В диссертации рассматривается динамическая задача, которая заключается в определении оптимального управления космическим аппаратом [12, 22]. Определяющее влияние на решение динамической задачи оказывает безразмерное ускорение – величина равная отношению реактивного ускорения от тяги к гравитационному [11, 32]. В зависимости от величины безразмерного ускорения выделяют манёвры с большой, малой и ограниченной тягой.

Перелёты с безразмерным ускорением¹ от тяги 10^{-1} и большим относятся к перелётам с большой тягой, для их расчёта используют импульсную теорию перелётов. Пассивные участки на траектории составляют большую её часть. Перелёты с безразмерным ускорением от тяги 10^{-5} и меньшим относятся к перелётам с малой тягой, которые характерны активными участками большой протяжённости, составляющими практически всю траекторию движения. В статье [20], отмечается, что добавление пассивных участков слабо уменьшает затраты характеристической скорости на траектории перелёта космического аппарата с двигателем малой тяги на геостационарную орбиту.

Оставшаяся часть перелётов (с безразмерным ускорением $10^{-1} \dots 10^{-5}$) относится к перелётам со средней тягой, для которых характерны сопоставимые по продолжительности активные и пассивные участки на траектории. Здесь увеличение продолжительности пассивного участка доставляет значительное уменьшение затратам моторного времени.

В диссертации используются модели и методы управления относительным движе-

¹отношение ускорения от тяги двигательной установки к гравитационному ускорению на орбите

нием, которые основаны на исследовании законов орбитального движения космических аппаратов по Кеплеровым орбитам [23]. Для этих методов характерна, в общем случае, импульсная коррекция траектории. Импульсы, рассчитанной величины, прикладываются в рассчитанных точках траектории, за счёт чего достигается требуемое относительное положение космического аппарата.

При перелётах с малой и средней тягой, продолжительность управляемых участков велика и не может рассматриваться как импульс. В этом случае используют методы управления относительным движением с учётом конечной величины тяги, рассматривающие в том числе и комбинацию активных и пассивных участков на траектории [23].

Для оптимизации номинального управления относительного движения космического аппарата с двигательной установкой конечной тяги существуют косвенные методы, применённые в работах Лебедева В. Н. [24], Баранова А. А. [5 – 7], Ролдугина Д. С. [5], Тереховой Е. О. [6], Салмина В. В. [33], Ишкова С. А. [16], Миронова В. И., Миронова Ю. В., Фоминова И. В. [27], Kriz J.A. [48], Shen H.J. and Tsiotras P. [56], Han C. и Xie H. W. [42], основанные на применении формализма принципа максимума Понтрягина, динамического программирования Беллмана, метода неопределённых множителей Лагранжа, и прямые методы, основанные на сведении исходной оптимизационной задачи к конечно-мерной параметрической (Улыбышев Ю. П. [34], Kluever C. A. [47], Hughes S. P., Mailhe L. M., Guzman. J J. [43]). Известны решения задачи выбора оптимального управления относительным движением более современными прямыми методами: генетические алгоритмы (Luo Y. Z., Tang G. J., Li H. Y.), эволюционные алгоритмы (Luo Y. Z., Zhang J., Li H. Y.), а также их комбинации (Luo Y. Z., Tang G. J., Lei Y. J., Luo Y. Z., Li H. Y., Tang G. J., Zhang J., Wang X., Ma X. B.) [50–60].

Новым направлением исследований является **многокритериальная оптимизация** траекторий относительного движения [10, 21]. Отличительной особенностью работ [10, 21] является рассмотрение задачи управления относительным движением в многокритериальной постановке. Выделены следующие критерии задачи

1. Обеспечить моторное и общее время меньшее заданной величины.
2. Минимизировать моторное время при заданной общем.
3. Минимизировать общее время при заданном моторном.

4. Обеспечить заданное общее время при моторном времени, меньшем некоторой величины.

В качестве критерия оптимизации рассмотрена свёртка критериев оптимальности с учётом ограничений по методу штрафных функций.

Важно отметить, что методы многокритериальной оптимизации не ограничиваются только свёрткой критериев. Наряду со свёрткой критериев оптимальности существует т.н. метод выделения множества эффективных (недоминируемых) решений (оптимальность (эффективность) по Парето) [36]. Предлагаемый подход даёт наиболее полную (исчерпывающую) картину эффективности по критериям и позволяет выявить эффективные (оптимальные) решения из возможного множества, каждое из которых не может быть улучшено ни по одному критерию без ухудшения других критериев.

1.2 Современные и перспективные двигательные установки конечной тяги

Анализ научно-технической литературы показал, что разработана широкая номенклатуры двигательных установок конечной тяги, которая применяется в составе космических аппаратов для различных задач, в том числе и связанных с управлением относительным движением.

Как правило, двигательные установки конечной тяги представлены электроракетными двигателями. В настоящее время, электроракетные двигательные установки нашли широкое применение. Приведём классификацию электроракетных двигательных установок, в основу которой положен физический принцип возникновения тяги [13]:

- Электротермические двигатели.
- Электростатические двигатели.
- Электромагнитные (плазменные) двигатели.
- Импульсные плазменные двигатели.

Приведём краткое описание принципов физической работы некоторых типов электроракетных двигателей [13, 14]:

1. Ионный двигатель, принцип работы которого заключается в ионизации газа и его

разгоне в электростатическом поле.

2. Стационарный плазменный двигатель. В этом двигателе рабочее тело (ксенон) поступает в канал и вблизи анода ионизируется. После чего ионы разгоняются в электрическом поле и, вылетая из сопла двигателя, создают реактивную тягу.
3. Магнитоплазодинамический двигатель. Рабочее тело этого двигателя (литий) в жидком состоянии попадает в испаритель и нагревается до температуры 1000 – 1100 °С, образовавшийся пар ионизируется и разгоняется в магнитном поле.
4. Магнитоплазменный двигатель. Рабочее тело (аргон) ионизируется и, попадая в ускоритель, увеличивается температура плазмы. После чего, плазма, проходя через сопло, представляющее собой набор сверхпроводящих катушек, разгоняется до высокой скорости.

Параметры двигательных установок варьируются в широком диапазоне [9]. В таблицах приведены характеристики электроракетных двигательных установок разработки в ОКБ «Факел» (таблица 1.1), ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша» (таблица 1.2), ФГУП ЦНИИМАШ (таблица 1.3).

Таблица 1.1 – Характеристики электроракетных двигательных установок разработки ОКБ «Факел»

Двигатель	Тяга, мН	Удельный импульс, км/с	Мощность, кВт
СПД-25	7	8-10	0,1
СПД-35	10	12	0,2
СПД-50	20	12,5	0,35
СПД-60	30	13	0,5
СПД-70	40	14,5	0,65
СПД-100	83	15	1,35
СПД-140	280	17	4,5
СПД-200	185-488	17,56-29,5	3-11
СПД-290	до 1500	15-30	5-30

Таблица 1.2 – Характеристики электроракетных двигательных установок разработки ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша»

Двигатель	Тяга, мН	Удельный импульс, км/с	Мощность, кВт
КМ-37	5,1-1,1	8,95-16,4	0,1-0,3
КМ-45	10-28	12,5-15	0,2-0,45
КМ-60	30-50	12,5-22	0,45-1,1
КМ-88	50-105	20-30	1-2,5
КМ-5	80-140	16-21	1,35-2,5
КМ-7	200-380	17-26,5	3,5-6

Таблица 1.3 – Характеристики электроракетных двигательных установок разработки ФГУП ЦНИИМАШ

Двигатель	Тяга, мН	Удельный импульс, км/с	Мощность, кВт
Д-38	25-100	13-28	0,2-1,5
Д-60	35-140	12-30	0,4-2,2
Д-80	45-240	12-33,5	0,6-5,6
Д-90-I	260	25	5-6
Д-90-II	160	44	3,5-15
Д-100-I	80-340	14,5-28	16,-7,5
Д-100-II	80-650	18-42,5	3,5-15
ТМ-50	1000-1500	30-70	20-50
VHITAL-160	618	76,67	36

Электроракетные двигательные установки указанного типа применяются в составе космических аппаратов, функционирующих на геостационарной орбите.

Для их энергоснабжения необходим источник. Как правило, источником электроэнергии на космических аппаратах с электроракетными двигательными установками являются фотоэлектрические преобразователи, объединённые в панели солнечных батарей, которые преобразуют энергию солнечного излучения в электрическую [26].

Современными являются трёх каскадные фотоэлектрические преобразователи на основе арсенида галлия, коэффициент полезного действия которых составляет около 26,5 % [26]. Применительно к космическим аппаратам, работающим на геостационарной орбите, удельная мощность панелей солнечных батарей составляет 302 Вт/м² в начале работы и уменьшается до 220 – 230 Вт/м² через 10 – 15 лет [26].

Перспективным является четырёхкаскадный фотоэлектрический преобразователь из арсенида галлия, КПД которого составляет около 40 %. Он позволит улучшить удельно-массовые характеристики панелей солнечных батарей [26].

Двигательные установки конечной тяги могут быть использованы в составе малых космических аппаратов. Под малыми космическими аппаратами, как правило, понимаются аппараты массой 20 .. 100 кг, размещённые на круговых орбитах высотой до 1000 км.

Двигатели конечной тяги для малых космических аппаратов представлены либо традиционными электроракетными двигательными установками с несколько уменьшенной потребляемой мощностью (таблица 1.4), либо двигательными установками на перспективных рабочих телах (таблица 1.5) [3, 31].

Таблица 1.4 – Электроракетные двигатели малой мощности для малых космических аппаратов

Параметр	АИПД ¹	ВЧИД ²	СПД ³
Тяга, мН	8 - 155	13,2	4,41 - 10,2
Потребляемая мощность, Вт	10 - 170	420	98,7 - 247,5
Скорость истечения рабочего тела, км/с	5,2 - 16	36,58	8,63 - 10,52
Ускорение от тяги при массе МКА 20 кг a_0 , м/с ²	$(4 .. 77,5) \cdot 10^{-4}$	$6,6 \cdot 10^{-4}$	$(2,2 .. 5,1) \cdot 10^{-4}$
1. абляционные импульсные плазменные двигатели. 2. высокочастотные ионные двигатели. 3. стационарные плазменные двигатели.			

Как видно из таблиц 1.4 и 1.5, перелёты малых космических аппаратов с двигательными установками относятся к перелётам с конечной тягой.

Таблица 1.5 – Характеристики электроракетных двигателей на перспективных рабочих телах для малых космических аппаратов

Параметр	ЭНД ¹	ДОЭВ ²	ДЗА ³
Тяга, мН	$5 \cdot 10^{-2}$	0,8	0,5
Потребляемая мощность, Вт	360	нд	100
Скорость истечения рабочего тела, км/с	1,8	3	1,95
Ускорение от тяги при массе МКА 20 кг a_0 , м/с ²	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$
1. электронагревные двигатели на аммиаке. 2. двигатели на основе электролиза воды. 3. двигатели на закиси азота.			

1.3 Математическая модель движения

Существует множество систем координат, которые используются для построения моделей относительного движения. К ним относят инерциальные системы координат декартовы, сферические, цилиндрические [29], начало которых расположено в центре притягивающего тела.

Относительное движение удобно рассматривать в орбитальной системе координат, начало которой совпадает с точкой, движущейся по опорной орбите (с центром масс пассивного КА), одна из осей которой проходит через начало некоторой инерциальной системы координат, начало которой расположено в центре притяжения [4, 23].

Орбитальные системы координат бывают прямоугольными (декартовыми) и криволинейными, уравнения относительного движения в которых получены ранее, а для некоторых частных случаев управления получены их аналитические решения [37]. Следует отметить, что уравнения движения в прямоугольных системах координат уступают в точности уравнениям в криволинейных координатах, особенно на больших расстояниях между космическими аппаратами [2].

Запишем уравнения движения космического аппарата в орбитальной цилиндри-

ческой системе координат [17, 29, 2]:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}r &= V_r, & \frac{d}{dt}u &= \frac{V_u}{r}, & \frac{d}{dt}z &= V_z, \\
\frac{d}{dt}V_r &= \frac{V_u^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + a_S, \\
\frac{d}{dt}V_u &= -\frac{V_u V_r}{r} + a_T, \\
\frac{d}{dt}V_z &= -\mu \frac{z}{r^3} + a_W.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь r – расстояние от центра Земли до проекции спутника на плоскость невозмущённой орбиты, u – угол, отсчитываемый в плоскости невозмущённой орбиты от некоторой начальной оси по направлению полёта спутника, z – расстояние от плоскости невозмущённой орбиты до спутника, V_r, V_u, V_z – радиальная, трансверсальная и нормальная (проекция скорости на перпендикуляр к плоскости невозмущённой орбиты) скорость соответственно, μ – гравитационный параметр, t – время.

Рассмотрим движение маневрирующего космического аппарата (индекс 2) относительно пассивного (индекс 1). При анализе динамики относительного движения используется линейная теория возмущённого движения. Введены допущения:

1. Расстояние между центрами масс КА1 и КА2 мало по сравнению с радиус-вектором КА1.
2. Орбита КА1 круговая или слабо эллиптическая с эксцентриситетом менее 0.1.
3. Величина ускорения от тяги КА2, отнесённая к гравитационному ускорению на орбите КА1 менее чем 10^{-2} . Масса КА2 постоянна.
4. Относительное движение рассмотрено в центральном гравитационном поле, влияние возмущающих сил отсутствует.

Параметры движения активного космического аппарата представляются в виде [19]:

$$\begin{aligned}
r_2 &= r_1 + \Delta r, & V_{r_2} &= V_{r_1} + \Delta V_r, \\
u_2 &= u_1 + \Delta u, & V_{u_2} &= V_{u_1} + \Delta V_u, \\
z_2 &= z_1 + \Delta z, & V_{z_2} &= V_{z_1} + \Delta V_z.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Вторые члены, входящие в правые части (1.2), получаются из решения линейри-

зованной системы уравнений [19]:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta r &= \Delta V_r, & \frac{d}{dt}\Delta u &= \frac{\Delta V_u}{r_1} - \frac{V_{u_1}}{r_1^2}\Delta r, & \frac{d}{dt}\Delta z &= \Delta V_z, \\
\frac{d}{dt}\Delta V_r &= \left(\frac{\mu}{r_1^3} - \frac{V_{u_1}^2}{r_1^2}\right)\Delta r + 2\frac{V_{u_1}}{r_1}\Delta V_u + a_S, \\
\frac{d}{dt}\Delta V_u &= -\frac{V_{r_1}}{r_1}\Delta V_u - \frac{V_{u_1}}{r_1}\Delta V_r + \frac{V_{r_1}V_{u_1}}{r_1^2}\Delta r + a_T, \\
\frac{d}{dt}\Delta V_z &= -\frac{\mu}{r_1^3}\Delta z + a_W.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Для случая круговой орбиты пассивного космического аппарата уравнения (1.3) упрощаются [16, 19]:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta r &= \Delta V_r, & \frac{d}{dt}\Delta L &= \Delta V_u - \lambda\Delta r, & \frac{d}{dt}\Delta z &= \Delta V_z, \\
\frac{d}{dt}\Delta V_r &= 2\lambda\Delta V_u + \lambda^2\Delta r + a_S, \\
\frac{d}{dt}\Delta V_u &= -\lambda\Delta V_r + a_T, \\
\frac{d}{dt}\Delta V_z &= -\lambda^2\Delta z + a_W.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь λ – средняя угловая скорость движения пассивного космического аппарата по орбите:

$$\lambda = \sqrt{\mu \frac{(1-e^2)^3}{p^3}},$$

p – фокальный параметр орбиты ПКА, e – эксцентриситет орбиты ПКА, $\Delta L = \Delta u \cdot r_1$.

Запишем систему (1.4) в матричной форме:

$$\Delta \dot{X} = \mathbf{A} \cdot \Delta X + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}. \tag{1.5}$$

Здесь:

$$\Delta \dot{X} = \begin{bmatrix} \Delta r & \Delta L & \Delta z & \Delta V_r & \Delta V_u & \Delta V_z \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_S & a_T & a_W \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Применяя формулу Коши к уравнению динамики (1.4), получим выражение для определения фазового вектора в произвольный момент времени t :

$$X(t) = \Phi(t)X(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau, \quad (1.6)$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (1.4), которая имеет вид:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 - \cos(\omega t) & 0 & 0 & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) & \frac{2}{\omega} \cos(\omega t) & 0 \\ 2 \sin(\omega t) - 3\omega t & 1 & 0 & \frac{2}{\omega}(\cos(\omega t) - 1) & \frac{4}{\omega} \sin(\omega t) - 3\omega t & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega t) & 0 & 0 & \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \\ \omega \sin(\omega t) & 0 & 0 & \cos(\omega t) & 2 \sin(\omega t) & 0 \\ \omega(\cos(\omega t) - 1) & 0 & 0 & -\sin(\omega t) & 2 \cos(\omega t) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \sin(\omega t) & 0 & 0 & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Интегральная часть матричного уравнения (1.6) для системы (1.4) определяется квадратурами в форме матрицы:

$$\int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\lambda t} \left[\sin(\lambda t - \psi) & 2(1 - \cos(\lambda t - \psi)) & 0 \right] u(t)d\psi \\ -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\lambda t} \left[2(1 - \cos(\lambda t - \psi)) & 3(\lambda t - \psi) - 4 \sin(\lambda t - \psi) & 0 \right] u(t)d\psi \\ \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\lambda t} \left[0 & 0 & \sin(\lambda t - \psi) \right] u(t)d\psi \\ \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\lambda t} \left[\cos(\lambda t - \psi) & 2 \sin(\lambda t - \psi) & 0 \right] u(t)d\psi \\ \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\lambda t} \left[\sin(\lambda t - \psi) & 1 - 2 \cos(\lambda t - \psi) & 0 \right] u(t)d\psi \\ \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\lambda t} \left[0 & 0 & \cos(\lambda t - \psi) \right] u(t)d\psi \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Анализ фундаментальной матрицы (1.7) позволяет выявить закономерности относительного движения. В линейном приближении продольное движение (составляющие Δr , ΔL , ΔV_r и ΔV_u) не связано с боковым (составляющие Δz , ΔV_z). При этом в пассивном движении изменение составляющих Δz , ΔV_z будет подчиняться гармоническому закону. Анализ пассивного продольного движения показывает, что КА2

двигается относительно КА1 по эллипсу, центр которого смещается с постоянной скоростью по движению, если центр эллипса лежит ниже КА1 или против движения, если центр эллипса лежит выше КА1. Полуоси эллипса относятся как 2:1.

В относительном движении выделим вековые и периодические составляющие [37, 2, 16]. Вековыми будем считать параметры, характеризующие смещение центра эллипса, размер его малой полуоси и амплитуду колебаний в боковой плоскости, а периодическими – положение космического аппарата на эллипсе. Введём переменные (рисунок 1.2):

$$\begin{aligned}\Delta r_{\text{cp}} &= 2 \left(\Delta r + \frac{\Delta V_u}{\lambda} \right), & \Delta L_{\text{cp}} &= \Delta L - 2 \frac{\Delta V_r}{\lambda}, \\ l &= \sqrt{\frac{(\Delta L - \Delta L_{\text{cp}})^2}{4} + (\Delta r - \Delta r_{\text{cp}})^2}, & \text{tg } \varphi &= \frac{\Delta V_r}{\lambda \Delta r + 2 \Delta V_u}, \\ l_z &= \sqrt{\Delta z^2 + \left(\frac{\Delta V_z}{\lambda} \right)^2}, & \text{tg } \varphi_z &= \frac{\lambda \Delta z}{\Delta V_z}.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Здесь вековые составляющие Δr_{cp} – среднее смещение КА2 вдоль радиуса орбиты КА1, ΔL_{cp} – среднее смещение КА2 вдоль орбиты КА1, l – малая полуось эллипса относительного движения, l_z – амплитуда колебаний в боковой плоскости, периодические составляющие φ и φ_z – углы определяющие положение КА1 на эллипса относительного движения.

Запишем дифференциальные уравнения для переменных (1.9). Для этого продифференцируем их правые и левые части по времени и после преобразований получим:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{r}_{\text{cp}} &= \frac{2}{\lambda} a_T, & \Delta \dot{L}_{\text{cp}} &= -\frac{3}{2} \lambda \Delta r_{\text{cp}} - \frac{2}{\lambda} a_S, \\ i &= \frac{a_S \sin \varphi + 2 a_T \cos \varphi}{\lambda}, & \dot{\varphi} &= \lambda + \frac{a_S \cos \varphi - 2 a_T \sin \varphi}{\lambda l}, \\ \dot{l}_z &= \frac{a_W}{\lambda} \cos \varphi_z, & \dot{\varphi}_z &= \lambda - \frac{a_W \sin \varphi_z}{\lambda l_z}.\end{aligned}\quad (1.10)$$

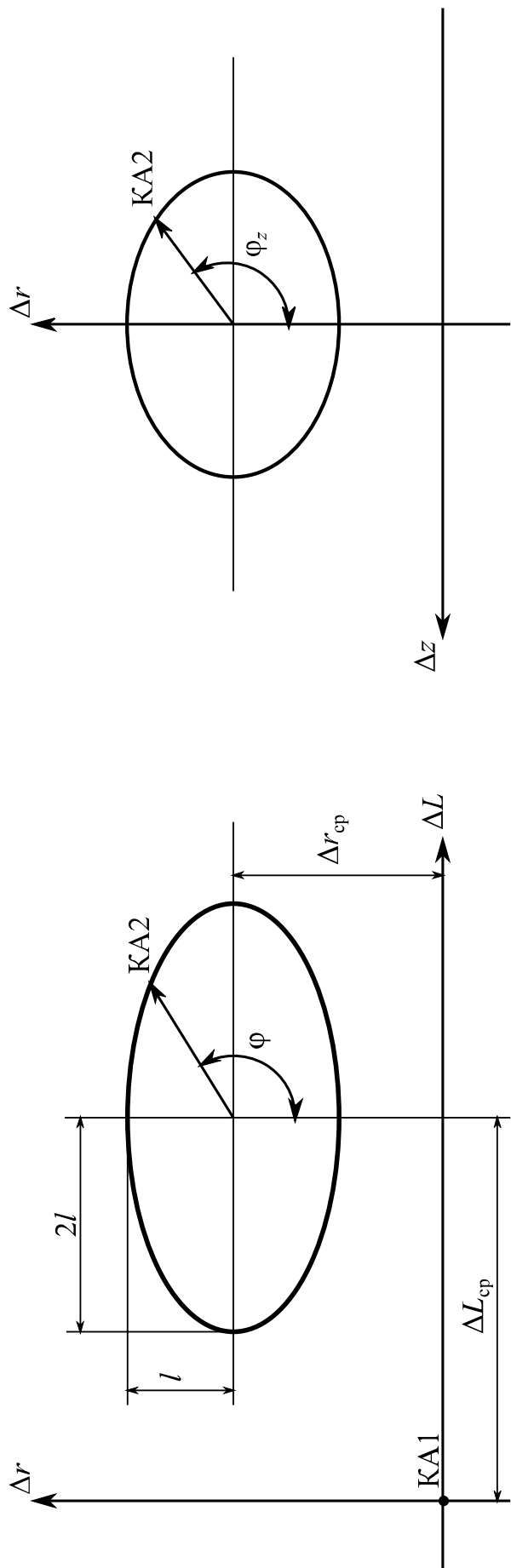


Рисунок 1.2 – Вековые и периодические составляющие движения

Дифференциальные уравнения в форме (1.10) и решения в квадратурах в форме (1.8), записанные для полного вектора управляющего ускорения, позволяют в ряде случаев упростить исследования задач относительного движения космических объектов.

В правых частях системы (1.10) имеются особенности, связанные с наличием в знаменателе параметров l и l_z , что приводит к вычислительным трудностям при малых значениях последних. В таких ситуациях можно перейти к переменным:

$$\begin{aligned} l_x &= l \cos \varphi, & l_y &= l \sin \varphi, \\ x_z &= l_z \cos \varphi_z, & y_z &= l_z \sin \varphi_z. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Запишем в окончательном виде систему дифференциальных уравнений относительного движения, пригодную для исследований в том числе на околокруговых орбитах:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r}_{\text{cp}} &= \frac{2}{\lambda} a_T, & \Delta \dot{L}_{\text{cp}} &= -\frac{3}{2} \lambda \Delta r_{\text{cp}} - \frac{2}{\lambda} a_S, \\ \dot{l}_x &= -\lambda l_y + \frac{2}{\lambda} a_T, & \dot{l}_y &= \lambda l_x + \frac{a_S}{\lambda}, \\ \dot{x}_z &= -\lambda y_z + \frac{a_W}{\lambda}, & \dot{y}_z &= \lambda x_z. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Аналитическое решение системы (1.12) получается из решения матричного уравнения в квадратурах (1.8) с учётом преобразований (1.9) и (1.11):

$$\begin{aligned} \Delta r_{\text{cp}}(\lambda t) &= \Delta r_{\text{cp}_0} + \frac{2}{\lambda^2} C, & \Delta L_{\text{cp}}(\lambda t) &= \Delta L_{\text{cp}_0} - \frac{3}{2} \lambda t \Delta r_{\text{cp}_0} - \frac{D}{\lambda^2}, \\ l_x(\lambda t) &= l_{x_0} - \frac{B}{\lambda^2}, & l_y(\lambda t) &= l_{y_0} + \frac{A}{\lambda^2}, \\ x_z(\lambda t) &= x_{z_0} + \frac{E}{\lambda^2}, & y_z(\lambda t) &= y_{z_0} + \frac{F}{\lambda^2}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\lambda t} [a_S \cos(\lambda t - \psi) + 2a_T \sin(\lambda t - \psi)] d\psi, \\
 B &= \int_0^{\lambda t} [a_S \sin(\lambda t - \psi) - 2a_T \cos(\lambda t - \psi)] d\psi, \\
 C &= \int_0^{\lambda t} a_T d\psi, \\
 D &= \int_0^{\lambda t} [a_S + 3a_T(\lambda t - \psi)] d\psi, \\
 E &= \int_0^{\lambda t} a_W \cos(\lambda t - \psi) d\psi, \\
 F &= \int_0^{\lambda t} a_W \sin(\lambda t - \psi) d\psi.
 \end{aligned}$$

Для полноты модели добавим к уравнениям соотношение для расчёта моторного времени работы двигателей:

$$\dot{t}_{\text{мот}} = \sqrt{a_S^2 + a_T^2 + a_W^2}$$

Запишем проекции управляющего ускорения на оси орбитальной цилиндрической системы координат в следующем виде:

$$a_T = a \cos \alpha \cos \beta,$$

$$a_S = a \sin \alpha \cos \beta,$$

$$a_W = a \sin \beta.$$

Здесь α – угол отклонения вектора тяги от трансверсального направления, β – угол отклонения тяги от плоскости орбиты.

Приведём систему уравнений (1.13) к безразмерному виду. Для этого разделим правую и левую часть уравнений системы (1.13) на масштабный множитель для фазовых координат

$$K = 2 \frac{a}{\lambda^2}$$

и для времени

$$t = \lambda \bar{t}$$

получим:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\bar{r}}_{\text{cp}} &= \cos \alpha \cos \beta, & \Delta \dot{\bar{L}}_{\text{cp}} &= -\frac{3}{2} \Delta \bar{r}_{\text{cp}} - \sin \alpha \cos \beta, \\ \dot{\bar{l}}_x &= \cos \alpha \cos \beta - \bar{l}_y, & \dot{\bar{l}}_y &= \frac{\sin \alpha \cos \beta}{2} + \bar{l}_x, \\ \dot{\bar{x}}_z &= \frac{\sin \beta}{2} - \bar{y}_z, & \dot{\bar{y}}_z &= \bar{x}_z, \end{aligned} \quad (1.14)$$

Для полноты модели добавим к уравнениям соотношение для расчёта моторного времени работы двигателей:

$$\dot{t}_{\text{мот}} = \sqrt{a_S^2 + a_T^2 + a_W^2}$$

Система уравнений (1.14) инвариантна к величине ускорения от тяги КА2 и параметрам орбиты КА1. Далее, для упрощения записи, верхний символ « $\bar{\cdot}$ » будет опущен. Подразумевается, что все переменные безразмерны.

1.4 Постановка задачи двухкритериальной оптимизации номинальных программ управления относительным движением

Характерными критериями задачи управления относительным движением являются либо затраты моторного времени, либо продолжительность манёвра относительного движения (затраты общего времени). Традиционно, один параметр рассматривают как критерий, а второй выступает ограничением.

В отличие от ранее опубликованных работ, в диссертации и затраты общего времени и затраты моторного времени рассматриваются как два независимых критерия.

Для решения задачи управления относительным движением введём вектор фазовых координат \mathbf{x}_0 , который соответствует начальным условиям движения:

$$\mathbf{x}_0 = \left[\Delta r_{\text{cp}0} \quad \Delta L_{\text{cp}0} \quad l_{x0} \quad l_{y0} \quad x_{z0} \quad y_{z0} \right]^T.$$

В конечный момент времени параметры этого вектора должны удовлетворять граничным условиям \mathbf{x}_k :

$$\mathbf{x}_k = \left[\Delta r_{\text{cp}k} \quad \Delta L_{\text{cp}k} \quad l_{xk} \quad l_{yk} \quad x_{zk} \quad y_{zk} \right]^T.$$

Запишем постановку задачи многокритериальной оптимизации траекторий относительного движения. Необходимо определить оптимальное управление, которое

обеспечивает удовлетворение граничных условий x_0 и x_k и доставляет минимум критериям задачи – затраты моторного времени $t_{\text{мот}}$ общие затраты времени $t_{\text{общ}}$:

$$U_{\text{опт}} = \min_{u_{\text{опт}} \in U} (t_{\text{мот}} \rightarrow \min, t_{\text{общ}} \rightarrow \min, \mid \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_k). \quad (1.15)$$

Здесь $U_{\text{опт}}$ – оптимальное управление, U – область допустимых управлений, x_0 и x_k – параметры движения в начальный и конечный момент времени, $t_{\text{мот}}$ и $t_{\text{общ}}$ – критерии многокритериальной задачи.

Управлением является угол отклонения вектора тяги от трансверсального направления α и функция включения тяги δ .

При отсутствии ограничений на управление $\delta = \{0, 1\}$ – функция включения тяги ($\delta = 1$ соответствует включённой тяге, а $\delta = 0$ соответствует выключенной тяге (пассивный участок), а при трансверсальной ориентации вектора тяги $\delta = \{-1, 0, 1\}$ – функция знака тяги ($\delta = 1$ тяга направлена в положительном трансверсальном направлении, $\delta = 0$ тяга выключена и $\delta = -1$ тяга направлена в отрицательном трансверсальном направлении).

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

1. Рассмотрено текущее состояние проблем оптимизации номинальных программ управления относительным движением космического аппарата. Показано, что проблему выбора номинального управления в однокритериальной постановке можно считать решённой, а задача многокритериальной оптимизации номинальных программ управления относительным движением рассмотрена недостаточно и является актуальной.
2. Дана характеристика существующей номенклатуре двигательных установок конечной тяги, представленной электроракетными двигательными установками. Существующие их образцы обладают характеристиками (тягой, удельным импульсом, потребляемой электрической мощностью, рабочим телом, физическим принципом создания тяги), изменяемыми в широком диапазоне.
3. В качестве модели относительного движения выбрана система уравнений в орбитальной цилиндрической системе координат, уравнения которой линеаризованы в окрестности опорной орбиты. Получена безразмерная модель относительного движения и её решение в квадратурах, которые инвариантны по отношению к параметрам опорной орбиты и проектным параметрам космического аппарата.
4. Рассмотрены традиционные критерии в задачах оптимизации номинальных траекторий относительного движения космического аппарата. Приведена в общем виде постановка задачи двухкритериальной оптимизации.

2 ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ УПРАВЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ С ПАССИВНЫМ УЧАСТКОМ

В главе диссертации рассматривается задача номинального оптимального управления компланарным относительным движением космического аппарата. С применением принципа максимума Понтрягина определены оптимальные программы управления для критерия минимум моторного времени.

Задачи выбора управления решены в двух постановках – без ограничений на ориентацию вектора тяги и для случая управления с трансверсальной ориентацией тяги. Решение задачи выбора управления со свободной ориентацией вектора тяги использовано как начальное приближение для задачи выбора управления при трансверсальной ориентации вектора тяги.

Задача выбора оптимального управления решены в два этапа. На первом этапе решены задачи оптимального управления отдельно вековыми и отдельно периодическими составляющими движения, использованные как начальное приближение к решению задачи оптимального управления относительным движением на втором этапе.

Решение задачи на первом этапе позволило определить структуру оптимального управления, а для случая трансверсальной ориентации вектора тяги получить аналитические соотношения для определения энергетических характеристик перелёта.

2.1 Оптимальное управление без ограничений на ориентацию вектора тяги

Выпишем безразмерные уравнения продольного относительного движения (первые четыре уравнения системы (1.14)) для случая отсутствия ограничений на ориентацию вектора тяги:

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{r}_{\text{cp}} &= \delta \cos \alpha, \\
\Delta \dot{L}_{\text{cp}} &= -\frac{3}{2} \Delta r_{\text{cp}} - \delta \sin \alpha, \\
\dot{l}_x &= \delta \cos \alpha - l_y, \\
\dot{l}_y &= \frac{\delta \sin \alpha}{2} + l_x.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь α – угол отклонения вектора тяги от трансверсального направления, $\delta = \{1, 0\}$ – функция включения тяги, $\delta = 1$ соответствует включённой тяге, а $\delta = 0$ соответствует выключенной тяге (пассивный участок).

Критерием задачи является минимум моторного времени:

$$t_{\text{мот}} \rightarrow \min$$

при фиксированных затратах общего времени.

2.1.1 Управление вековыми составляющими движения

Выпишем уравнения векового движения при отсутствии ограничений на ориентацию вектора тяги и дополним их уравнением для затрат моторного времени:

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{r}_{\text{cp}} &= \beta \cos \alpha, \\
\Delta \dot{L}_{\text{cp}} &= -\frac{3}{2} \Delta r_{\text{cp}} - \beta \sin \alpha, \\
\dot{t}_{\text{мот}} &= \delta.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Граничные условия задачи имеют вид:

$$\begin{aligned}
t = 0 : \quad \Delta r_{\text{cp}} &= \Delta r_{\text{cp}0}, \quad \Delta L_{\text{cp}} = \Delta L_{\text{cp}0}; \\
t = t_{\text{к}} : \quad \Delta r_{\text{cp}} &= 0, \quad \Delta L_{\text{cp}} = 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В соответствии с общим алгоритмом принципа максимума Понтрягина, запишем Гамильтониан системы (2.2):

$$H = \Psi_{\Delta r_{\text{cp}}} \delta \cos \alpha - \Psi_{\Delta L_{\text{cp}}} \left(\frac{3}{2} \Delta r_{\text{cp}} + \delta \sin \alpha \right) + \Psi_{t_{\text{мот}}} \delta, \tag{2.4}$$

где $\Psi_{\Delta r_{\text{cp}}}$, $\Psi_{\Delta L_{\text{cp}}}$ и $\Psi_{t_{\text{мот}}}$ – сопряжённые множители.

Оптимальное управление определим как максимум Гамильтониана (2.4), получим:

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{опт}} &= -\operatorname{arccctg} \frac{\Psi_{\Delta r_{\text{ср}}}}{\Psi_{\Delta L_{\text{ср}}}}, \\ \delta_{\text{опт}} &= \frac{1 + \operatorname{sign} F}{2},\end{aligned}\tag{2.5}$$

где $F = \sqrt{\Psi_{\Delta L_{\text{ср}}}^2 + \Psi_{\Delta r_{\text{ср}}}^2} + \Psi_{t_{\text{мот}}}$.

Дифференциальные уравнения для сопряжённых переменных и их решения примут вид:

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_{\Delta r_{\text{ср}}} &= \frac{3}{2}\Psi_{\Delta r_{\text{ср}}}, & \Psi_{\Delta r_{\text{ср}}}(t) &= \Psi_{\Delta r_{\text{ср}0}} + \frac{3}{2}t\Psi_{\Delta L_{\text{ср}0}}; \\ \dot{\Psi}_{\Delta L_{\text{ср}}} &= 0, & \Psi_{\Delta L_{\text{ср}}}(t) &= \Psi_{\Delta L_{\text{ср}0}}; \\ \dot{\Psi}_{t_{\text{мот}}} &= 0, & \Psi_{t_{\text{мот}}}(t) &= \Psi_{t_{\text{мот}0}};\end{aligned}\tag{2.6}$$

Таким образом, задача оптимального управления вековыми составляющими относительного движения сведена к двухточечной краевой задаче для системы уравнений (2.2), дополненной уравнениями для сопряжённых переменных (2.6), с оптимальным управлением (2.5) с граничными условиями (2.3). Краевая задача сводится к определению начального значения сопряжённых переменных (2.6).

2.1.2 Управления периодическими составляющими движения

Возникает особенность, связанная с тем, что на момент окончания коррекции периодических составляющих движения, вековые не должны измениться. В работе [16] доказано, что это возможно лишь в том случае, когда продолжительность коррекции кратна витку, а начальный фазовый угол кратен π , что в терминах введённых переменных (1.11) означает:

$$x_0 = \pm l_0, \quad y_0 = 0.$$

Выпишем уравнения периодического движения при отсутствии ограничений на ориентацию вектора тяги и дополним их уравнением для затрат моторного времени:

$$\begin{aligned}\dot{l}_x &= \delta \cos \alpha - l_y, \\ \dot{l}_y &= \frac{\delta \sin \alpha}{2} + l_x, \\ \dot{t}_{\text{мот}} &= \delta.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Граничные условия задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} t = 0 : \quad l_x &= l_{x0}, \quad l_y = l_{y0}; \\ t = t_k : \quad l_x &= 0, \quad l_y = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В соответствии с общим алгоритмом принципа максимума Понтрягина, запишем Гамильтониан системы (2.7):

$$H = \Psi_{l_x} (\delta \cos \alpha - l_y) + \Psi_{l_y} \left(\frac{\delta \sin \alpha}{2} + l_x \right) + \Psi_{t_{\text{мот}}} \delta, \quad (2.9)$$

где Ψ_{l_x} и Ψ_{l_y} – сопряжённые множители.

Оптимальное управление определим как максимум Гамильтониана (2.9), получим:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{опт}} &= \text{arctg} \frac{\Psi_{l_y}}{2\Psi_{l_x}}, \\ \delta_{\text{опт}} &= \frac{1 + \text{sign} F}{2}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $F = \frac{\sqrt{4\Psi_{l_x}^2 + \Psi_{l_y}^2}}{2} + \Psi_{t_{\text{мот}}}$.

Уравнения для сопряжённых переменных и их решения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{l_x} &= -\Psi_{l_y}, \quad \Psi_{l_x}(t) = \sqrt{\Psi_{l_{x0}}^2 + \Psi_{l_{y0}}^2} \cos \left(t + \text{arctg} \frac{\Psi_{l_{y0}}}{\Psi_{l_{x0}}} \right); \\ \dot{\Psi}_{l_y} &= \Psi_{l_x}, \quad \Psi_{l_y}(t) = \sqrt{\Psi_{l_{x0}}^2 + \Psi_{l_{y0}}^2} \sin \left(t + \text{arctg} \frac{\Psi_{l_{y0}}}{\Psi_{l_{x0}}} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, задача оптимального управления периодическими составляющими относительного движения сведена к двух точечной краевой задаче для системы уравнений (2.7), дополненной уравнениями для сопряжённых переменных (2.11), с оптимальным управлением (2.10) с граничными условиями (2.8). Краевая задача сводится к определению начального значения сопряжённых переменных (2.11).

2.1.3 Оптимальное управление относительным движением без ограничений на ориентацию вектора тяги

Выпишем уравнения относительного движения при отсутствии ограничений на ориентацию вектора тяги и дополним их уравнением для затрат моторного времени:

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{r}_{\text{cp}} &= \delta \cos \alpha, \\
\Delta \dot{L}_{\text{cp}} &= -\frac{3}{2} \Delta r_{\text{cp}} - \delta \sin \alpha, \\
\dot{l}_x &= \delta \cos \alpha - l_y, \\
\dot{l}_y &= \frac{\delta \sin \alpha}{2} + l_x, \\
\dot{t}_{\text{мот}} &= \delta.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Граничные условия задачи имеют вид:

$$\begin{aligned}
t = 0 : \quad \Delta r_{\text{cp}} &= \Delta r_{\text{cp}0}, \quad \Delta L_{\text{cp}} = \Delta L_{\text{cp}0}, \quad l_x = l_{x0}, \quad l_y = l_{y0}; \\
t = t_{\text{к}} : \quad \Delta r_{\text{cp}} &= 0, \quad \Delta L_{\text{cp}} = 0, \quad l_x = 0, \quad l_y = 0.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

В соответствии с общим алгоритмом принципа максимума Понтрягина, запишем Гамильтониан системы (2.12):

$$\begin{aligned}
H &= \left[\sin \alpha \left(\frac{\Psi_{l_y}}{2} - \Psi_{\Delta L_{\text{cp}}} \right) + \cos \alpha (\Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{\text{cp}}}) + \Psi_{t_{\text{мот}}} \right] \delta - \\
&\quad - \frac{3}{2} \Psi_{\Delta L_{\text{cp}}} \Delta r_{\text{cp}} + \Psi_{l_y} l_x - \Psi_{l_x} l_y.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Уравнения для сопряжённых множителей определены ранее (см. (2.6) и (2.11)).

Оптимальное управление определим как максимум Гамильтониана (2.14), получим:

$$\begin{aligned}
\alpha_{\text{опт}} &= \arctg \frac{\frac{\Psi_{l_y}}{2} - \Psi_{\Delta L_{\text{cp}}}}{\Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{\text{cp}}}}, \\
\beta_{\text{опт}} &= \frac{1 + \text{sign } F}{2},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где $F = \sqrt{\left(\frac{\Psi_{l_y}}{2} - \Psi_{\Delta L_{\text{cp}}} \right)^2 + (\Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{\text{cp}}})^2} + \Psi_{t_{\text{мот}}}$.

Таким образом, задача оптимального управления относительным движением без ограничений на ориентацию вектора тяги сведена к двух точечной краевой задаче для системы уравнений (2.12), дополненной уравнениями для сопряжённых переменных (2.6) и (2.11), с оптимальным управлением (2.15) с граничными условиями (2.13). Краевая задача сводится к определению начального значения сопряжённых переменных (2.6) и (2.11).

2.2 Оптимальное управление с трансверсальной ориентацией вектора тяги

Выпишем безразмерные уравнения компланарного относительного движения для случая трансверсальной ориентации вектора тяги:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{r}_{\text{cp}} &= \delta, \\ \Delta \dot{L}_{\text{cp}} &= -\frac{3}{2} \Delta r_{\text{cp}}, \\ \dot{l}_x &= \delta - l_y, \\ \dot{l}_y &= l_x.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Управлением является функция знака тяги δ , принимающая значения $\delta = 1$ тяга направлена в положительном трансверсальном направлении, $\delta = 0$ тяга выключена и $\delta = -1$ тяга направлена в отрицательном трансверсальном направлении.

Критерием задачи является минимум моторного времени:

$$t_{\text{мот}} \rightarrow \min$$

при фиксированных затратах общего времени.

2.2.1 Управление вековыми составляющими движения

Выпишем уравнения векового движения при трансверсальной ориентации вектора тяги и дополним их уравнением для затрат моторного времени:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{r}_{\text{cp}} &= \delta, \\ \Delta \dot{L}_{\text{cp}} &= -\frac{3}{2} \Delta r_{\text{cp}}, \\ \dot{t}_{\text{мот}} &= |\delta|.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Граничные условия задачи имеют вид (2.3). Система (2.17) приводится к системе стандартного вида [30] при

$$\begin{aligned}x_1 &= \Delta r_{\text{cp}}, \\ x_2 &= -\frac{2}{3} \Delta L_{\text{cp}}, \\ u &= \delta.\end{aligned}$$

Управление системой (2.17), в терминах x_1 и x_2 , по критерию минимума общего времени, для варианта отсутствия пассивных участков, подробно исследовано в [30]. Оптимальное управление имеет два включения тяги противоположного знака.

Определим оптимальное управление для более общего случая – для критерия минимума моторного времени. Запишем гамильтониан системы (2.17):

$$H = \delta \Psi_{\Delta r_{\text{ср}}} - \frac{3}{2} \Psi_{\Delta L_{\text{ср}}} \Delta r_{\text{ср}} + \Psi_{t_{\text{мотор}}} |\delta|. \quad (2.18)$$

Оптимальное управление определим как релейную функцию времени:

$$\delta_{\text{опт}} = \begin{cases} -1 & \Psi_{\Delta r_{\text{ср}}} < -\Psi_{t_{\text{мотор}}} \\ 0 & -\Psi_{t_{\text{мотор}}} < \Psi_{\Delta r_{\text{ср}}} < \Psi_{t_{\text{мотор}}} \\ 1 & \Psi_{\Delta r_{\text{ср}}} > \Psi_{t_{\text{мотор}}} \end{cases}. \quad (2.19)$$

Таким образом, задача оптимального управления вековыми составляющими относительного движения сведена к двух точечной краевой задаче для системы уравнений (2.17), дополненной уравнениями для сопряжённых переменных (2.6), с оптимальным управлением (2.19) с граничными условиями (2.3). Краевая задача сводится к определению начального значения сопряжённых переменных (2.6).

Анализ оптимального управления (2.19), показывает, что оно определяется знаком сопряжённой переменной $\Psi_{\Delta r_{\text{ср}}}$, которая, согласно первому уравнению системы (2.6), является линейной функцией времени.

Из чего следует, что оптимальная программа в общем случае содержит два активных участка противоположного знака, которые разделены пассивным участком.

Представляется возможным построить аналитические решения. Определим размеры участков знакопостоянства тяги t_1 и t_2 при фиксированной продолжительности пассивного участка $t_{\text{п}}$. Для этого проинтегрируем систему (2.17) на интервале времени от 0 до $t_1 + t_{\text{п}} + t_2$, получим:

$$\begin{aligned} \Delta r_{\text{срк}} &= \Delta r_{\text{ср0}} + \delta (t_1 - t_2), \\ \Delta L_{\text{срк}} &= \Delta L_{\text{ср0}} - \frac{3}{2} \Delta r_{\text{ср0}} (t_1 + t_{\text{п}} + t_2) - \frac{3}{2} \delta \left[\frac{t_1^2 - t_2^2}{2} + t_1 (t_2 + t_{\text{п}}) \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

Оптимальный размер активных участков определим в виде:

$$\begin{aligned} t_1 &= -\delta\Delta r_{\text{cp}_0} - \frac{t_{\text{п}}}{2} + \sqrt{\frac{t_{\text{п}}^2}{4} + \delta\mathbf{L} + \mathbf{R}}, \\ t_2 &= -\delta\Delta r_{\text{cp}_\kappa} - \frac{t_{\text{п}}}{2} + \sqrt{\frac{t_{\text{п}}^2}{4} + \delta\mathbf{L} + \mathbf{R}}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $t_{\text{п}}$ – размер пассивного участка, введены комбинации граничных условий:

$$\mathbf{R} = \frac{\Delta r_{\text{cp}_0}^2 + \Delta r_{\text{cp}_\kappa}^2}{2}, \mathbf{L} = \frac{2}{3} (\Delta L_{\text{cp}_0} - \Delta L_{\text{cp}_\kappa}),$$

δ – знак тяги на первом участке:

$$\delta = \text{sign} \left[\frac{2}{3} (\Delta L_{\text{cp}_0} - \Delta L_{\text{cp}_\kappa}) - \frac{(\Delta r_{\text{cp}_0} - \Delta r_{\text{cp}_\kappa}) |\Delta r_{\text{cp}_0} - \Delta r_{\text{cp}_\kappa}|}{2} \right], \quad (2.22)$$

а на втором он противоположный.

Существует такой размер пассивного участка, при котором размер одного из активных участков оказывается нулевым:

$$\begin{aligned} t_1 = 0 \quad \text{при} \quad t_{\text{п}} &= \frac{\delta\mathbf{L} + \mathbf{R} - \Delta r_{\text{cp}_0}^2}{\delta\Delta r_{\text{cp}_0}}; \\ t_2 = 0 \quad \text{при} \quad t_{\text{п}} &= \frac{\delta\mathbf{L} + \mathbf{R} - \Delta r_{\text{cp}_\kappa}^2}{\delta\Delta r_{\text{cp}_\kappa}}; \end{aligned} \quad (2.23)$$

Размер пассивного участка, определённый по (2.23), обеспечивает минимальные затраты моторного времени, которые оказываются равными:

$$\lim (\min (t_{\text{мот}})) \rightarrow |\Delta r_{\text{cp}_0} - \Delta r_{\text{cp}_\kappa}|. \quad (2.24)$$

Как следует из (2.24), минимальные затраты моторного времени зависят только от граничного условия для среднего смещения вдоль радиуса орбиты.

2.2.2 Управление периодическими составляющими движения

Выпишем уравнения периодического движения при трансверсальной ориентации вектора тяги и дополним их уравнением для затрат моторного времени:

$$\begin{aligned} \dot{l}_x &= \delta - l_y, \\ \dot{l}_y &= x, \\ \dot{t}_{\text{мот}} &= |\delta|. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Граничные условия задачи имеют вид (2.8).

Управление системой (2.25) по критерию минимума общего времени рассмотрено в [30]. Программа содержит последовательное чередование разгонных и тормозных участков.

Определим оптимальное управление для более общего случая – для критерия минимума моторного времени. Запишем гамильтониан системы (2.25) имеет вид:

$$H = \Psi_{l_x} (\delta - l_y) + \Psi_{l_y} l_x + \Psi_{t_{\text{мотор}}} |\delta|. \quad (2.26)$$

Уравнения для сопряжённых переменных имеют вид (2.11).

Оптимальное управление определим как релейную функцию времени:

$$\delta_{\text{опт}} = \begin{cases} -1 & \Psi_{l_x} < -\Psi_{t_{\text{мотор}}} \\ 0 & -\Psi_{t_{\text{мотор}}} < \Psi_{l_x} < \Psi_{t_{\text{мотор}}} \\ 1 & \Psi_{l_x} > \Psi_{t_{\text{мотор}}} \end{cases}. \quad (2.27)$$

Таким образом, задача оптимального управления вековыми составляющими относительного движения сведена к двух точечной краевой задаче для системы уравнений (2.25), дополненной уравнениями для сопряжённых переменных (2.11), с оптимальным управлением (2.27) с граничными условиями (2.8). Краевая задача сводится к определению начального значения сопряжённых переменных (2.11).

Анализ оптимального управления (2.27), показывает, что оно определяется знаком сопряжённой переменной Ψ_{l_x} , которая, согласно первому уравнению системы (2.11), является гармонической функцией времени.

Из чего следует, что оптимальная программа (2.27) содержит на витке три активных участка разного знака, которые разделены двумя пассивными участками. Количество витков коррекции зависит от граничных условий.

Представляется возможным оценить минимальные затраты моторного времени. Пусть выполнено условие $l_0 \gg 1$, тогда, можно записать:

$$\dot{l} = \delta \cos \varphi, \quad (2.28)$$

$$\dot{\varphi} = 1.$$

Из (2.28) следует, что $\varphi(t) = \varphi_0 + t$, а уравнения для малой полуоси эллипса относительного движения запишем в виде:

$$\dot{l} = \delta \cos(\varphi_0 + t),$$

Приращение малой полуоси за виток, при оптимальном управлении, составит:

$$|l_0 - l_k| = 4N \sin \frac{t_{\text{мот}}}{4N},$$

где N – число витков коррекции. Затраты моторного времени и затраты общего времени можно определить в виде:

$$t_{\text{мот}} = 4N \arcsin \frac{|l_0 - l_k|}{4N},$$

$$t_{\text{общ}} = 2\pi N.$$

Зависимость затрат моторного времени от общего запишем в виде:

$$t_{\text{мот}}(t_{\text{общ}}) = \frac{2t_{\text{общ}}}{\pi} \arcsin \pi \frac{|l_0 - l_k|}{2t_{\text{общ}}}. \quad (2.29)$$

Минимальная продолжительность коррекции составит:

$$t_{\text{общ}} = \pi \frac{|l_0 - l_k|}{2t_{\text{общ}}}.$$

Как следует из (2.29), по мере увеличения затрат общего времени, затраты моторного времени уменьшаются, считая $t_{\text{общ}}$ бесконечно большим, то величина под арксинусом в (2.29) становится малой, и можно записать:

$$\lim (\min (t_{\text{мот}})) \rightarrow |l_0 - l_k|. \quad (2.30)$$

Как следует из (2.30), минимальные затраты моторного времени зависят от модуля приращения малой полуоси эллипса относительного движения.

2.2.3 Оптимальное управление относительным движением с трансверсальной ориентацией вектора тяги

Выпишем уравнения относительного движения при трансверсальной ориентации вектора тяги и дополним их уравнением для затрат моторного времени.:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r}_{\text{ср}} &= \delta, \\ \Delta \dot{L}_{\text{ср}} &= -\frac{3}{2} \Delta r_{\text{ср}}, \\ \dot{l}_x &= \delta - l_y, \\ \dot{l}_y &= l_x, \\ \dot{t}_{\text{мот}} &= |\delta|. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Граничные условия задачи имеют вид (2.13). В соответствии с общим алгоритмом принципа максимума Понтрягина, запишем Гамильтониан системы (2.31):

$$H = \Psi_{\Delta r_{\text{cp}}} \delta - \Psi_{\Delta L_{\text{cp}}} \frac{3}{2} \Delta r_{\text{cp}} + \Psi_{l_x} (\delta - l_y) + \Psi_{l_y} l_x + \Psi_{t_{\text{мот}}} |\delta|. \quad (2.32)$$

Уравнения для сопряжённых множителей имеют вид (2.6) и (2.11). Оптимальное управление определим как максимум Гамильтониана (2.32), получим:

$$\delta_{\text{опт}} = \begin{cases} -1 & \Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{\text{cp}}} < -\Psi_{t_{\text{мот}}} \\ 0 & -\Psi_{t_{\text{мот}}} < \Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{\text{cp}}} < \Psi_{t_{\text{мот}}} \\ 1 & \Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{\text{cp}}} > \Psi_{t_{\text{мот}}} \end{cases}. \quad (2.33)$$

Таким образом, задача оптимального управления относительным движением с трансверсальной ориентацией вектора тяги сведена к двух точечной краевой задаче для системы уравнений (2.31), дополненной уравнениями для сопряжённых переменных (2.6) и (2.11), с оптимальным управлением (2.33) с граничными условиями (2.13). Краевая задача сводится к определению начального значения сопряжённых переменных (2.6) и (2.11).

2.2.4 Численное решение задач оптимального управления

При формировании численной процедуры определения оптимального управления центральной проблемой является сходимость краевой задачи. Для рассматриваемого круга задач был использован подход, связанный со сведением краевой задачи к поиску минимума функции невязок:

$$F = c_1 (\Delta r_{\text{cp}}^* - \Delta r_{\text{cpк}})^2 + c_2 (\Delta L_{\text{cp}}^* - \Delta L_{\text{cpк}})^2 + c_3 (l_x^* - l_{xк})^2 + c_4 (l_y^* - l_{yк})^2.$$

где параметры, отмеченные звёздочкой, получались в ходе численного интегрирования дифференциальных уравнений, c_i – весовые коэффициенты.

Минимум функции невязок определялся градиентным методом, итерационная формула которого имеет вид:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \gamma \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}_i),$$

где \mathbf{x}_i – вектор неизвестных, γ – константа, задающая величину шага в направлении антиградиента, $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$ – компоненты вектора градиента функции \mathbf{F} , i – номер итерации.

Основную сложность при решении краевой задачи вызывает выбор начального приближения для сопряжённых переменных. Предложен подход, на первом этапе предусматривающий решение задач поэтапного управления, и на втором, используя решение задач поэтапного управления как начальное приближение, решение задач совместного управления.

Рассмотрим решение задач управления в области граничных условий, показанных в таблице 2.1, фазовый угол φ_0 принят равным нулю, конечные условия движения нулевые – $\Delta r_{\text{ср}} = \Delta L_{\text{ср}} = l_x = l_y = 0$. Введены граничные условия соответствующие доминированию требования коррекции периодического движения (вариант А), доминированию требования коррекции векового движения (варианта в) и их сопоставимому изменению (вариант Б).

Граничные условия, показанные в таблице 2.1, приведём к безразмерному виду. Расчёт выполним для величины ускорения маневрирующего КА массой 4000 кг и имеющего двигатель конечной тяги в 0,08 Н. Угловая скорость на опорной орбите (геостационарная орбита) равна $\lambda = 7,292118 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, параметр $K = 18,805835 \text{ км}$. Безразмерные начальные условия движения покажем в таблице 2.2.

Другая сложность связана с выбором весовых коэффициентов. Попытка решения задачи без весовых коэффициентов показала, что, в зависимости от сочетания граничных условий (доминирование векового или периодического движения), в первую очередь удовлетворяется граничное условие для доминирующей составляющей относительного движения, а удовлетворение оставшихся граничных условий происходит очень медленно. В связи с чем были введены весовые коэффициенты, которые «ослабляют» невязку по доминирующему граничному условию. Эвристически установлено, что при доминировании требования коррекции векового движения $c_2 = 0.001$, при доминировании требования коррекции периодического движения $c_3 = c_4 = 0.001$.

Таблица 2.1 – Размерные начальные условия движения

	Вариант "А"	Вариант "Б"	Вариант "В"
	$ l_0 - l_k \gg \Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k} $	$ l_0 - l_k \approx \Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k} $	$ \Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k} \gg l_0 - l_k $
1	$\Delta r_{cp_0} = 34, 1325$ $\Delta L_{cp_0} = 2557, 5888$ $l_0 = 188, 058$	$\Delta r_{cp_0} = 341, 3253$ $\Delta L_{cp_0} = 25575, 888$ $l_0 = 94, 029$	$\Delta r_{cp_0} = 682, 6505$ $\Delta L_{cp_0} = 51151, 776$ $l_0 = 37, 6116$
2	$\Delta r_{cp_0} = 34, 1325$ $\Delta L_{cp_0} = 2557, 5888$ $l_0 = 282, 087$	$\Delta r_{cp_0} = 341, 3253$ $\Delta L_{cp_0} = 25575, 888$ $l_0 = 376, 116$	$\Delta r_{cp_0} = 682, 6505$ $\Delta L_{cp_0} = 51151, 776$ $l_0 = 94, 029$

Таблица 2.2 – Безразмерные начальные условия движения

	Вариант "А"	Вариант "Б"	Вариант "В"
	$ l_0 - l_k \gg \Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k} $	$ l_0 - l_k \approx \Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k} $	$ l_0 - l_k \ll \Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k} $
1	$\Delta r_{cp_0} = 1.815$ $\Delta L_{cp_0} = 136$ $l_0 = 10$	$\Delta r_{cp_0} = 18.15$ $\Delta L_{cp_0} = 1360$ $l_0 = 5$	$\Delta r_{cp_0} = 36.3$ $\Delta L_{cp_0} = 2720$ $l_0 = 2$
2	$\Delta r_{cp_0} = 1.815$ $\Delta L_{cp_0} = 136$ $l_0 = 15$	$\Delta r_{cp_0} = 18.15$ $\Delta L_{cp_0} = 1360$ $l_0 = 20$	$\Delta r_{cp_0} = 36.3$ $\Delta L_{cp_0} = 2720$ $l_0 = 5$

Рассмотрим решение задачи **управления вековыми составляющими движения** для граничных условий 1А, 1Б и 1В по таблице 2.2. На рисунке 2.1 показано множество решений задачи с разным моторным и общим временем, на рисунке 2.2 показан пример траекторий движения, на рисунке 2.3 и 2.4 показан пример оптимального управления при свободной и трансверсальной ориентации тяги соответственно.

На рисунках настоящего пункта красный цвет соответствует трансверсальной ориентации тяги, синий – свободной, чёрный цвет соответствует пассивному участку.

Как следует из рисунка 2.1 уменьшение критерия задачи (моторное время) при использовании свободной ориентации тяги составляет величину менее 3%. Наибольшая выгода от использования свободной ориентации тяги достигается при сравнительно «малых» граничных условиях, которые соответствуют условиям «а» по таблице 2.2.

Как следует из рисунка 2.2, наибольшее отличие траекторий со свободной и трансверсальной тягой приходится на окрестность переключения знака тяги при её трансверсальной ориентации или на окрестность перехода угла отклонения тяги от трансверсального направления с 0 до 180 градусов при её свободной ориентации.

Как следует из рисунка 2.3, а также (2.5) и (2.6), оптимальное управление определяется арккотангенсом линейной функцией времени, а оптимальный угол ориентации тяги изменяется от нуля до π (в других случаях граничных условий от π до нуля) по «ступенчатому» закону. На большей части траектории угол отклонения тяги близок к 0 градусам, что соответствует разгонному участку при её трансверсальной ориентации, или к 180 градусам, что соответствует тормозному участку при её трансверсальной ориентации.

Пассивный участок на траектории появляется при выполнении условия $F < 0$. Так как функция F согласно (2.5) и (2.6), является корнем из квадрата линейной функции времени, то пассивный участок на траектории единственен и появляется в точки перегиба функции F .

Как следует из рисунка 2.4, оптимальное управление в случае трансверсальной ориентации тяги определяется знаком линейной функции времени и содержит, в общем случае, два участка постоянства знака тяги, а в случае траектории с минимальными затратами моторного времени (t_3 на рисунке 2.2) один из активных участков может отсутствовать.

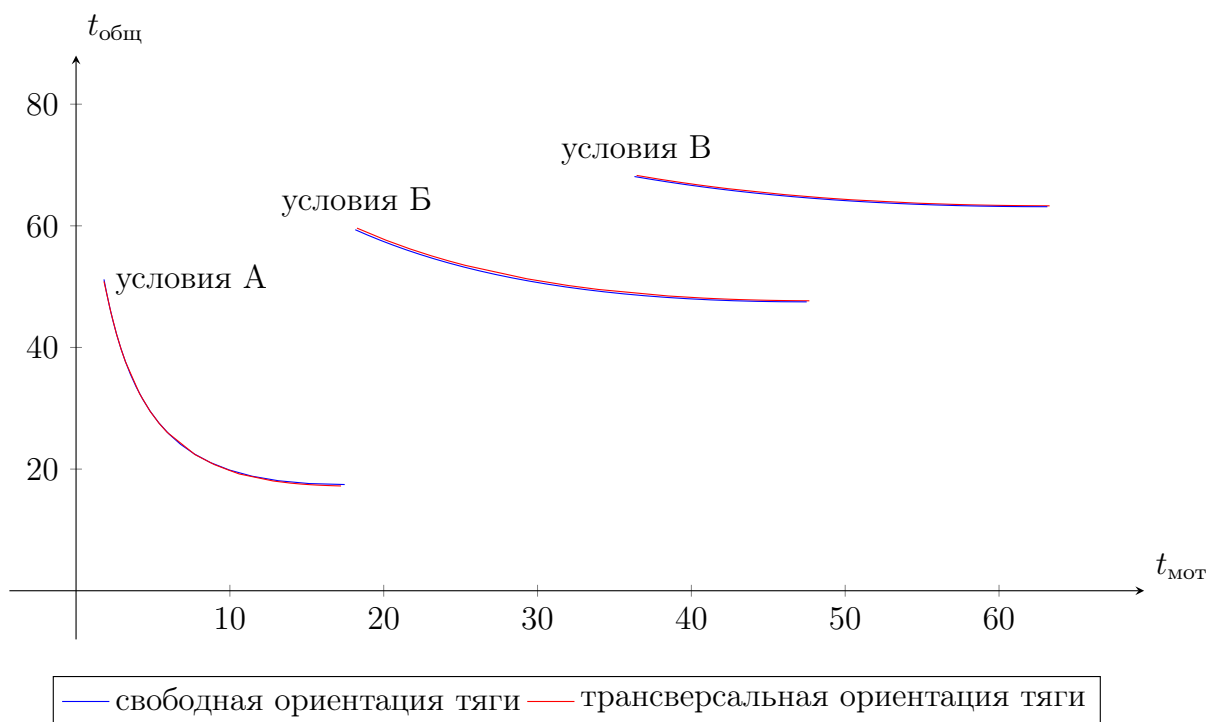


Рисунок 2.1 – Множества решений задач для граничных условий «б» по таблице 2.2 в части векового движения

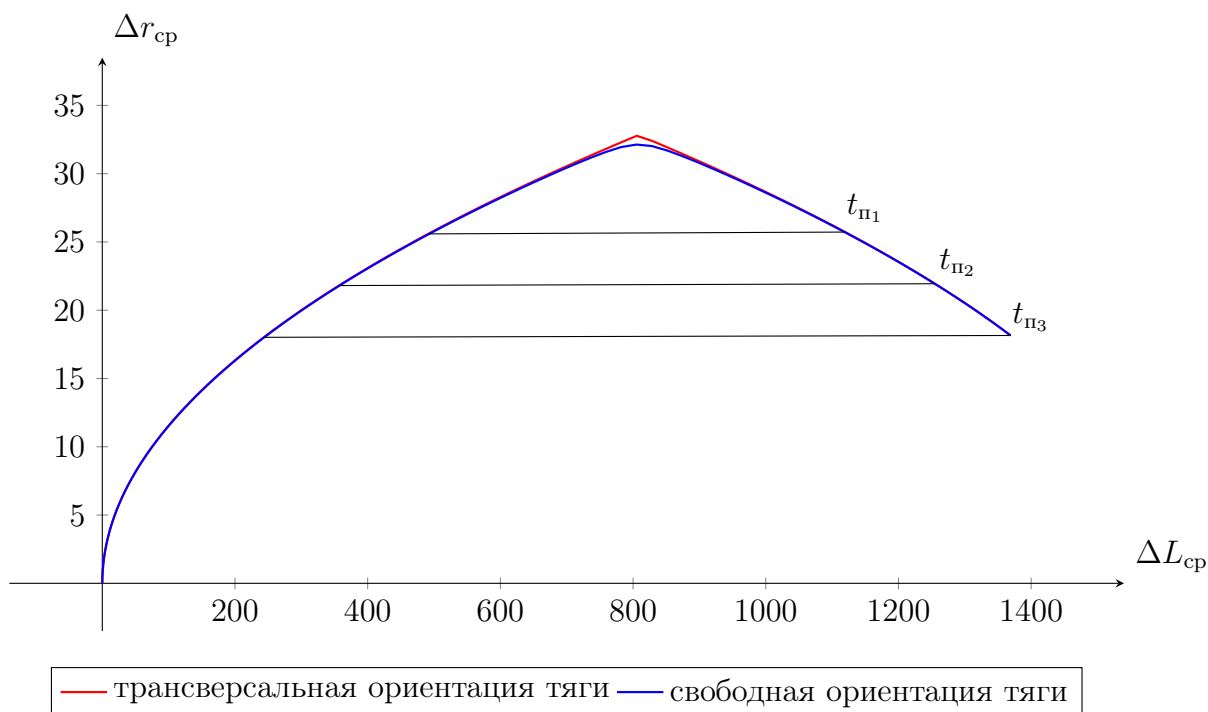
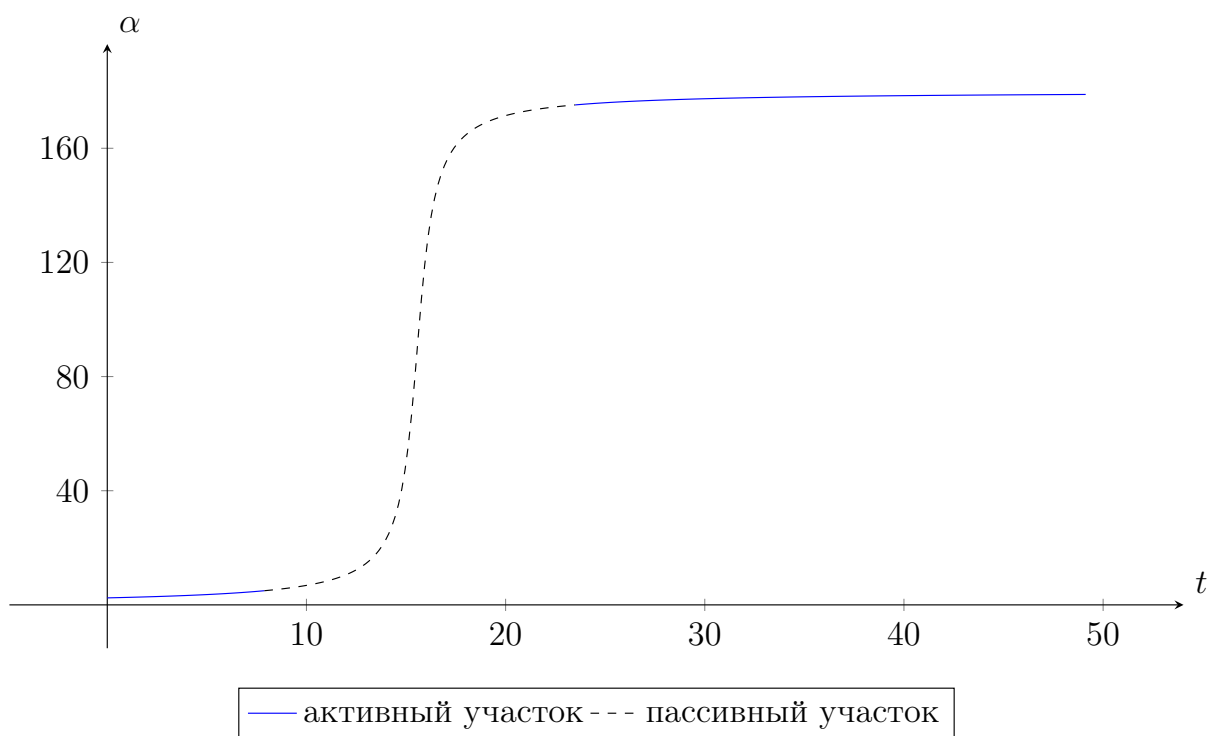
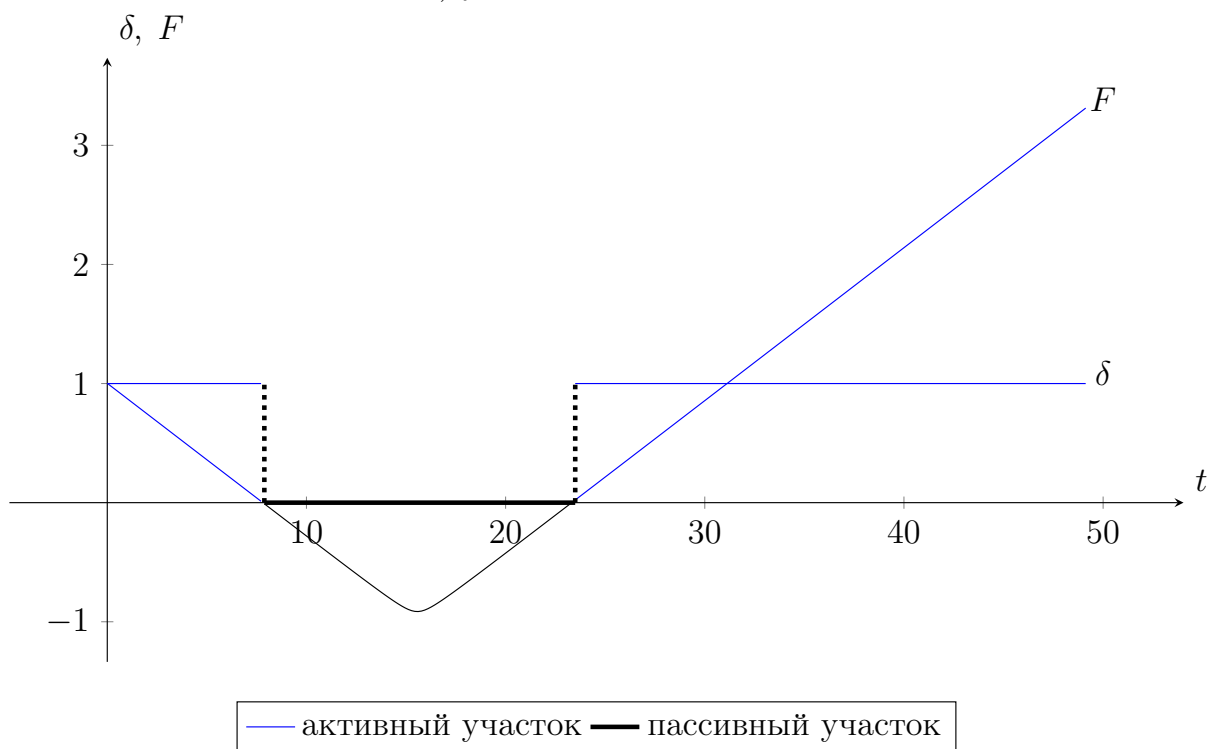


Рисунок 2.2 – Примеры траекторий для граничных условий «б» по таблице 2.2 в части векового движения



а) угол отклонения тяги α



б) функция включения тяги β

Рисунок 2.3 – Пример оптимального управления для граничных условий «б» по таблице 2.2 в части векового движения при свободной ориентации тяги

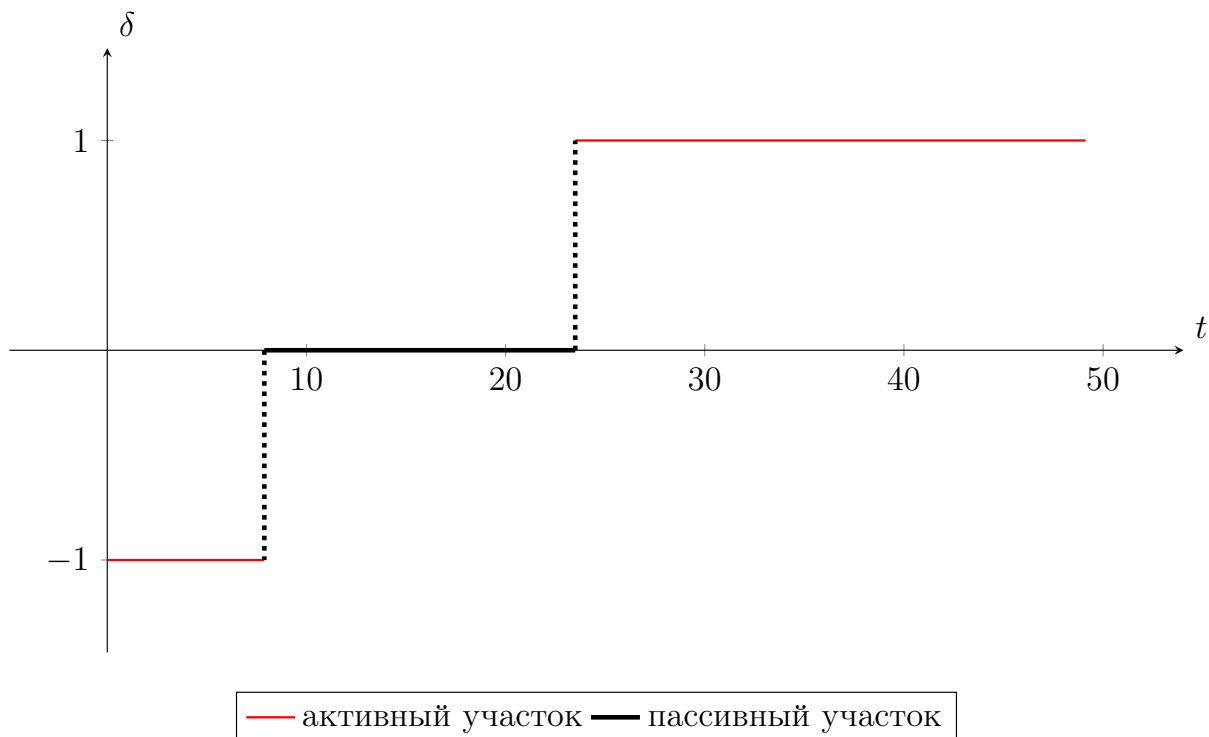


Рисунок 2.4 – Пример оптимального управления (функция включения тяги $\delta_{\text{опт}}$) для граничных условий «б» по таблице 2.2 в части векового движения при трансверсальной ориентации тяги

Рассмотрим решение задачи управления **периодическими составляющими движения** для граничных условий 1Б, 1В по таблице 2.2. На рисунке 2.5 показано множество решений задачи с разным моторным и общим временем. На рисунке 2.6 и 2.7 показана структура оптимального управления на витке со свободной и трансверсальной тягой. На рисунке 2.8 показан пример оптимальной траектории.

Как следует из рисунка 2.5, уменьшение критерия задачи (моторное время) при использовании свободной ориентации тяги составляет величину порядка 3 – 5%. Наибольшая выгода от использования свободной ориентации тяги достигается при сравнительно больших начальных малых полуосях эллипса относительного движения.

Как следует из рисунка 2.6, а также (2.10) и (2.11), оптимальное управление определяется знаком гармонической функции времени, на витке расположены два включения тяги, центры которых расположены в апсидальных точках. Тяга выключается при выполнении условия $\Psi_{l_x} < 1$, а её знак определяется знаком Ψ_{l_x} .

Как следует из рисунка 2.7а, а также (2.10) и (2.11), оптимальное управление определяется арктангенсом гармонической функции времени, на витке расположены два включения тяги, центры которых расположены в апсидальных точках, что

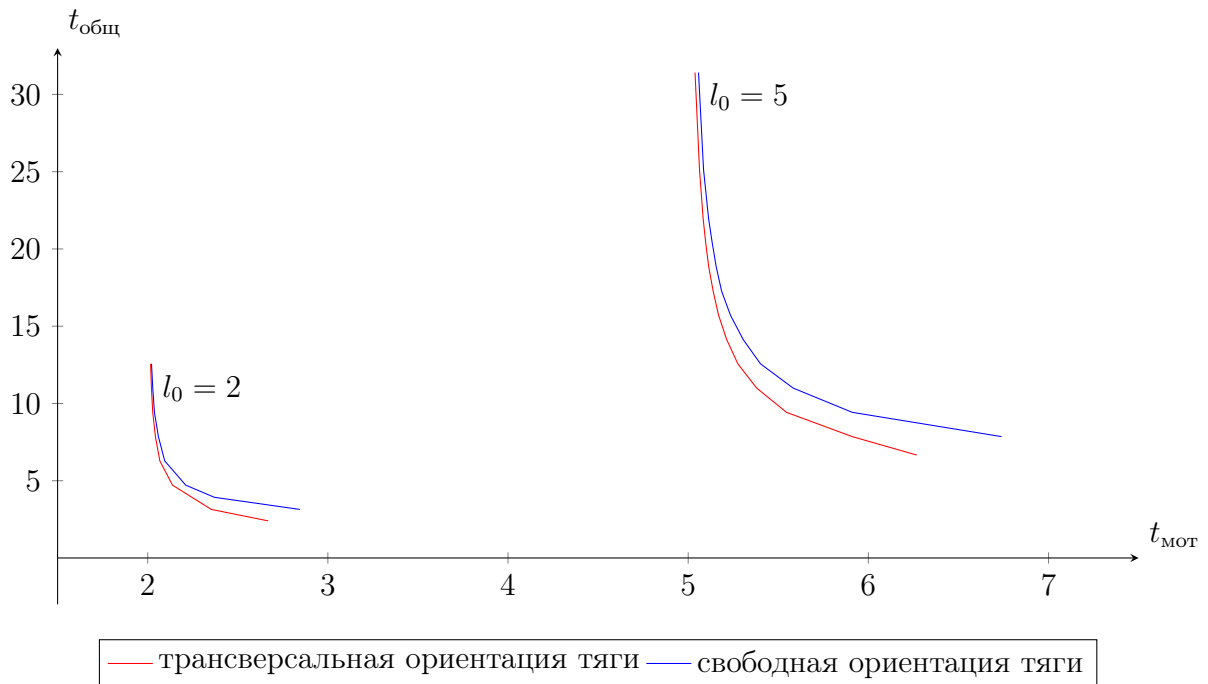


Рисунок 2.5 – Множества решений задач для граничных условий «1б» и «1в» по таблице 2.2 в части периодического движения

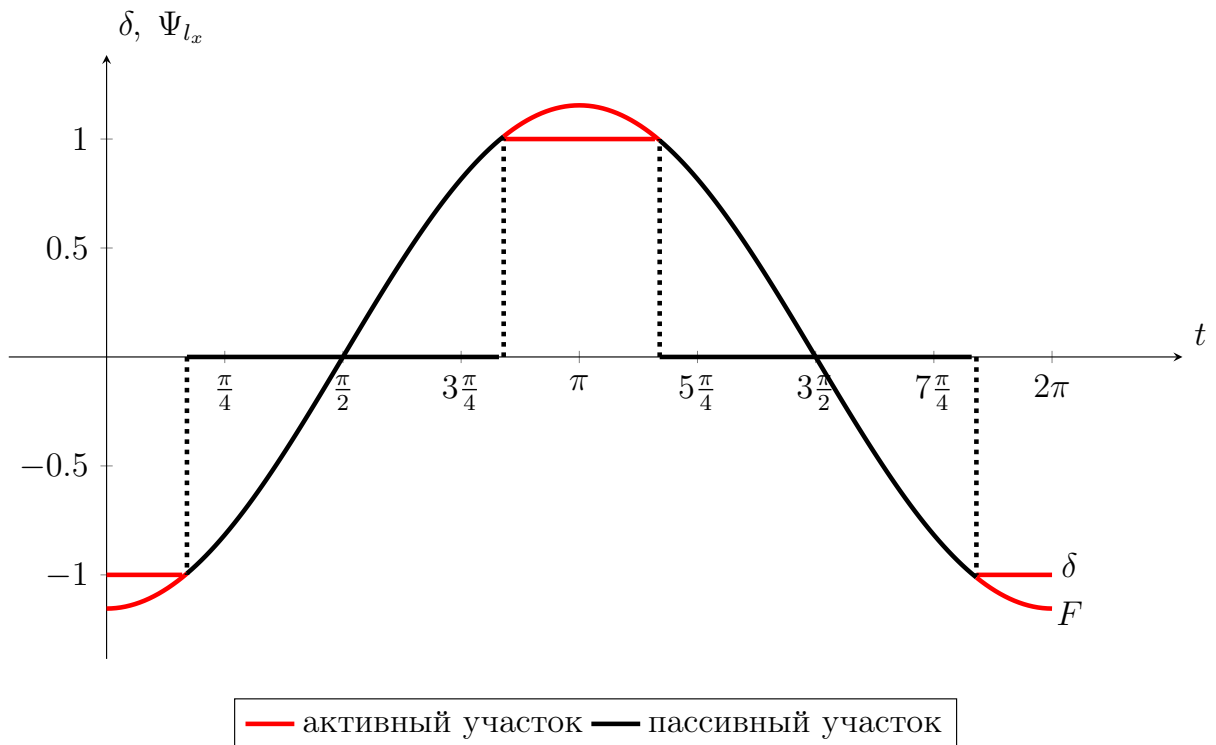
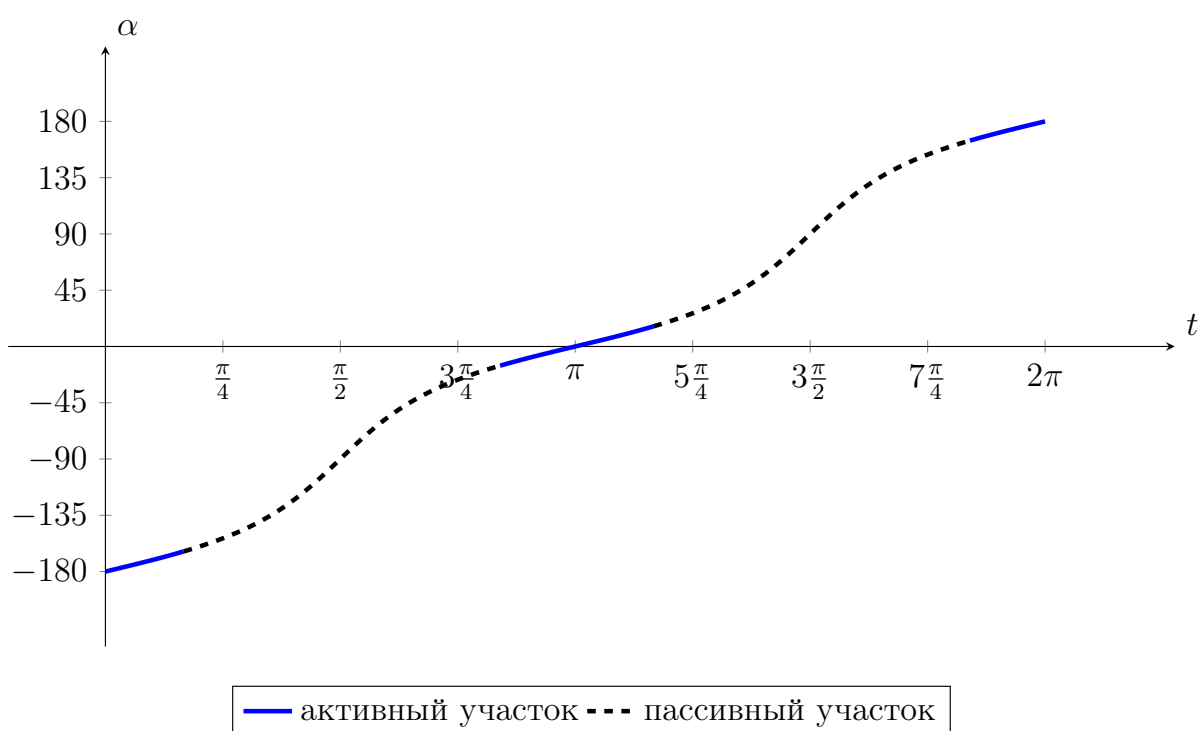
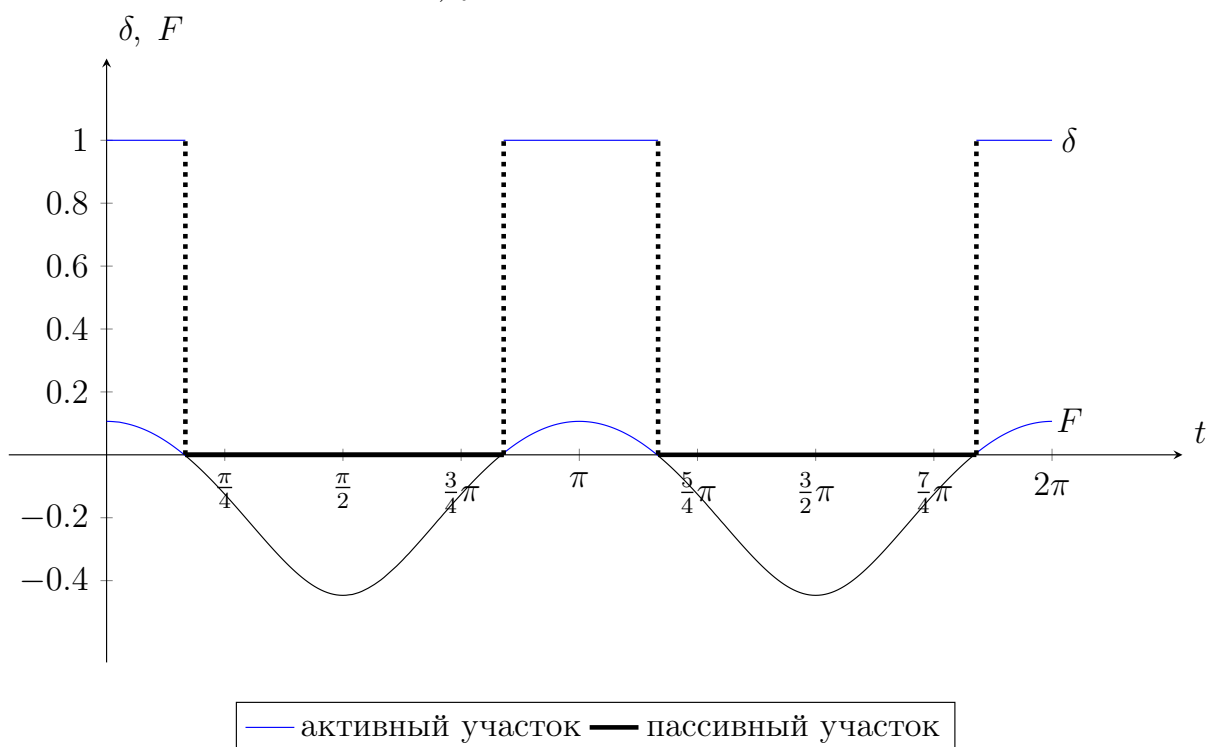


Рисунок 2.6 – Пример оптимального управления (функция включения тяги δ) для граничных условий «1б» по таблице 2.2 в части периодического движения при трансверсальной ориентации тяги



а) угол отклонения тяги α



б) функция включения тяги β

Рисунок 2.7 – Пример оптимального управления для граничных условий «б» по таблице 2.2 в части периодического движения при свободной ориентации тяги

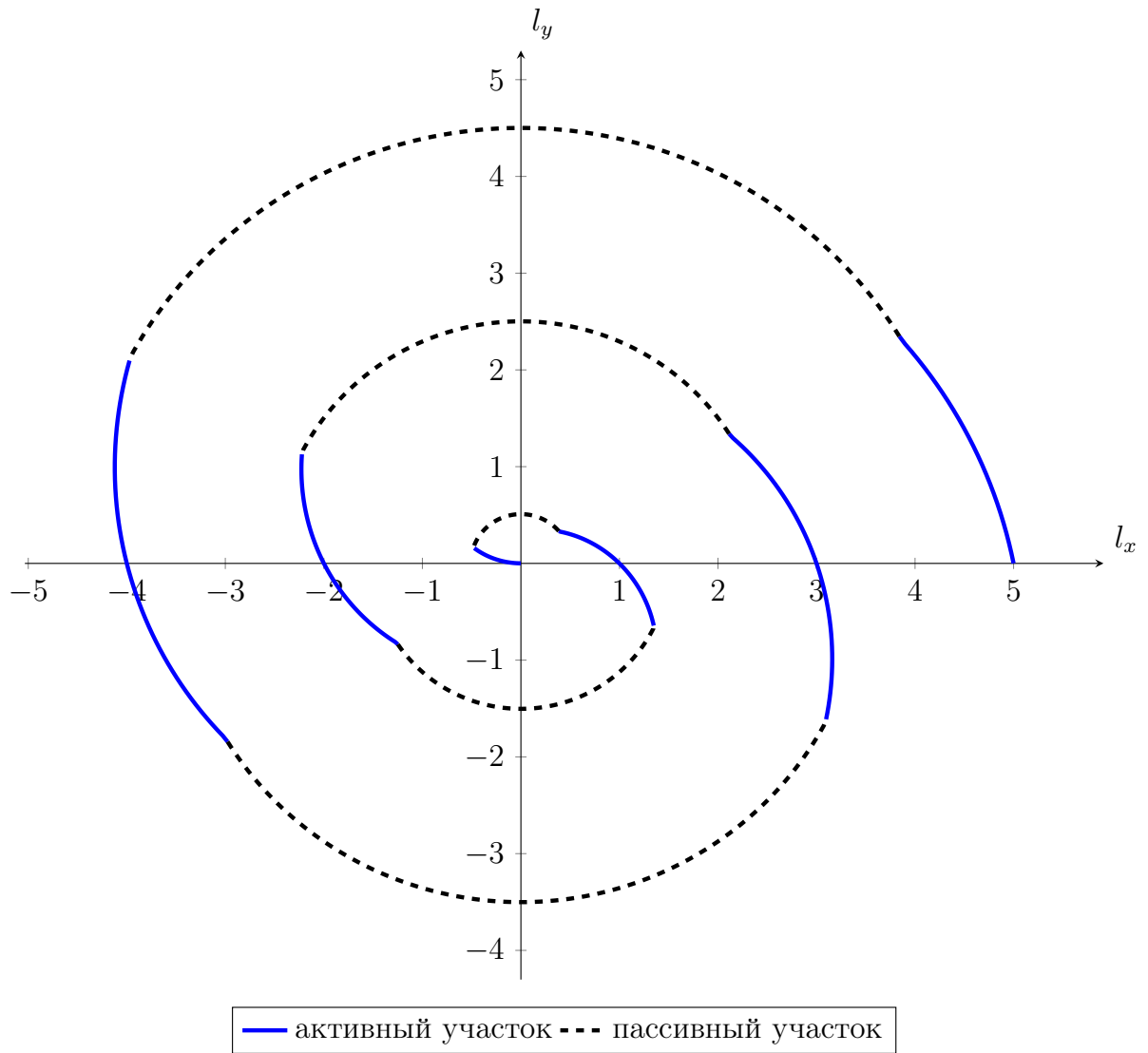


Рисунок 2.8 – Пример оптимальной траектории для граничных условий «1б» по таблице 2.2 в части периодического движения при свободной ориентации тяги

теоретически подтверждается функцией F (2.10), которая, согласно (2.11), является гармонической функцией времени и достигает максимума и минимума в точках 0 и π .

Пассивный участок на траектории (рисунок 2.7б) появляется при выполнении условия $F < 0$. Так как в функцию F входит корень из суммы квадрата синуса и учетверённый квадрат косинуса времени, то на витке возможно не более двух пассивных участков и соответственно двух включений тяги.

На рисунке 2.8 приблизительно треть времени занимают активные участки, оставшаяся часть пассивные. При увеличении общего времени манёвра продолжительности активных участков уменьшается, пассивных увеличивается. Количество включений тяги на траектории также увеличивается. Неизменной остаётся структура управления на витке.

Рассмотрим решение задачи **управления относительным движением** для граничных условий из таблицы 2.2. На рисунке 2.9 показано множество решений задачи с разным моторным и общим временем. На рисунке 2.9 цифрами обозначены некоторые пределы затраты моторного времени:

1. цифрой «1» обозначено $t_{\text{мот}} = |l_0 - l_k| = 10$, что соответствует граничным условия «1а» в части размера малой полуоси эллипса относительного движения;
2. цифрой «2» обозначено $t_{\text{мот}} = |l_0 - l_k| = 15$, что соответствует граничным условия «2а» в части размера малой полуоси эллипса относительного движения;
3. цифрой «3» обозначено $t_{\text{мот}} = |\Delta r_{\text{ср}0} - \Delta r_{\text{ср}к}| = 18, 15$, что соответствует граничным условия «б» в части изменения среднего смещения вдоль радиуса орбиты;
4. цифрой «4» обозначено $t_{\text{мот}} = |\Delta r_{\text{ср}0} - \Delta r_{\text{ср}к}| = 36, 3$, что соответствует граничным условия «в» в части изменения среднего смещения вдоль радиуса орбиты.

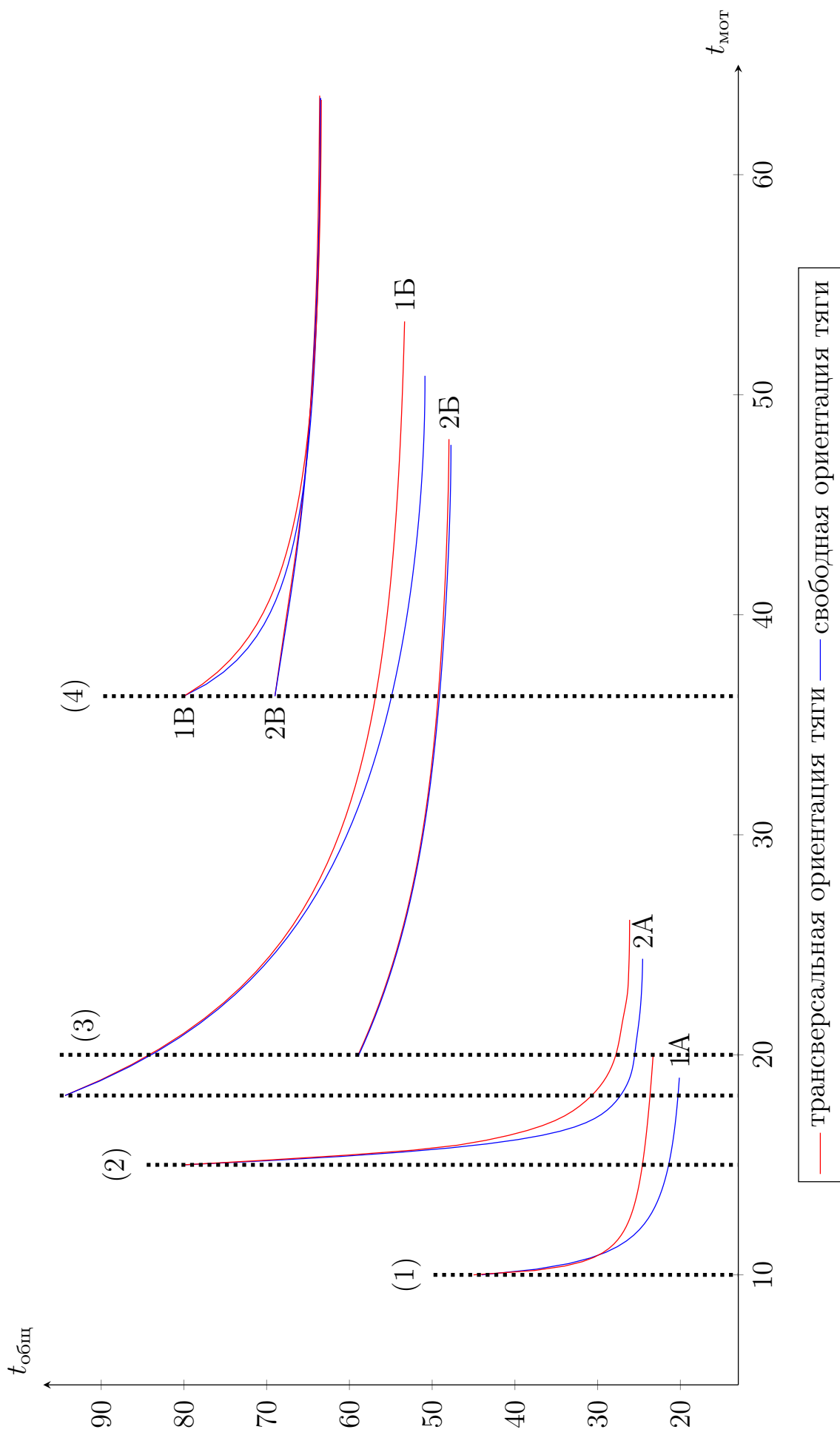


Рисунок 2.9 – Зависимостей критериев задачи для граничных условий из таблицы 2.2

Как следует из рисунка 2.9, затраты моторного времени ограничены справа задачей быстрогодействия, а слева их предельным значением, стремящемся к:

1. Если выполнено условие $|l_0 - l_k| > |\Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k}|$ (вариант граничных условий «а» по таблице 2.2, на рисунке 2.9 отмечено вертикальными линиями 1 и 2), то

$$\lim (\min (t_{\text{мот}})) \rightarrow |l_0 - l_k|.$$

2. Если выполнено условие $|\Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k}| > |l_0 - l_k|$ (вариант граничных условий «б» и «в» по таблице 2.2, на рисунке 2.9 отмечено вертикальными линиями 3 и 4), то

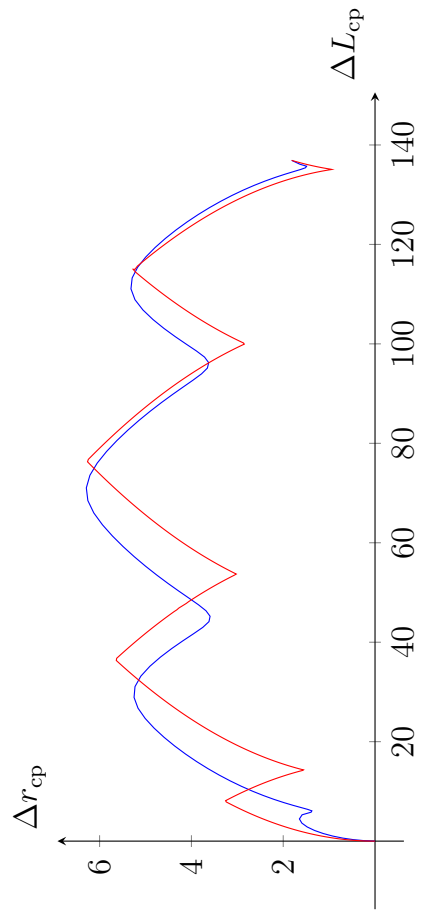
$$\lim (\min (t_{\text{мот}})) \rightarrow |\Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k}|.$$

Предельные затраты моторного времени для общего случая определяются как

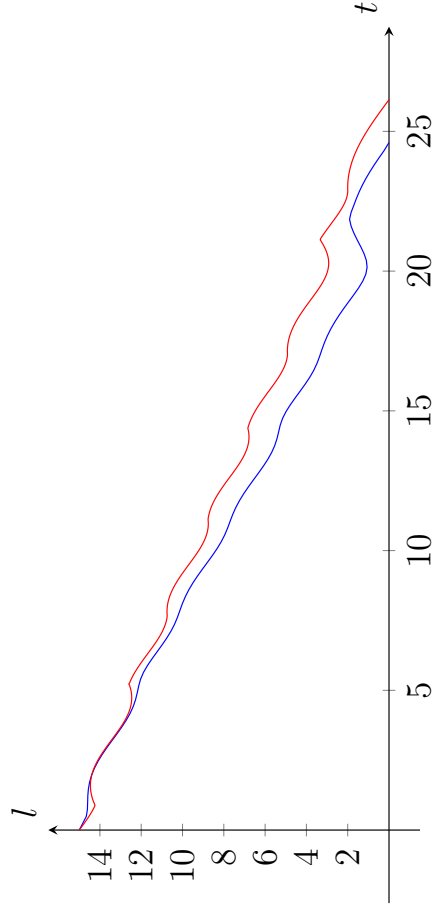
$$\lim (\min (t_{\text{мот}})) \rightarrow \max (|\Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k}|, |l_0 - l_k|).$$

Использование свободной ориентации тяги позволяет уменьшить затраты моторного времени, по сравнению с трансверсальной тягой на 10 – 15 % при доминировании коррекции периодического движения, на 3 – 5 % при сопоставимых граничных условиях для векового и периодического движения и менее чем на 1% при доминировании коррекции векового движения.

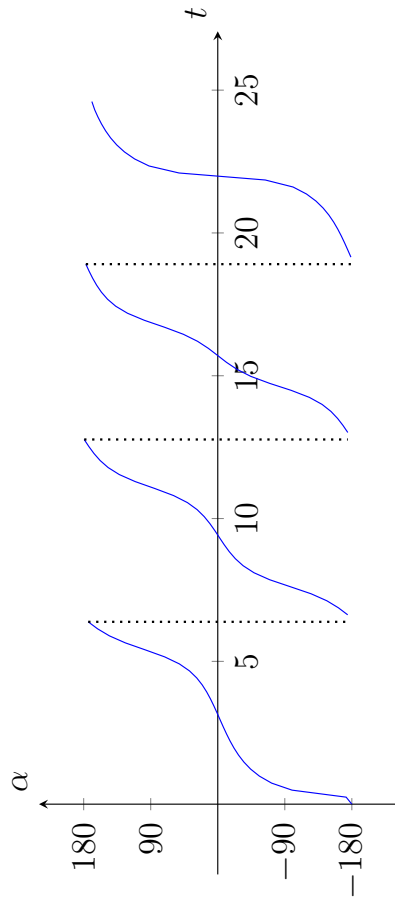
На рисунках 2.10 и 2.11 показаны траектории и оптимальное управление для граничных условий 2А, на рисунках 2.12 – 2.15 для граничных условий 1Б и на рисунках 2.16 – 2.19 для граничных условий 2Б.



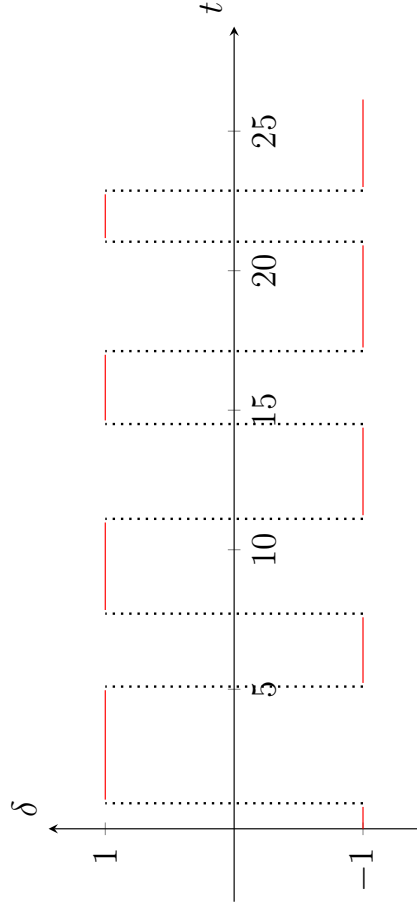
а) траектория векового движения



б) малая полуось эллипса относительного движения

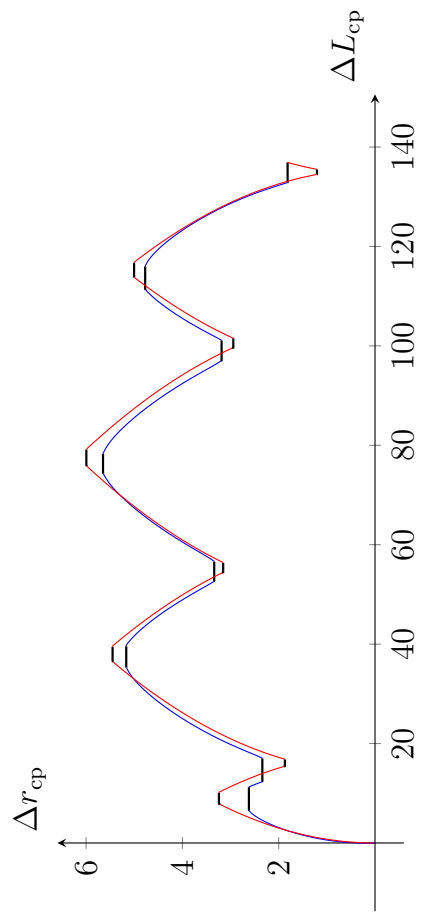


в) оптимальный угол отклонения тяги

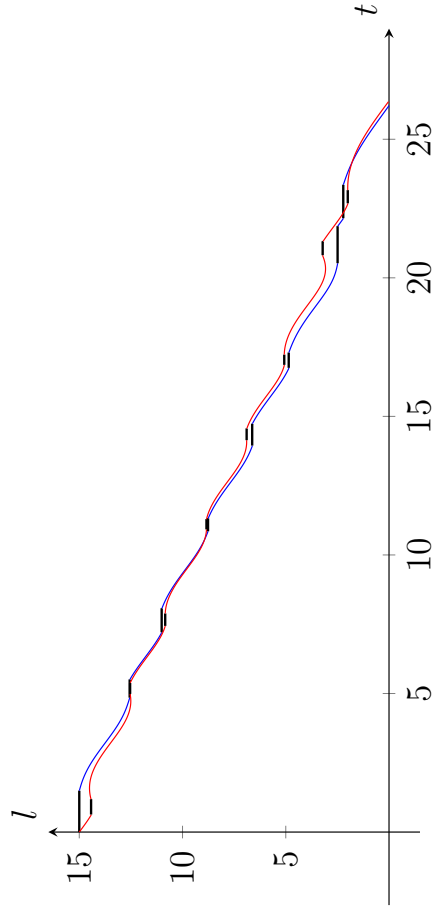


г) оптимальная функция включения тяги

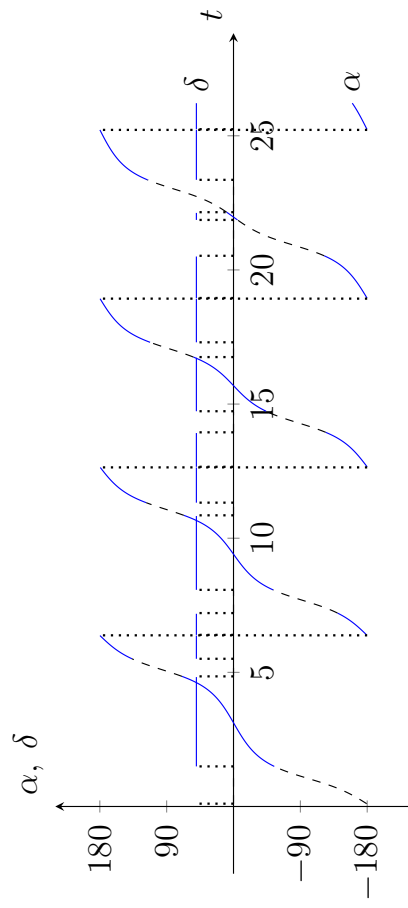
Рисунок 2.10 – Пример траекторий и оптимального управления в задаче быстрогодействия при доминировании требования коррекции периодического движения



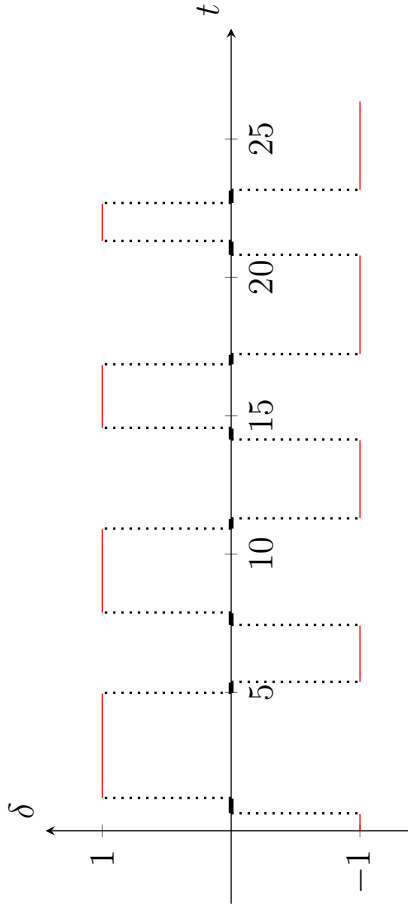
а) траектория векового движения



б) малая полуось эллипса относительного движения



в) оптимальный угол отклонения тяги



г) оптимальная функция включения тяги

Рисунок 2.11 – Пример траекторий и оптимального управления в задаче о минимуме моторного времени при доминировании требования коррекции периодического движения

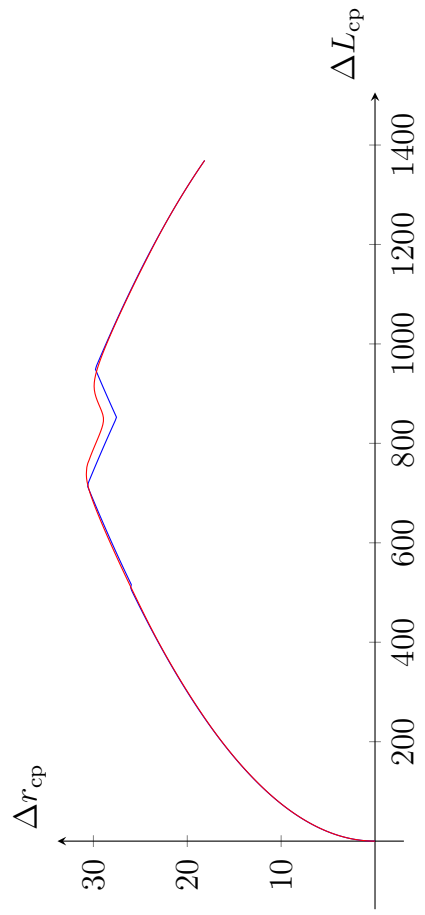
Рассмотрим траектории и управления при доминировании требования коррекции периодического движения в задаче быстрогодействия (рисунок 2.10).

Угол отклонения тяги α (рисунок 2.10в) изменяется от минус до плюс 180 градусов, что характерно для задачи оптимального управления малой полуосью эллипса относительного движения со свободной ориентацией тяги. Оптимальная функция включения тяги δ (рисунок 2.10г) последовательно чередуется между плюс и минус единицей, что соответствует ориентации вектора тяги в положительном и отрицательном направлении.

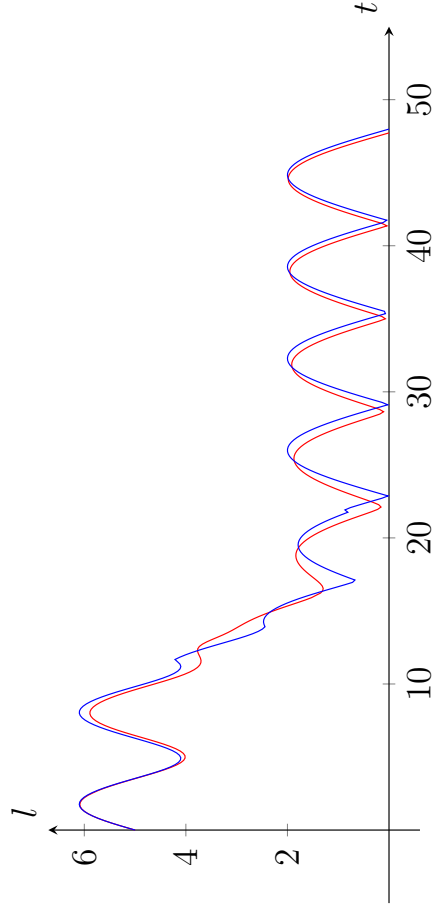
Оптимальная траектория векового движения (рисунок 2.10а) представляет собой пилообразную кривую, так как знак тяги переключается между положительным и отрицательным трансверсальным направлением или близок к ± 180 градусам при свободной ориентации тяги.

Оптимальная зависимость малой полуоси эллипса относительного движения (рисунок 2.10б) от времени практически монотонна, за исключением заключительного участка траектории, где появляется участок её увеличения, что объясняется одновременной "подгонкой" векового и периодического движения.

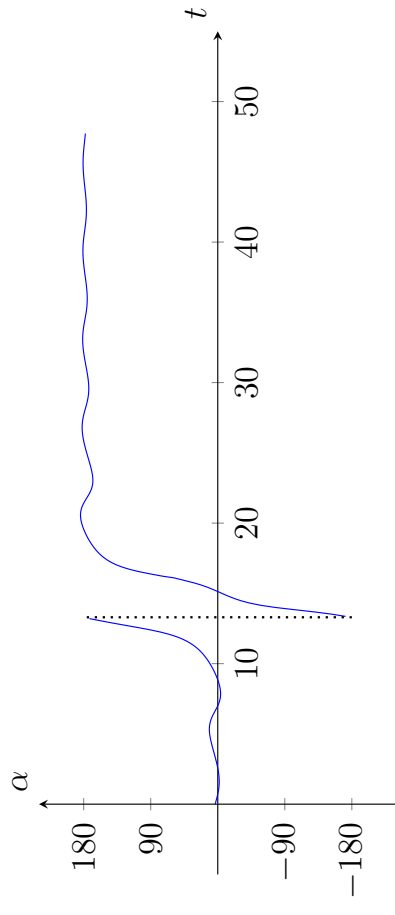
При минимальных затратах моторного времени (рисунок 2.11) в пассивные участки уходят части траектории, на которых происходит увеличение малой полуоси эллипса относительного движения в задаче быстрогодействия, приходящиеся на «макушки» траектории векового движения (рисунок 2.11а).



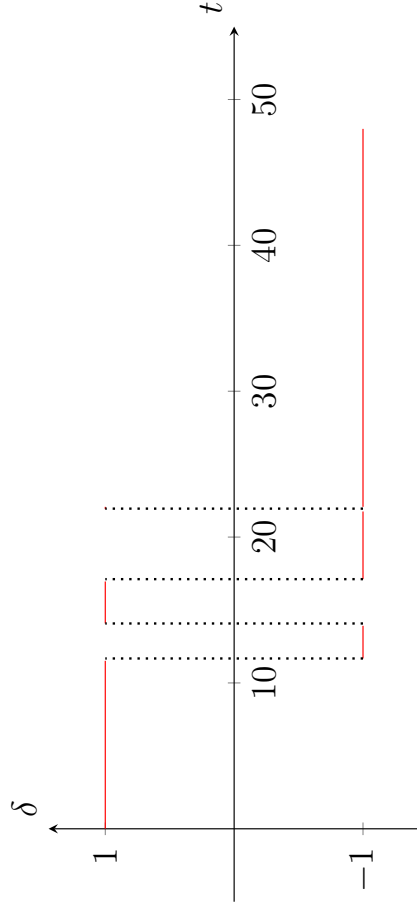
а) траектория векового движения



б) малая полуось эллипса относительного движения

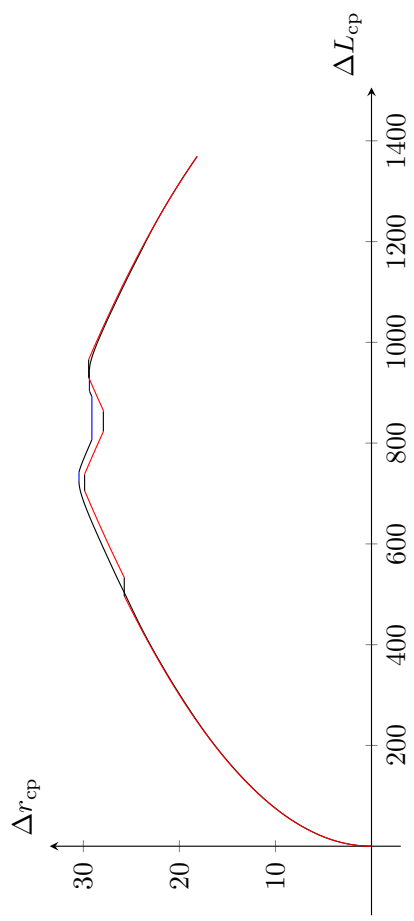


в) оптимальный угол отклонения тяги

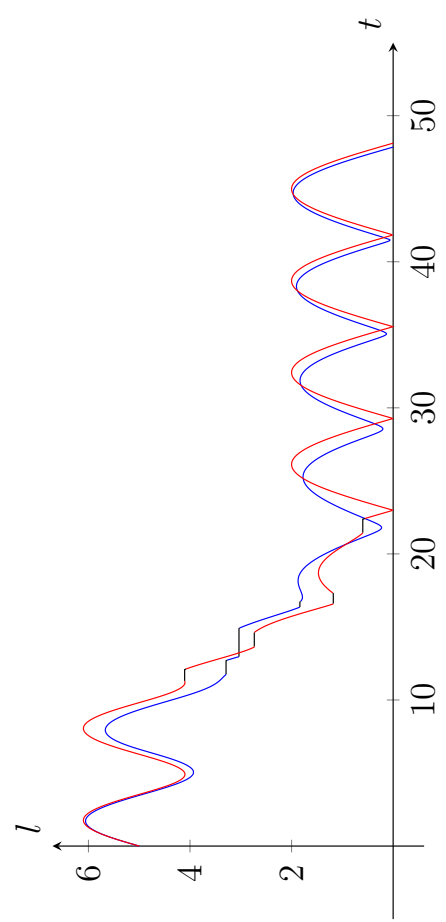


г) оптимальная функция включения тяги

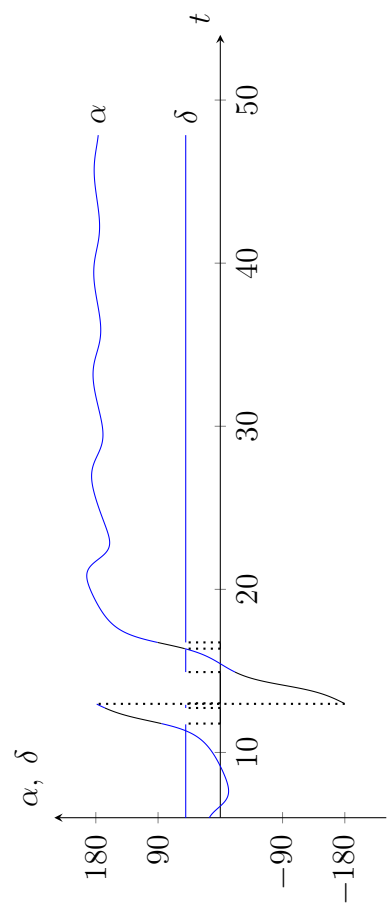
Рисунок 2.12 – Пример траекторий и оптимального управления в задаче быстрогодействия при доминировании требования коррекции векового движения



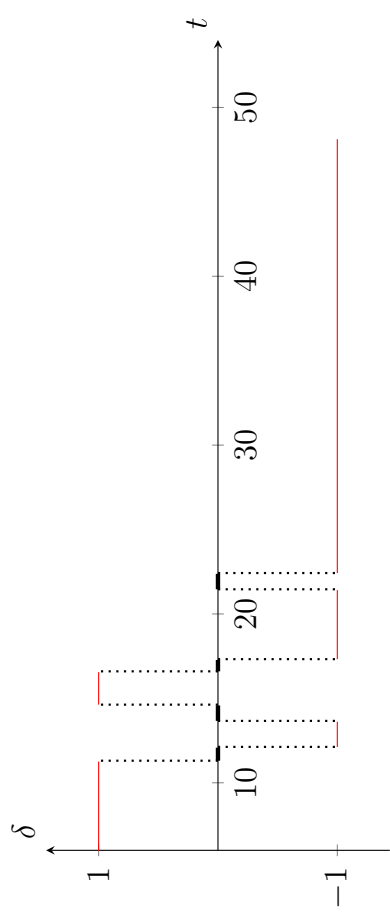
а) траектория векового движения



б) малая полуось эллипса относительного движения

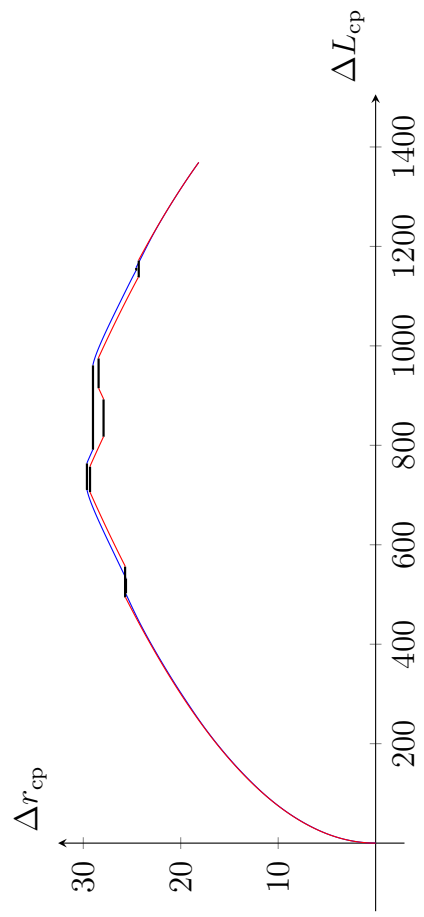


в) оптимальный угол отклонения тяги

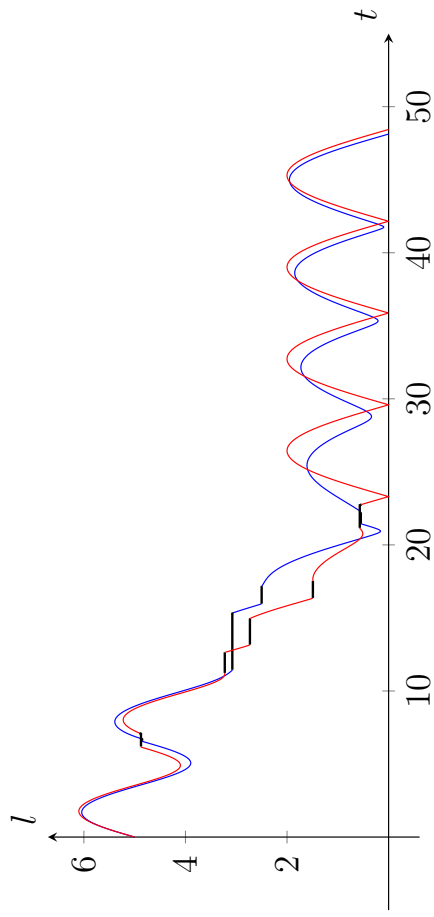


г) оптимальная функция включения тяги

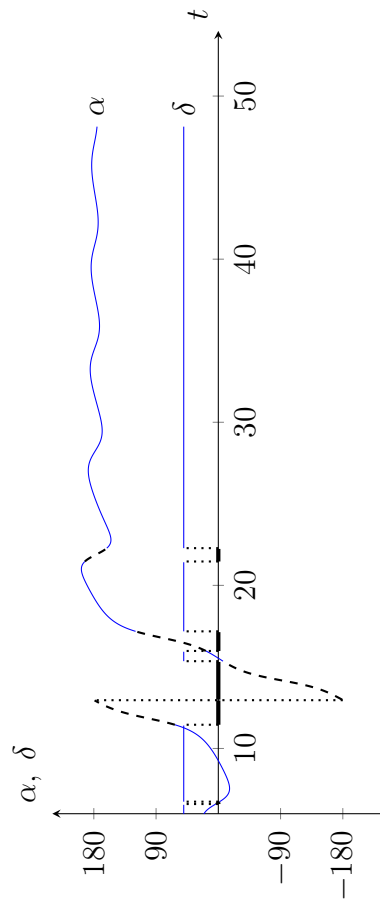
Рисунок 2.13 – Пример траекторий и оптимального управления в задаче о минимуме моторного времени при доминировании требования коррекции векового движения



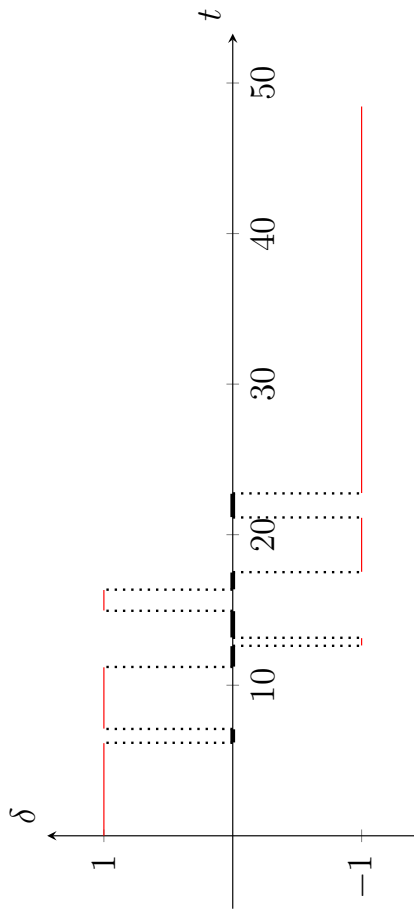
а) траектория векового движения



б) малая полуось эллипса относительного движения

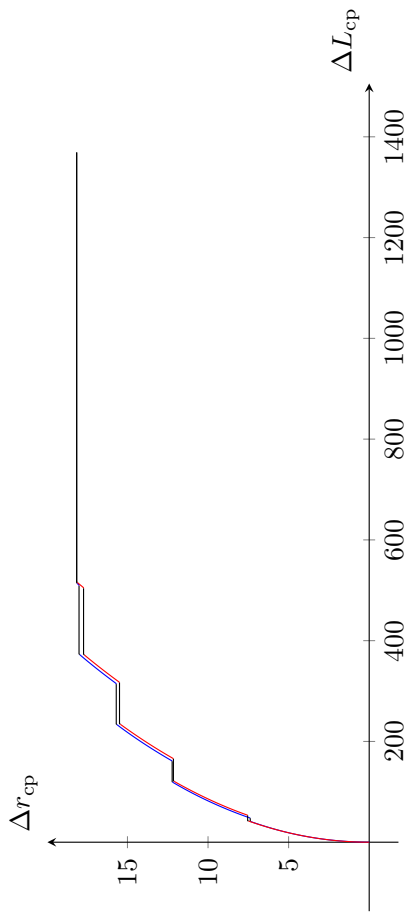


в) оптимальный угол отклонения тяги

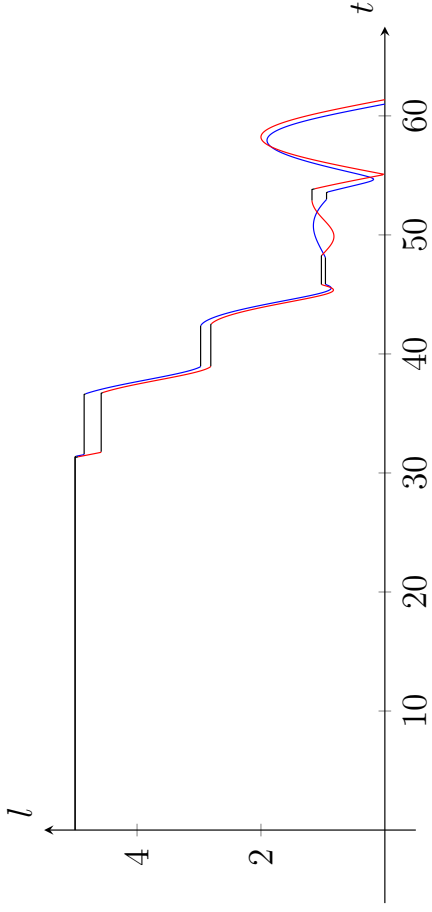


г) оптимальная функция включения тяги

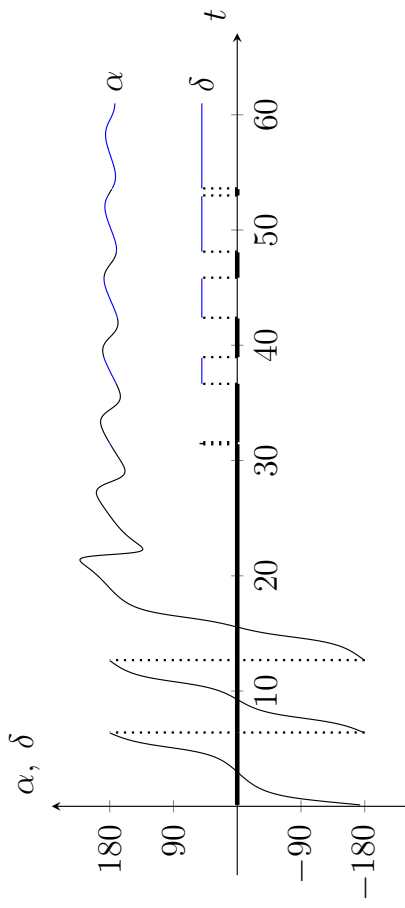
Рисунок 2.14 – Пример траекторий и оптимального управления в задаче о минимуме моторного времени при доминировании требования коррекции векового движения



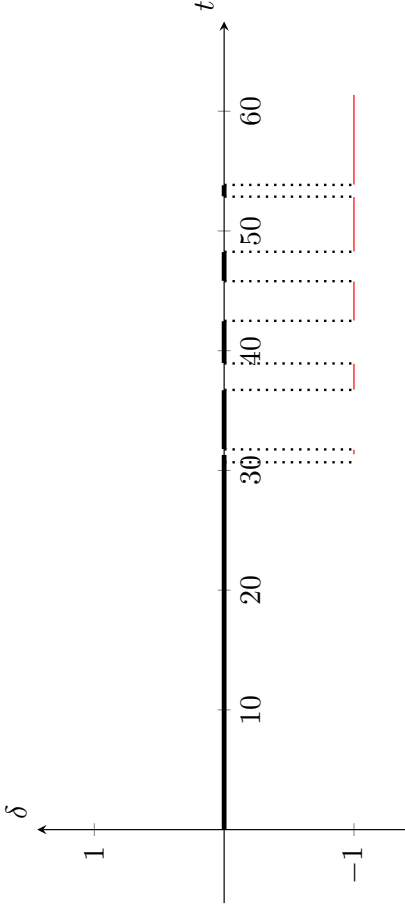
а) траектория векового движения



б) малая полуось эллипса относительного движения



в) оптимальный угол отклонения тяги



г) оптимальная функция включения тяги

Рисунок 2.15 – Пример траекторий и оптимального управления в задаче о минимуме моторного времени при доминировании требования коррекции векового движения (минимальное моторное время)

Рассмотрим траектории и управления при доминировании требования коррекции векового движения в задаче быстрогодействия (рисунок 2.12).

Оптимальное управление в случае и свободной (рисунок 2.12в) и трансверсальной (рисунок 2.12г) ориентации вектора тяги содержит две характерные области.

Первая область расположена в интервале времени $0 \dots 10$ радиан и в интервале от 20 радиан до конца. В этой области происходит доминирующее изменение векового движения – сначала монотонное увеличение, а потом монотонное уменьшение (рисунок 2.12а). Характер изменения малой полуоси эллипса относительного движения по времени – колебательный (рисунок 2.12б). Оптимальный угол отклонения тяги α от трансверсального направления остаётся близким сначала к нулю градусам, а затем к 180 градусам (рисунок 2.12в), что соответствует оптимальной функции включения тяги δ при её трансверсальной ориентации равной плюс и минус 1 соответственно (рисунок 2.12г). Такие программы управления и поведение фазовых координат характерны для задачи оптимального управления вековыми составляющими движения.

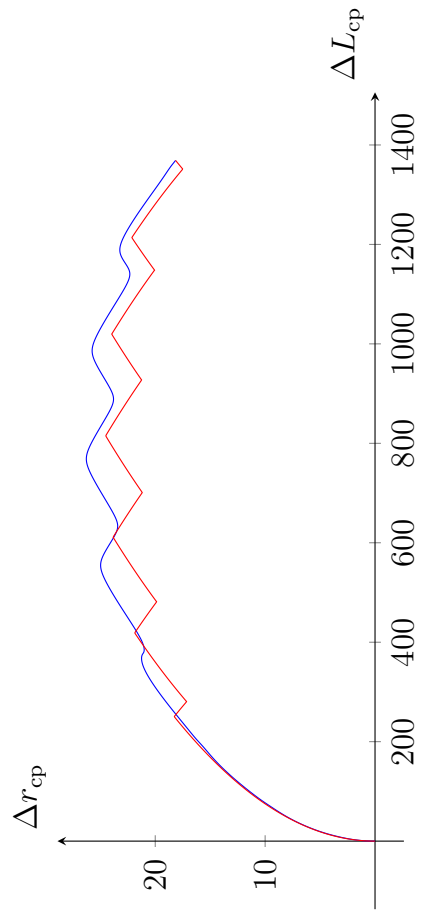
Вторая область расположена в интервале времени $10 \dots 20$ радиан. В этой области происходит доминирующее (практически монотонное уменьшение при свободной ориентации вектора тяги и с небольшими участками увеличения при трансверсальной) изменение малой полуоси эллипса относительного движения (рисунок 2.12б). Характер изменения вековых составляющих движения – колебательный (рисунок 2.12а). Оптимальный угол отклонения тяги α от трансверсального направления от времени во второй области изменяется от минус до плюс 180 градусов (рисунок 2.12в), а оптимальная функция включения тяги δ переключается между минус и плюс 1 (рисунок 2.12г). Такие программы управления и поведение фазовых координат характерны для задачи оптимального управления периодическими составляющими движения.

При незначительном увеличении общего времени (рисунок 2.13) пассивные участки сначала появляются во второй области (рисунок 2.13а), в местах незначительного увеличения малой полуоси эллипса относительного движения (рисунок 2.13б), которые приходятся на «макушки» траектории векового движения (рисунок 2.13а).

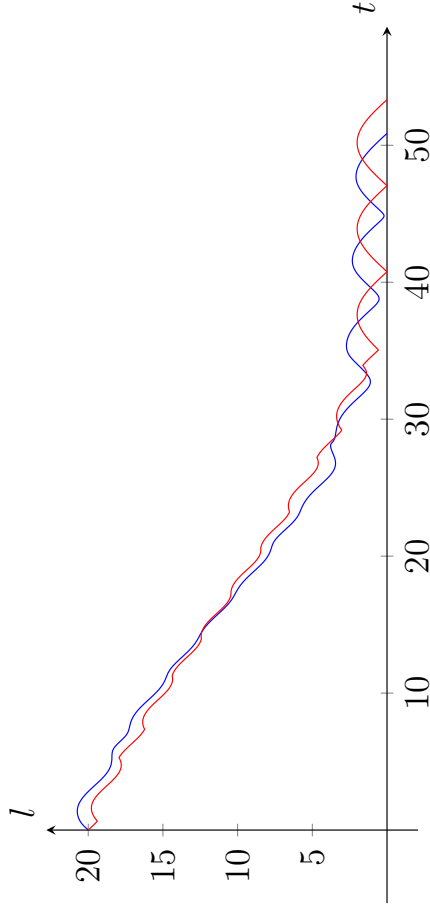
При ещё большем увеличении общего времени (рисунок 2.14) пассивные участки появляются как в первой, так и во второй области. На траектории векового движе-

ния (рисунок 2.14а) срезается часть «макушек», где происходит увеличение среднего смещения вдоль радиуса орбиты, на зависимости малой полуоси эллипса относительного движения от времени (рисунок 2.14б) срезается часть участков увеличения малой полуоси эллипса относительного движения в первой области.

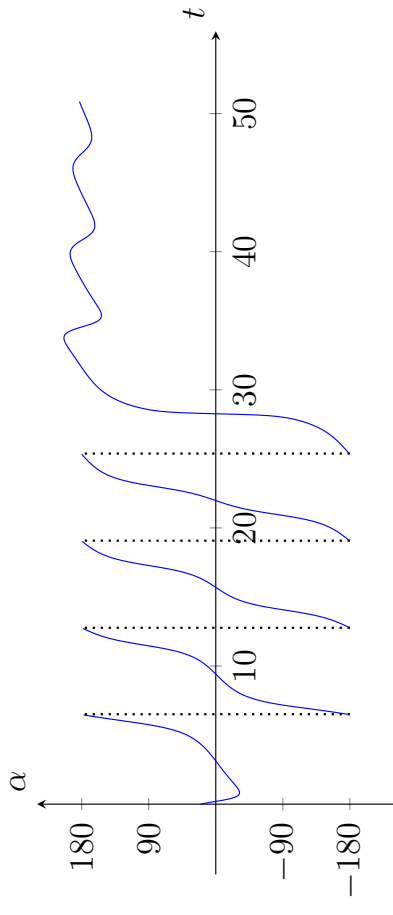
На траектории с минимальными затратами моторного времени (рисунок 2.15) полностью исчезают участки увеличения среднего смещения вдоль радиуса орбиты (рисунок 2.15а), чем и обусловлен минимум затрат моторного времени. Оптимальный угол α отклонения тяги от трансверсального направления на активных участках близок к 180 градусам (рисунок 2.15в), а оптимальная функция включения тяги δ принимает значения только одного знака – минус 1.



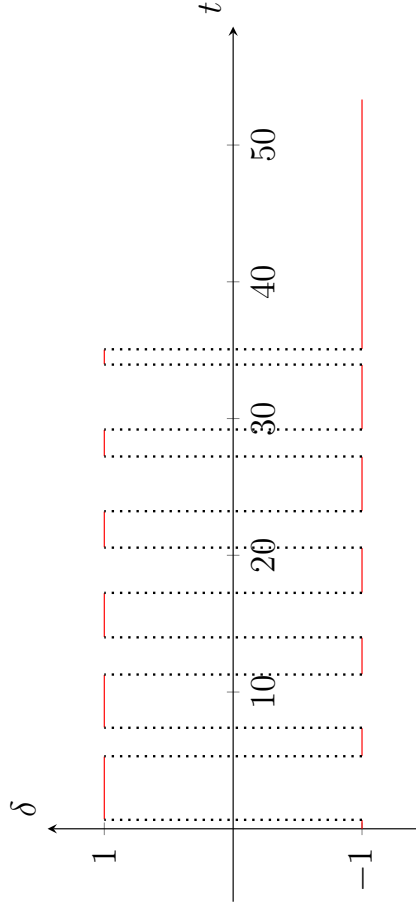
а) траектория векового движения



б) малая полуось эллипса относительного движения

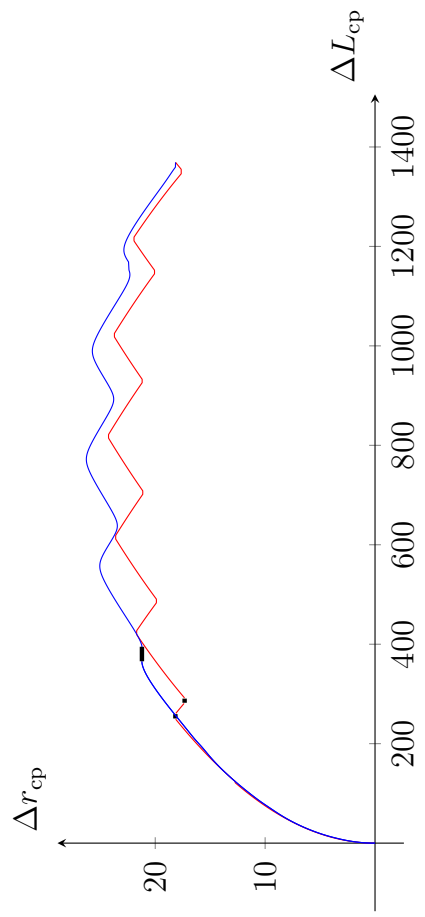


в) оптимальный угол отклонения тяги

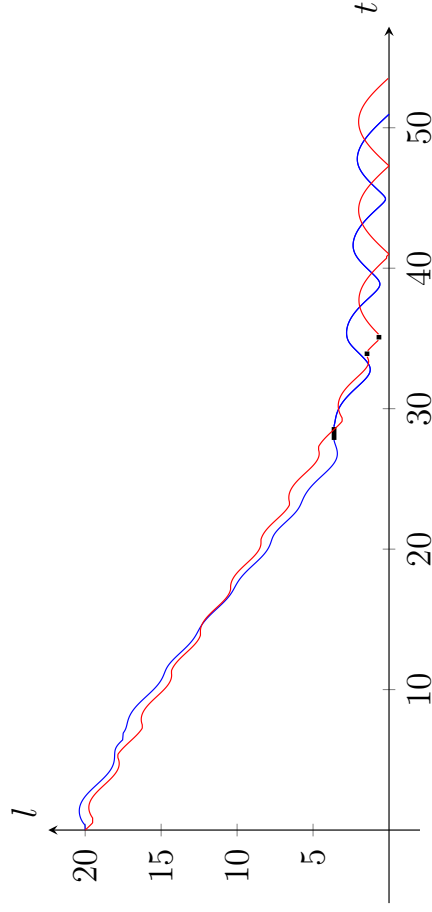


г) оптимальная функция включения тяги

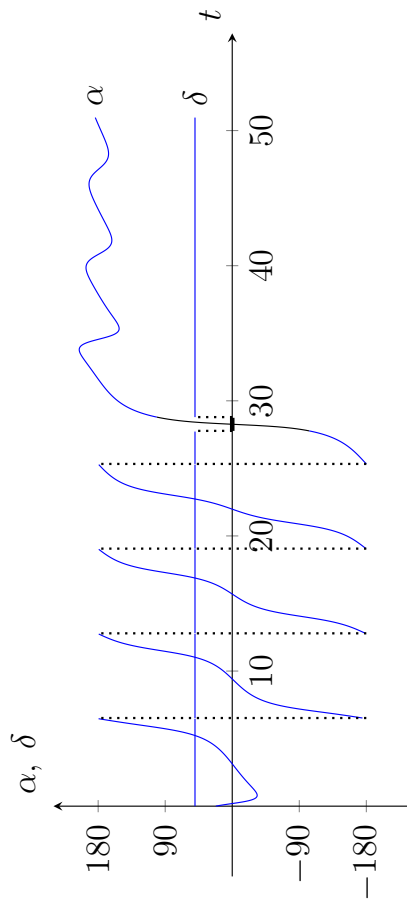
Рисунок 2.16 – Пример траекторий и оптимального управления в задаче быстрого изменения при сопоставимом изменении векового и периодического движения



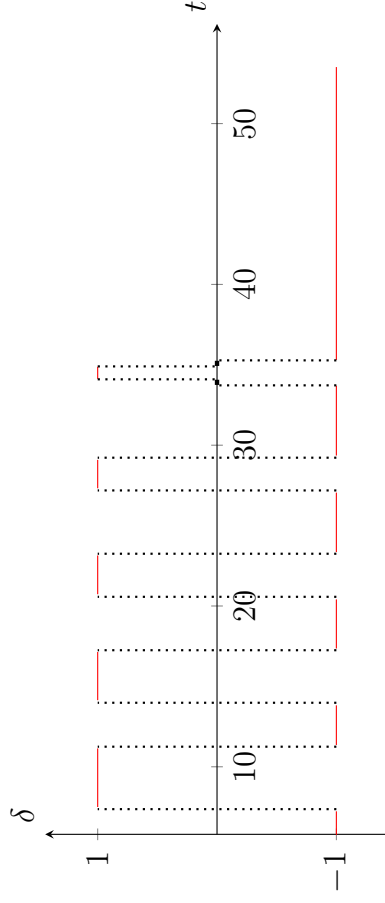
а) траектория векового движения



б) малая полуось эллипса относительного движения

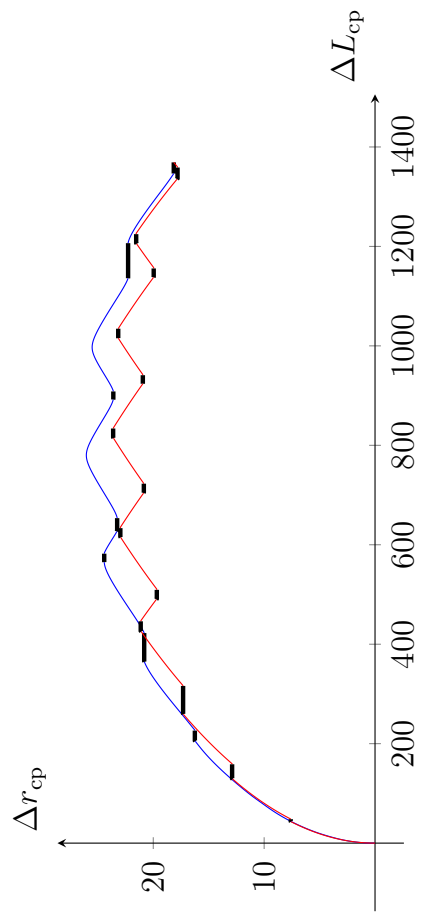


в) оптимальный угол отклонения тяги

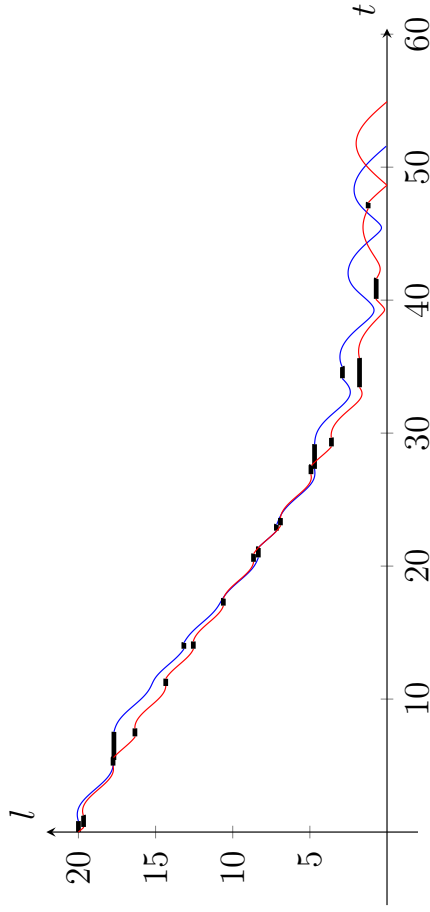


г) оптимальная функция включения тяги

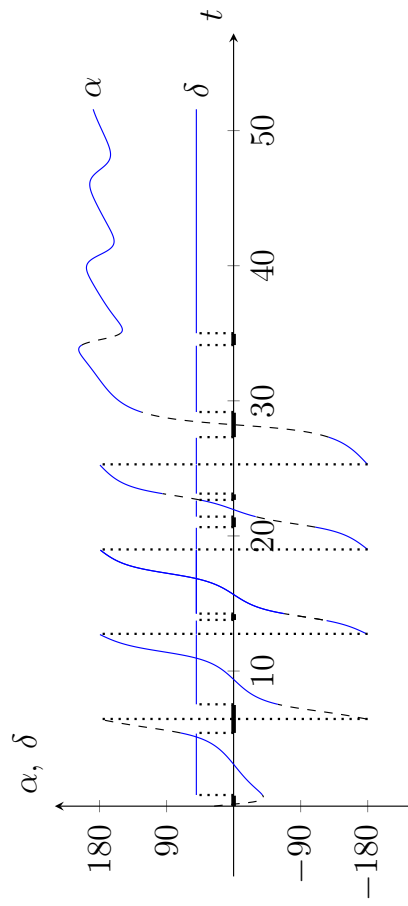
Рисунок 2.17 – Пример траекторий и оптимального управления в задаче о минимуме моторного времени при сопоставимом изменении векового и периодического движения



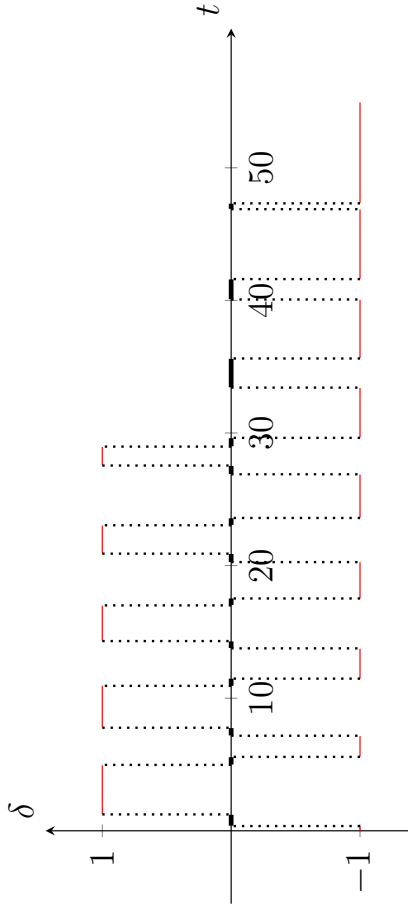
а) траектория векового движения



б) малая полуось эллипса относительного движения

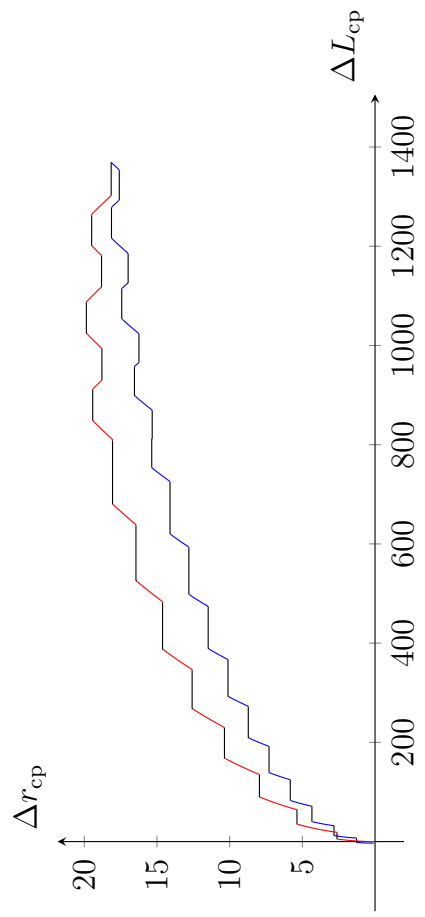


в) оптимальный угол отклонения тяги

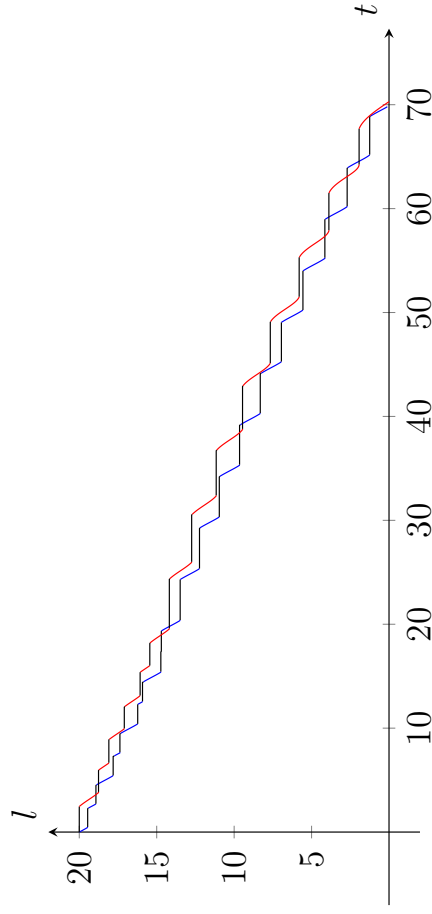


г) оптимальная функция включения тяги

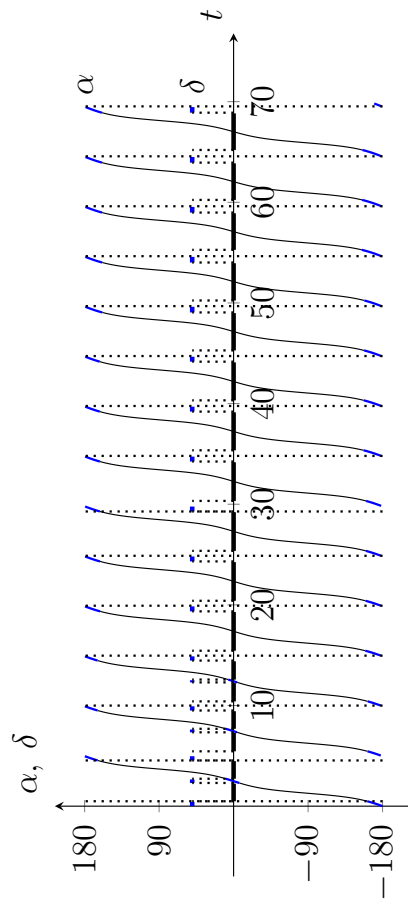
Рисунок 2.18 – Пример траекторий и оптимального управления в задаче о минимуме моторного времени при сопоставимом изменении векового и периодического движения



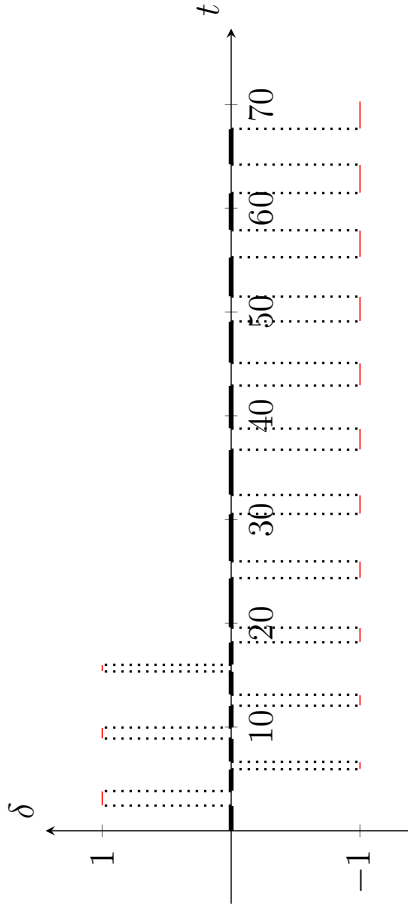
а) траектория векового движения



б) малая полуось эллипса относительного движения



в) оптимальный угол отклонения тяги



г) оптимальная функция включения тяги

Рисунок 2.19 – Пример траекторий и оптимального управления в задаче о минимуме моторного времени при сопоставимом изменении векового и периодического движения (минимальное моторное время)

Рассмотрим траектории и управления при сопоставимом изменении векового и периодического движения в задаче быстрогодействия (рисунок 2.16).

Оптимальное управление в случае как при свободной (рисунок 2.16а), так и трансверсальной (рисунок 2.16б) ориентации вектора тяги содержит две характерных области.

Первая область расположена в интервале времени $0 \dots 32$ радиана. В этой области происходит основное изменение (уменьшение) малой полуоси эллипса относительного движения – её зависимость от времени практически монотонна (рисунок 2.16б), она уменьшается до некоторого малого значения. Вековые составляющие движения в первой области практически не изменяются (рисунок 2.16а) – среднее смещение вдоль радиуса орбиты колеблется в окрестности начального значения. Оптимальный угол α отклонения вектора тяги от трансверсального направления (рисунок 2.16в) изменяется от минус до плюс 180 градусов, что характерно для задачи управления малой полуосью эллипса относительного движения. Оптимальная функция включения тяги δ переключается между минус и плюс 1 (рисунок 2.16г).

Вторая область расположена в интервале времени 32 радиана и до конца. В этой области происходит основное уменьшение вековых составляющих движения (рисунок 2.16а), а зависимость малой полуоси эллипса относительного движения от времени носит колебательный характер (рисунок 2.16б). Оптимальный угол α отклонения вектора тяги от трансверсального направления (рисунок 2.16в) близок к 180 градусам, что характерно для задачи управления вековыми составляющими движения. Оптимальная функция включения тяги δ постоянна и равна минус 1 (рисунок 2.16г).

При незначительном увеличении моторного времени (рисунок 2.17) пассивный участок появляется на стыке первой и второй области.

При ещё большем увеличении моторного времени (рисунок 2.18) пассивные участки появляются только в первой области. «Срезаются» участки увеличения малой полуоси эллипса относительного движения (рисунок 2.18б), которые приходятся на «макушки» траектории векового движения. Во второй области появляется один пассивный участок в момент времени 35 радиан при свободной ориентации вектора тяги (рисунок 2.18в) и 40 радиан при трансверсальной (рисунок 2.18г).

На траектории с минимальными затратами моторного времени (рисунок 2.19) пассивные участки появляются равномерно на всей траектории. Полностью исчез-

ли участки увеличения малой полуоси эллипса относительного движения – её зависимость от времени стала монотонной (рисунок 2.19б), чем и обусловлен минимум затрат моторного времени. Структура управления принципиально не изменилась – сначала происходит коррекция периодического движения в первой области, а затем, во второй, коррекция векового движения.

По результатам расчётов оптимального управления для случая трансверсальной ориентации вектора тяги можно сделать следующие обобщённые выводы:

1. Выполнено условие $|\Delta r_{\text{cp}_0} - \Delta r_{\text{cp}_k}| > |l_0 - l_k|$, что соответствует доминированию требования коррекции вековых составляющих движения, программа состоит из двух включения тяги разного знака, которые разделены пассивным участком.
2. Выполнено условие $|l_0 - l_k| > |\Delta r_{\text{cp}_0} - \Delta r_{\text{cp}_k}|$, что соответствует доминированию требования коррекции периодических составляющих движения, программа состоит из последовательного чередования разгонных и тормозных участков, которые чередуются пассивными участками.
3. Выполнено условие $|\Delta r_{\text{cp}_0} - \Delta r_{\text{cp}_k}| \approx |l_0 - l_k|$, что соответствует сопоставимому изменению векового и периодического движения, программа имеет сложную структуру, которая может иметь два – три включения тяги.

Можно выделить следующие структуры управления, показанные на рисунке 2.20.

В случае *двух включений тяги* знак тяги на активных участках может быть как разным, так и одинаковым.

В случае *трёх включений тяги*, рассмотрим различные комбинации знаков тяги на активных участках:

1. программа управления с чередованием знака ускорения от тяги на активных участках;
2. программа управления со структурой «разгон и два торможения»;
3. программа управления со структурой «два разгона и торможение»;
4. программа с одинаковым знаком тяги.

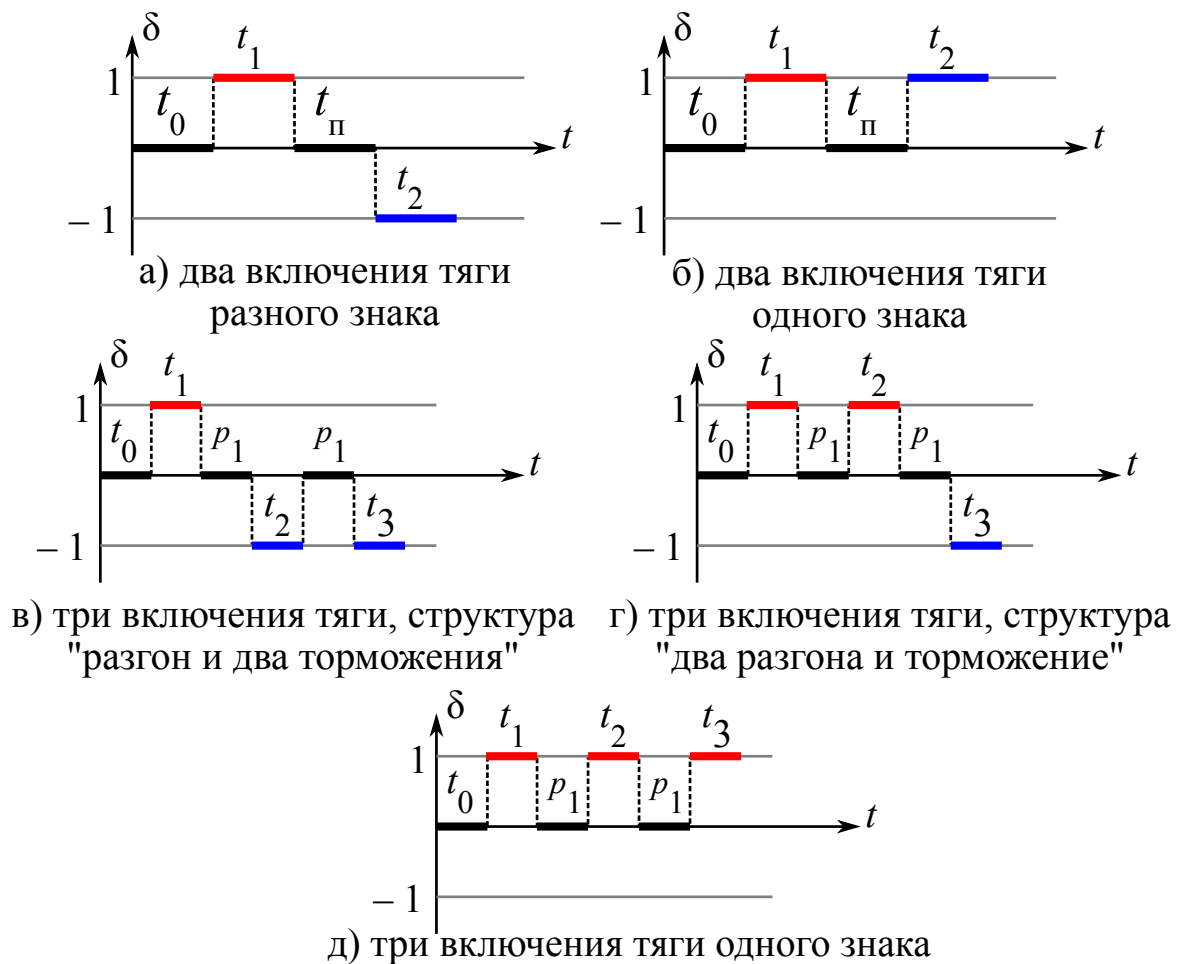


Рисунок 2.20 – Структура управления с трансверсальной тягой с двумя и тремя включениями тяги,
 обозначено t_0 – участок ожидания, t_i – активный участок (тяга включена), p_i –
 пассивный участок (тяга выключена)

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

1. В задаче управления *вековыми составляющими* движения со *свободной* ориентацией тяги программа управления имеет два включения, которые разделены пассивным участком. Анализ сопряжённых переменных, которые формируют оптимальное управление, показал, что другой структуры быть не может:

- оптимальный угол отклонения тяги от трансверсального направления определяется арккотангенсом линейной функцией времени, который может изменяться только от нуля до π .
- оптимальная функция включения тяги зависит от разности корня из квадрата линейной функции времени и единицы. Пассивный участок расположен в зоне отрицательных значений этой функции, которые она принимает только в окрестности точки перегиба, таким образом пассивный участок на траектории единственен.

2. Для задачи управления *вековыми составляющими* движения с *трансверсальной* ориентацией тяги программа управления имеет два включения тяги, которые разделены пассивным участком. Анализ сопряжённых переменных показал, что такая структура управления единственна. Знак тяги и её включение и выключение определяется линейной функцией времени:

- тяга включена и ориентирована в положительном направлении тогда, когда линейная функция принимает значения большие единицы;
- тяга включена и ориентирована в отрицательном направлении тогда, когда линейная функция принимает значения меньше минус единицы;
- тяга выключается тогда, когда линейная функция времени принимает значения от единицы до минус единицы.

Получены аналитические соотношения, которые позволяют получить зависимость затрат общего времени от затрат моторного и оценить искомые минимальные затраты моторного времени.

3. В задаче управления *периодическими составляющими* движения со *свободной* ориентацией тяги в пределах витка программа управления имеет два включения тяги, центры которых расположены в апсидальных точках:

- оптимальный угол отклонения тяги от трансверсального направления опре-

деляется арктангенсом гармонической функции времени, который в перигее близок к π , а в апогее к нулю.

- оптимальная функция включения тяги зависит от разности корня из гармонических функций времени и единицы. Пассивный участок расположен в зоне положительных значений этой функции, которые приходятся на окрестность нуля и π .

4. В задаче управления **периодическими составляющими** движения с **трансверсальной** ориентацией вектора тяги в пределах программа управления имеет два включения тяги, центры которых расположены в апсидальных точках, а знак тяги и её включение/выключение определяется гармонической функцией времени:

- тяга включена и ориентирована в положительном направлении тогда, когда гармоническая функция принимает значения большие единицы;
- тяга включена и ориентирована в отрицательном направлении тогда, когда гармоническая функция принимает значения меньше минус единицы;
- тяга выключается тогда, когда гармоническая функция времени принимает значения от единицы до минус единицы.

Получены аналитические соотношения, которые позволяют получить зависимость затрат общего времени от затрат моторного и оценить искомые минимальные затраты моторного времени.

5. В задаче оптимального управления **относительным движением**, в зависимости от сочетания граничных условий (доминирование требования коррекции векового, периодического движения или сопоставиме их изменение), оптимальная программа управления имеет сложную структуру.

При доминировании требования коррекции векового движения, программа содержит три области. В первой и третьей структура управления стремится к структуре оптимального управления вековым движением, во второй – периодическим.

При доминировании требования коррекции периодического движения и сопоставимом изменении векового и периодического движения, программа содержит две области. В первой структура оптимального управления стремится к структуре управления периодическом движением, во второй – вековым.

3 ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ УПРАВЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ТЯГИ

В главе диссертации рассматривается задача получения аналитических соотношений для расчёта размеров активных участков параметрических программ управления (рисунок 2.20), для расчёта предельных затрат моторного и общего времени и определения областей граничных условий, допускающих их применение. Разработан алгоритм построения множества оптимальных по Парето номинальных программ управления относительным движением с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальном направлении по критериям минимум моторного времени и минимум общего времени.

Выпишем безразмерную математическую модель относительного движения для случая трансверсальной ориентации тяги:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{r}_{\text{ср}} &= \delta, \\ \Delta \dot{L}_{\text{ср}} &= -\frac{3}{2} \Delta r_{\text{ср}}, \\ \dot{l}_x &= \delta - l_y, \\ \dot{l}_y &= l_x,\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь δ – функция управления (включения тяги), принимающая значения $\delta = 1$ тяга направлена в положительном трансверсальном направлении, $\delta = 0$ тяга выключена и $\delta = -1$ тяга направлена в отрицательном трансверсальном направлении.

Для случая трансверсальной ориентации вектора тяги, уравнения (3.1) имеют решения в квадратурах:

$$\begin{aligned}
\Delta r_{\text{cp}}(t) &= \Delta r_{\text{cp}0} + C, \\
\Delta L_{\text{cp}}(t) &= \Delta L_{\text{cp}0} - \frac{3}{2}t\Delta r_{\text{cp}0} - \frac{3}{2}D, \\
l_x(t) &= l_{x_0} - B, \\
l_y(t) &= l_{y_0} + A.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Соответствующее решение для малой полуоси эллипса относительного движения имеет вид:

$$l^2(t) = l_0^2 + 2l_0\sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(\varphi_0 + t + \arctg\frac{B}{A}\right) + A^2 + B^2. \tag{3.3}$$

Слагаемые A , B , C и D будут зависеть от конкретной структуры управления (рисунок 2.20), а в общем виде определяются интегралами:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^t \delta \sin(t - \psi) d\psi, & C &= \int_0^t \delta d\psi, \\
B &= \int_0^t \delta \cos(t - \psi) d\psi, & D &= \int_0^t \delta(t - \psi) d\psi.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Рассматривается двухкритериальная оптимизация размеров участков параметрических программ управления $p = [t_0, t_1, p_1, t_2, p_2, t_3]^T$ по критериям:

$$p_{\text{опт}} = \arg \min \left[\begin{array}{l} t_{\text{мот}} = \sum t_i \rightarrow \min, \\ t_{\text{общ}} = t_0 + \sum (t_i + p_i) \rightarrow \min \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_k, \end{array} \right. \right]. \tag{3.5}$$

Здесь $p_{\text{опт}}$ – оптимальный вектор размеров участков, t_0 – размер участка ожидания, t_i – размер активного участка (тяга включена), p_i – размер пассивного участка (тяга выключена), $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_k$ – вектор граничных условий:

$$\begin{aligned}
t = 0 : & \quad \Delta r_{\text{cp}} = \Delta r_{\text{cp}0}, \quad \Delta L_{\text{cp}} = \Delta L_{\text{cp}0} \quad l_x = l_{x_0}, \quad l_y = l_{y_0}; \\
t = t_k : & \quad \Delta r_{\text{cp}} = 0, \quad \Delta L_{\text{cp}} = 0, \quad l_x = 0, \quad l_y = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Как следует из (3.6), рассматривается задача попадания в начало координат по всем параметрам движения.

3.1 Управление с двумя включениями тяги

Рассмотрим некоторые тонкости, которые связаны с применением программ управления с двумя включениями тяги одного и разного знака. Возникает вопрос – в каких областях граничных условий могут быть применены эти программы.

Рассмотрим возможные фазовые траектории в задаче управления только вековыми составляющими относительного движения с двумя включениями тяги (рисунок 3.1) с пассивным участком.

Для анализа **областей постоянства знака тяги**, для случая попадания в начало координат, выделены области:

- если начальная точка находится правее линии переключения (условия 1 на рисунке 3.1), то знак тяги на первом активном участке положительный (область $\delta = 1$);
- если начальная точка находится левее линии переключения (условия 2 на рисунке 3.1), то знак тяги на первом активном участке отрицательный (область $\delta = -1$).

Для анализа **областей** применения программ **с одинаковым и разным знаком тяги**, для случая попадания в начало координат, выделены области, симметричные относительно начала координат:

- Первая область расположена выше положительного направления оси ΔL_{cp} и ниже линии переключения.
- Вторая область расположена ниже положительного направления оси ΔL_{cp} до линии переключения.

Выполнение программ с одинаковым знаком тяги возможно только в первой области.

Уравнение линии переключения имеет вид:

$$\Delta r_{cp} (\Delta L_{cp}) = \frac{3}{4} (\Delta r_{cp} - \Delta r_{cpk})^2 \text{sign} (\Delta r_{cp} - \Delta r_{cpk}) - \frac{3}{2} \Delta r_{cpk} (\Delta r_{cp} - \Delta r_{cpk}) + \Delta L_{cpk}.$$

Знак тяги на первом активном участке определяется начальными и конечными условиями движения [24]:

$$\delta = \text{sign} \left[\frac{2}{3} (\Delta L_{cp0} - \Delta L_{cpk}) - \frac{(\Delta r_{cp0} - \Delta r_{cpk}) |\Delta r_{cp0} - \Delta r_{cpk}|}{2} \right], \quad (3.7)$$

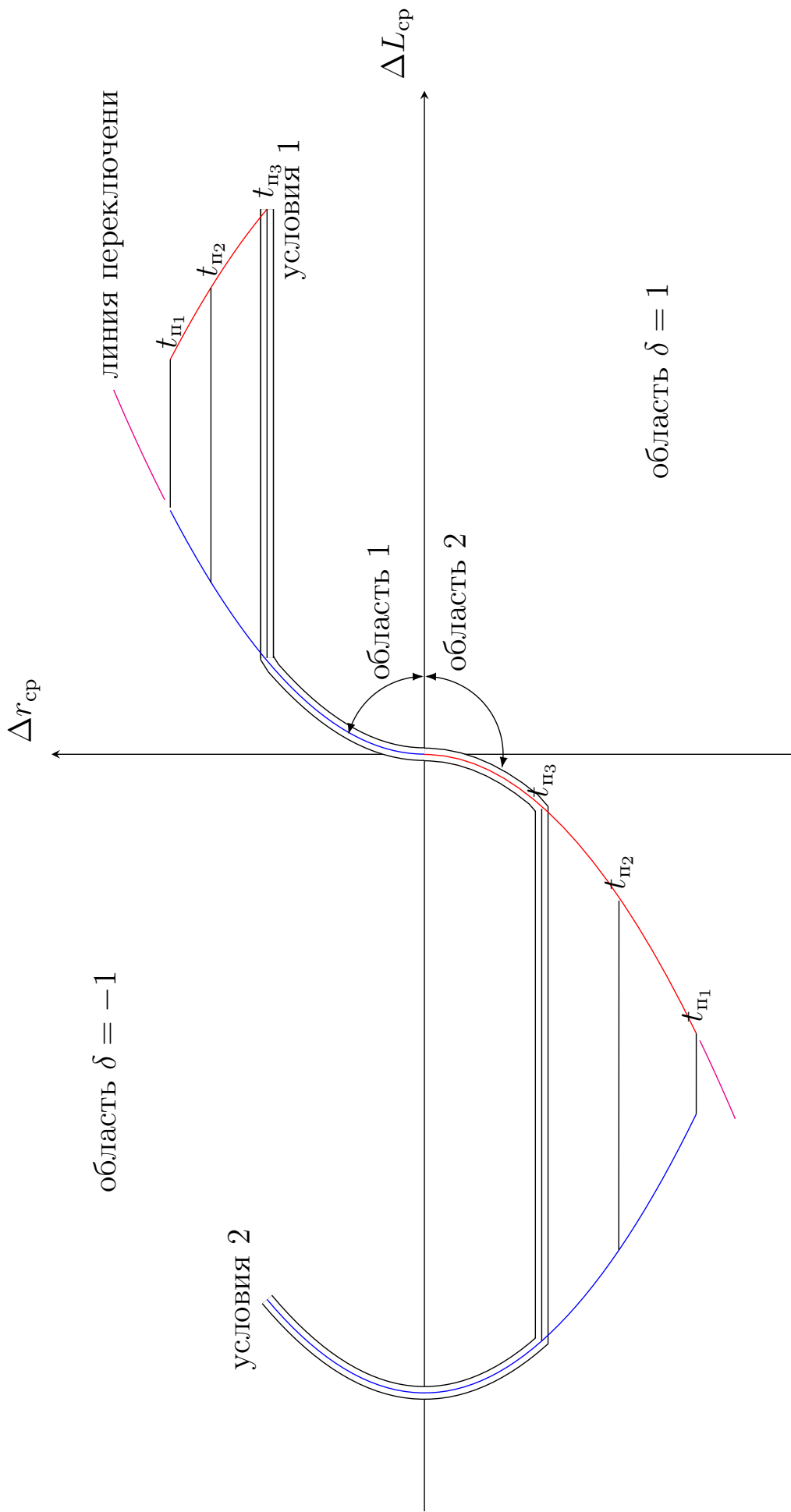


Рисунок 3.1 – Возможные фазовые траектории в задаче управления с двумя включениями тяги

3.1.1 Оптимизация программы с двумя включениями тяги разного знака

Для рассматриваемой структуры управления (рисунок 2.20а) определим многочлены A , B , C и D , получим:

$$\begin{aligned}
 A &= -\cos(t_1 + t_{\text{п}} + t_2) + \cos(t_{\text{п}} + t_2) + \cos(t_2) + 1, \\
 B &= \sin(t_1 + t_{\text{п}} + t_2) - \sin(t_{\text{п}} + t_2) - \sin(t_2), \\
 C &= t_1 - t_2, \\
 D &= \frac{t_1^2 - t_2^2}{2} + t_1(t_{\text{п}} + t_2).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Многочлены C и D , определённые по (3.8), подставим в первые два уравнения системы (3.2), получим:

$$\begin{aligned}
 \Delta r_{\text{срК}} &= \Delta r_{\text{ср0}} + \delta(t_1 - t_2), \\
 \Delta L_{\text{срК}} &= \Delta r_{\text{ср0}} - \frac{3}{2}\Delta r_{\text{ср0}}(t_0 + t_1 + t_{\text{п}} + t_2) - \\
 &\quad - \frac{3}{2}\delta\left(\frac{t_1^2 - t_2^2}{2} + t_1(t_{\text{п}} + t_2)\right).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для рассматриваемой структуры управления, без учёта граничного условия для периодического движения, размеры активных участков как функции граничных условий и размеров пассивных участков определим из системы уравнений (3.9):

$$\begin{aligned}
 t_1 &= -\Delta r_{\text{ср0}}\delta - \frac{t_{\text{п}}}{2} + \sqrt{\frac{t_{\text{п}}^2}{4} - \delta(\Delta r_{\text{ср0}}t_0 - \mathbf{L}) + \mathbf{R}}, \\
 t_2 &= -\Delta r_{\text{срК}}\delta - \frac{t_{\text{п}}}{2} + \sqrt{\frac{t_{\text{п}}^2}{4} - \delta(\Delta r_{\text{ср0}}t_0 - \mathbf{L}) + \mathbf{R}}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Знак тяги на первом участке определяется по (3.7), на втором – противоположный.

Для рассматриваемой структуры управления определим критерии задачи (3.5) через размеры активных участков (3.10), получим:

$$\begin{aligned}
 t_{\text{мот}} &= -\delta(\Delta r_{\text{ср0}} + \Delta r_{\text{срК}}) - t_{\text{п}} + \sqrt{\frac{t_{\text{п}}^2}{4} - \delta(\Delta r_{\text{ср0}}t_0 - \mathbf{L}) + \mathbf{R}}, \\
 t_{\text{общ}} &= -\delta(\Delta r_{\text{ср0}} + \Delta r_{\text{срК}}) - t_0 + \sqrt{\frac{t_{\text{п}}^2}{4} - \delta(\Delta r_{\text{ср0}}t_0 - \mathbf{L}) + \mathbf{R}}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Определим аналитически границы множества Парето. Выразим размер пассивно-

го участка t_{Π} из критериев задачи (3.11), получим:

$$t_{\Pi}(t_{\text{мот}}) = \frac{4(\mathbf{R} + \delta\mathbf{L}) - (\Delta r_{\text{ср0}} + \Delta r_{\text{срк}})^2 - 4\delta\Delta r_{\text{ср0}}t_0}{2(t_{\text{мот}} + \delta(\Delta r_{\text{ср0}} + \Delta r_{\text{срк}}))} - \frac{t_{\text{мот}}(t_{\text{мот}} + 2\delta(\Delta r_{\text{ср0}} + \Delta r_{\text{срк}}))}{2(t_{\text{мот}} + \delta(\Delta r_{\text{ср0}} + \Delta r_{\text{срк}}))}, \quad (3.12)$$

$$t_{\Pi}^2(t_{\text{общ}}) = (\Delta r_{\text{ср0}} + \Delta r_{\text{срк}})^2 + (t_{\text{общ}} + t_0)^2 - 4(\mathbf{R} + \delta\mathbf{L}) + 2\delta(\Delta r_{\text{ср0}}(t_{\text{общ}} + t_0) + \Delta r_{\text{срк}}(t_{\text{общ}} - t_0)), \quad (3.13)$$

Приравняв правые части (3.12) и (3.13), получим границы множества оптимальных по Парето решений:

$$t_{\text{общ}}(t_{\text{мот}}) = \frac{4\mathbf{R} + t_{\text{мот}}(t_{\text{мот}} + 2t_0) - (\Delta r_{\text{ср0}} + \Delta r_{\text{срк}})^2}{2(t_{\text{мот}} + \delta(\Delta r_{\text{ср0}} + \Delta r_{\text{срк}}))} + \delta \frac{4\mathbf{L} - 2t_0((\Delta r_{\text{ср0}} - \Delta r_{\text{срк}}))}{2(t_{\text{мот}} + \delta(\Delta r_{\text{ср0}} + \Delta r_{\text{срк}}))}. \quad (3.14)$$

Решение (3.14) позволяет оценить верхнюю и нижнюю границу затрат моторного и общего времени при фиксированной продолжительности участка ожидания.

Определим в каких пределах могут изменяться критерии задачи для рассматриваемой структуры управления.

Максимальное моторное время достигается при нулевом размере пассивного участка. Запишем:

$$\begin{aligned} \lim(\max(t_{\text{мот}})) &= (t_1 + t_2) |_{t_{\Pi}=0} = \\ &= 2\sqrt{\mathbf{R} + \delta(\mathbf{L} - \Delta r_{\text{ср0}}t_0)} + \delta(\Delta r_{\text{ср0}} + \Delta r_{\text{срк}}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Определим **минимум моторного времени**. Существует такое t_{Π} , при котором размер одного из активных участков обращается в нуль:

$$\begin{aligned} t_1 = 0 \quad \text{при} \quad t_{\Pi} &= \frac{\mathbf{R} - \Delta r_{\text{ср0}}^2 - \delta(\mathbf{L} - \Delta r_{\text{ср0}}t_0)}{\delta\Delta r_{\text{ср0}}}, \\ t_2 = 0 \quad \text{при} \quad t_{\Pi} &= \frac{\mathbf{R} - \Delta r_{\text{срк}}^2 - \delta(\mathbf{L} - \Delta r_{\text{ср0}}t_0)}{\delta\Delta r_{\text{срк}}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Подставив (3.16) в выражение для критерия моторное время (3.11), получим:

$$\lim(\min(t_{\text{мот}})) = |\Delta r_{\text{ср0}} + \Delta r_{\text{срк}}|. \quad (3.17)$$

Обсудим формулы (3.16) для случая попадания маневрирующего космического аппарата в начало координат. Первое из условий (3.16) относится к первой области, а на траектории с минимальными затратами моторного времени отсутствует первый активный участок ($t_{пз}$ на рисунке 3.1), а размер второго активного участка оказывается равным (3.17).

Второе из условий (3.16) относится ко второй области, и, следуя ему, на траектории с минимальными затратами моторного времени отсутствует второй активный участок (выделена двойным пунктиром на рисунке 3.1). Возникает противоречие: как следует из (3.16) при $\Delta r_{срк} = 0$ размер пассивного участка $t_{п}$ обращается в бесконечность, что технически невозможно.

Обратимся к физической картине процесса. Как следует из второго уравнения системы (3.1), при $\Delta r_{ср} = 0$ космический аппарат «зависает» на оси $\Delta L_{ср}$. Для его попадания в начало координат по траектории с минимальными затратами моторного времени второй области, на первом активном участке космический аппарат оказывается ниже оси $\Delta L_{ср}$ на малую величину, затем на «бесконечно» большом пассивном участке «естественным» образом сближается с началом координат, и на втором активном участке, который «бесконечно» мал, попадает в начало координат. Поэтому, формула (3.17) отражает лишь предельные минимальные затраты моторного времени для начальных условий второй области.

С физической точки зрения очевидно, что **максимальное общее время** достигается при минимальном значении моторного. Подставив (3.17) в выражение (3.14) получим:

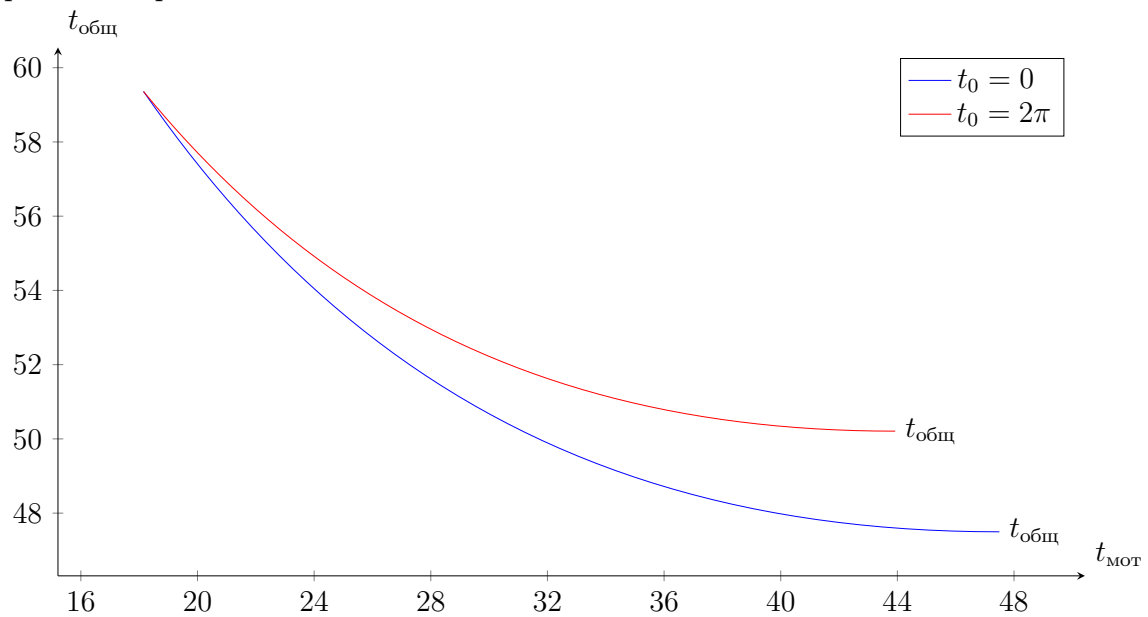
$$\lim (\max (t_{общ})) = \frac{(\Delta r_{ср0} + \Delta r_{срк})^2 + 2\mathbf{L}}{2\Delta r_{ср0}}. \quad (3.18)$$

Минимальное общее время достигается при максимальном значении моторного времени. Подставив (3.15) в выражение (3.14) получим:

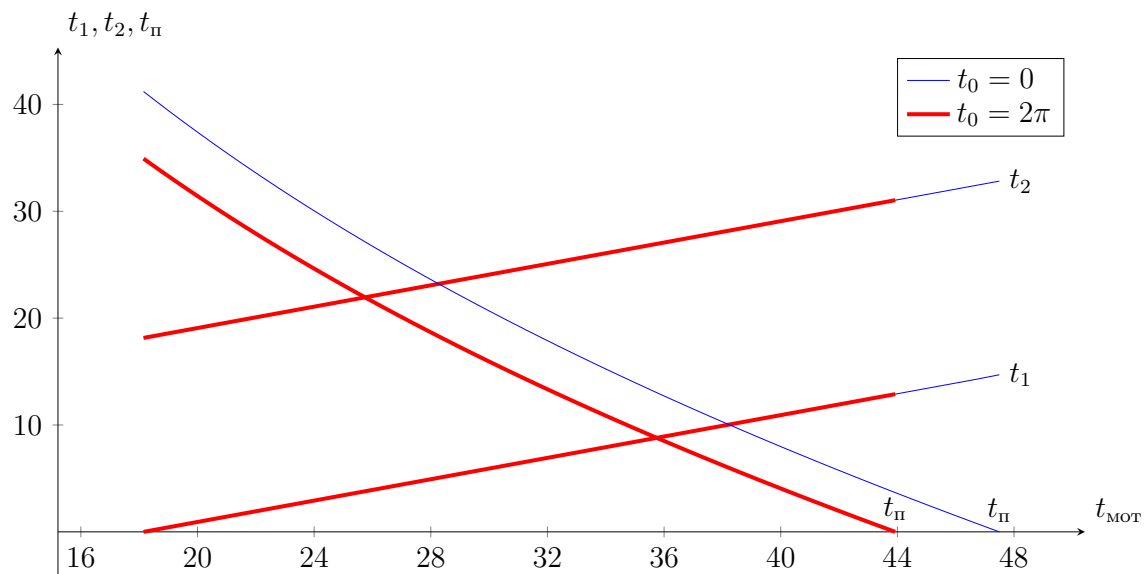
$$\lim (\min (t_{общ})) = 2\sqrt{\mathbf{R} + \delta (\mathbf{L} - \Delta r_{ср0} t_0)} - \delta (\Delta r_{ср0} + \Delta r_{срк}) + t_0. \quad (3.19)$$

Таким образом, используя (3.17) и (3.15) определяется минимальное и максимальное значение затрат моторного времени, а использование (3.19) и (3.18) позволяет оценить верхнюю и нижнюю границу затрат общего времени не прибегая к численным расчётам параметров управления.

На рисунках 3.2 и 3.3 показан пример множества Парето для граничных условий первой и второй области.



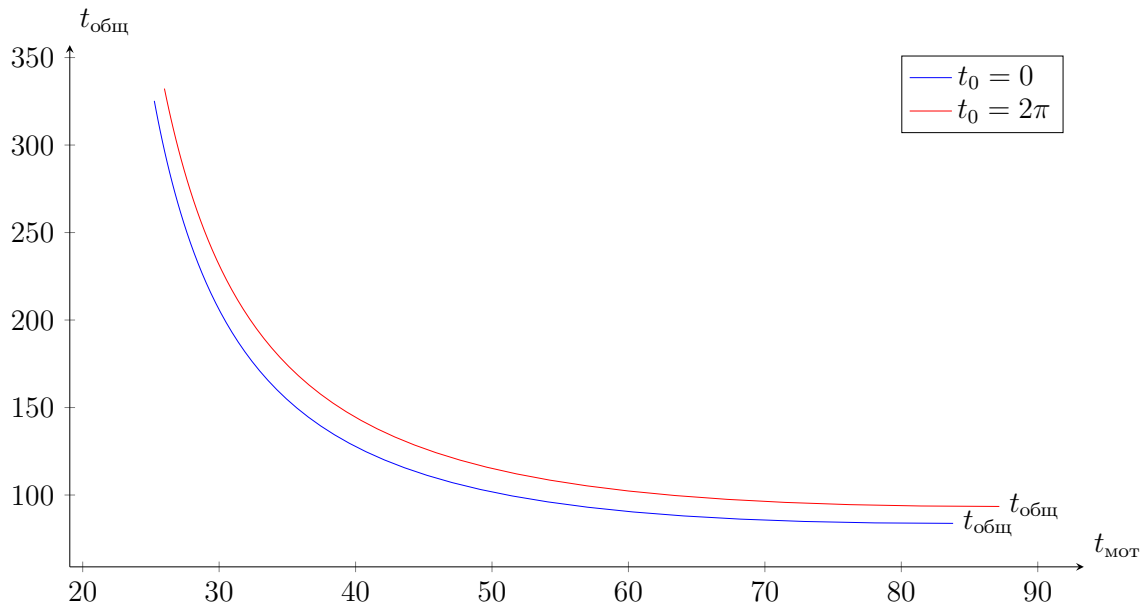
а) множество Парето



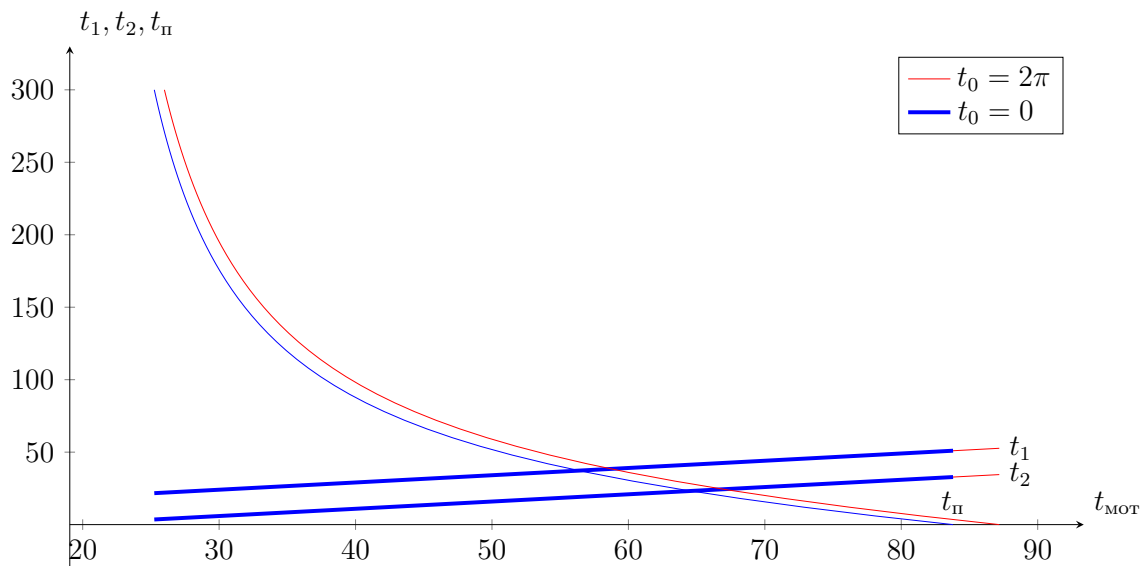
б) размеры участков

Рисунок 3.2 – Пример множества Парето для граничных условий первой области

Как следует из рисунка 3.2, для граничных условий первой области множество Парето ограничено справа условием равенства нулю размера пассивного участка. Здесь наблюдается максимум моторного времени и, соответственно, минимум общего времени. Слева множество Парето ограничено условием равенства нулю размера первого активного участка. Здесь наблюдается минимум моторного времени и, соответственно, максимум общего. Не трудно заметить, что увеличение участка ожидания приводит к ухудшению критериев задачи. «Самые» оптимальные по Парето решения



а) множество Парето



б) размеры участков

Рисунок 3.3 – Пример множества Парето для граничных условий первой области лежат на синей кривой, соответствующей нулевому размеру участка ожидания.

Как следует из рисунка 3.3, для граничных условий второй области при нулевом размере пассивного участка достигается максимум моторного времени и, соответственно, минимум общего. При увеличении размера пассивного участка, затраты моторного времени уменьшаются и, в соответствии с (3.17), стремятся к абсолютной разности приращения среднего смещения вдоль радиуса орбиты, затраты общего времени стремятся к бесконечности. Здесь, как было описано выше, характерно только лишь стремление, а не равенство, нулю размера второго активного участка при увеличении размера пассивного участка.

Теперь рассмотрим полную задачу – с учётом граничного условия для малой полуоси эллипса относительного движения. Определим размеры пассивных участков, которые удовлетворяют граничному условию для малой полуоси эллипса относительного движения, т.е. являются корнями уравнения:

$$l^2(t) = l_0^2 + 2l_0\sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(\varphi_0 + t + \arctan \frac{B}{A}\right) + A^2 + B^2. \quad (3.20)$$

Здесь $t = t_0 + t_1 + t_{\text{п}} + t_2$, A и B определяются по первым двум уравнениям системы (3.8).

Введём допущение о том, что $\delta \sin\left(\varphi_0 + t + \arctan \frac{B}{A}\right) = -1$. Тогда последнее уравнение можно записать в виде системы:

$$\begin{aligned} |l_0 - l_{\text{к}}| &= \sqrt{A^2 + B^2}, \\ -1 &= \delta \sin\left(\varphi_0 + t + \arctan \frac{B}{A}\right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Многочлен $\sqrt{A^2 + B^2}$, учитывая (3.8), имеет вид:

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= 4 \left(\sin^2 \frac{t_1}{2} + \sin^2 \frac{t_2}{2} \right) - \\ &- 8 \sin \frac{t_1}{2} \sin \frac{t_2}{2} \cos \left(t_{\text{п}} + \frac{t_1 + t_2}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Из системы уравнений (3.21) численно можно определить размеры пассивных участков $t_{\text{п}}$ и t_0 , которые удовлетворяют граничному условию для периодического движения.

Определим предельные возможности коррекции малой полуоси эллипса относительного движения по программе с двумя включениями тяги разного знака. Для упрощения исследований введём допущения:

1. на размер активных участков не накладывается ни каких ограничений;
2. продолжительность активных участков мала по сравнению с орбитальным периодом.

Использование первого допущения позволяет отказаться от формул (3.10) и упростить дальнейший анализ. Использование второго допущения позволит принять:

$$\begin{aligned} \sin(t_1) &= t_1, \quad \cos(t_1) = 1, \\ \sin(t_2) &= t_2, \quad \cos(t_2) = 1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Использование (3.23) позволит упростить многочлены A и B :

$$A \approx t_1 \sin t_{\pi}, \quad (3.24)$$

$$B \approx t_1 \cos t_{\pi} - t_2.$$

Учитывая (3.24) уравнения системы (3.21) запишем в виде:

$$\begin{aligned} |l_0 - l_k| &= t_1^2 + t_2^2 - 2t_1 t_2 \cos t_{\pi}, \\ -1 &= \delta \sin \left(\varphi_0 + t_0 + t_1 + t_{\pi} + t_2 + \arctan \frac{t_1 \cos t_{\pi} - t_2}{t_1 \sin t_{\pi}} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Из первого уравнения системы (3.25) следует, что предельное приращение малой полуоси эллипса относительного движения достигается при размере пассивного участка:

$$t_{\pi} = \pi, 3\pi \dots \pi N, \quad (3.26)$$

где N – целое нечётное число витков на пассивном участке.

Как следует из (3.26), искомая продолжительность пассивного участка кратна половине орбитального периода. В тоже время на этом интервале времени расположены два активных участка, предположим:

$$t_{\pi} = \pi - \frac{t_1 + t_2}{2}. \quad (3.27)$$

Введённое предположение (3.27) описывает перелёт Цандера – Гомана, импульсы скорости прикладываются в апсидальных точках. Запишем многочлен $A^2 + B^2$ (3.22) при размере пассивного участка, определённом по (3.27), получим:

$$\lim (\max |l_0 - l_k|) = A^2 + B^2 = 4 \left(\sin \frac{t_1}{2} + \sin \frac{t_2}{2} \right)^2 \rightarrow 4. \quad (3.28)$$

Как следует из (3.28) максимальное приращение малой полуоси эллипса относительного движения составляет 4, а минимальное нуль. Эта оценка носит предельный характер, так как рассматривается космический аппарат с конечной тягой, то размеры активных участков могут быть значительными. В связи с чем, определить возможность коррекции малой полуоси эллипса относительного движения с учётом продолжительности активных участков (3.10) можно только численно.

Из второго уравнения системы (3.25) определяется приближение к размеру участка ожидания:

$$t_0 = \arcsin \delta - \varphi_0 - \frac{t_1 + t_2}{2} \pm \frac{\pi}{2}. \quad (3.29)$$

Здесь знак плюс соответствует условию $t_1 > t_2$, а знак минус условию $t_1 < t_2$.

Проведённые исследования позволили составить алгоритм решения задачи:

1. Задаются граничные условия.
2. Размер участка ожидания t_0 задаётся нулевым.
3. Определяется серия оценок размера пассивного участка $t_{\text{п}}^*$ с учётом размеров активных участков (3.10) из уравнения:

$$A^2 + B^2 = 4 \left(\sin^2 \frac{t_1}{2} + \sin^2 \frac{t_2}{2} \right) - 8 \sin \frac{t_1}{2} \sin \frac{t_2}{2} \cos \left(t_{\text{п}} + \frac{t_1 + t_2}{2} \right).$$

для решения которого используется приближение $t_{\text{п}} = \pi N$. Размер пассивного участка не превосходит величины (3.16).

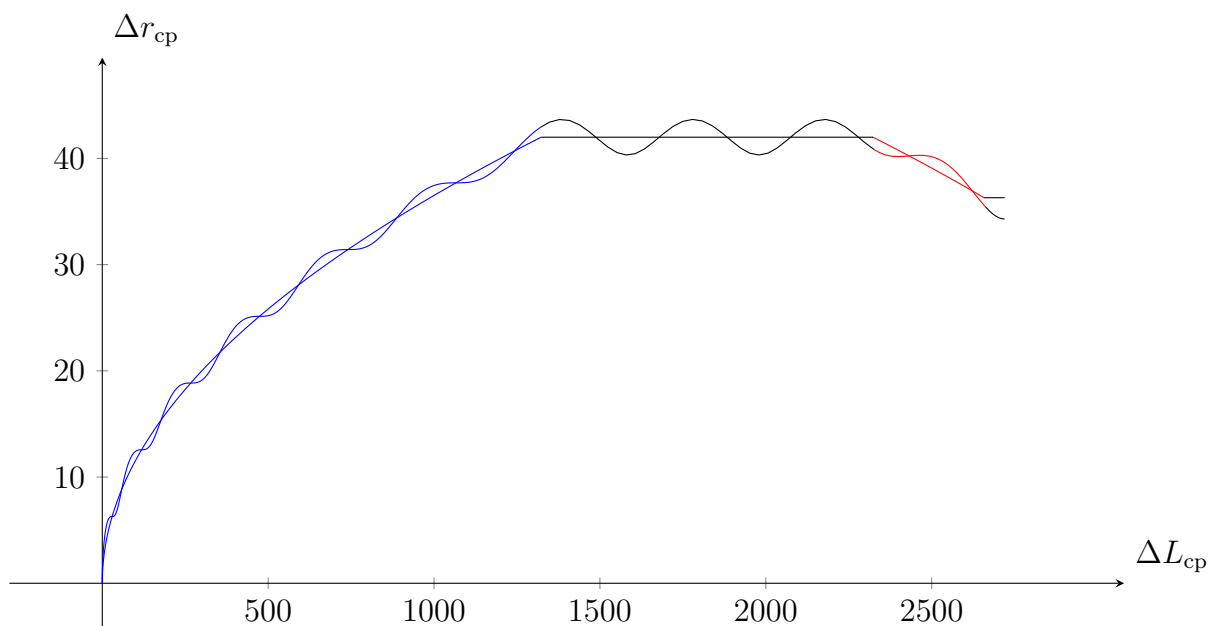
4. Определяется оценка размера участка ожидания по (3.29), с учётом размеров активных участков (3.10) и размера пассивного участка $t_{\text{п}}^*$, определённого на третьем шаге.
5. Приближённое решение уточняется путём минимизации функции:

$$l^2 = l_0^2 + 2l_0 \sqrt{A^2 + B^2} \sin \left(\varphi_0 + t + \arctan \frac{B}{A} \right) + A^2 + B^2.$$

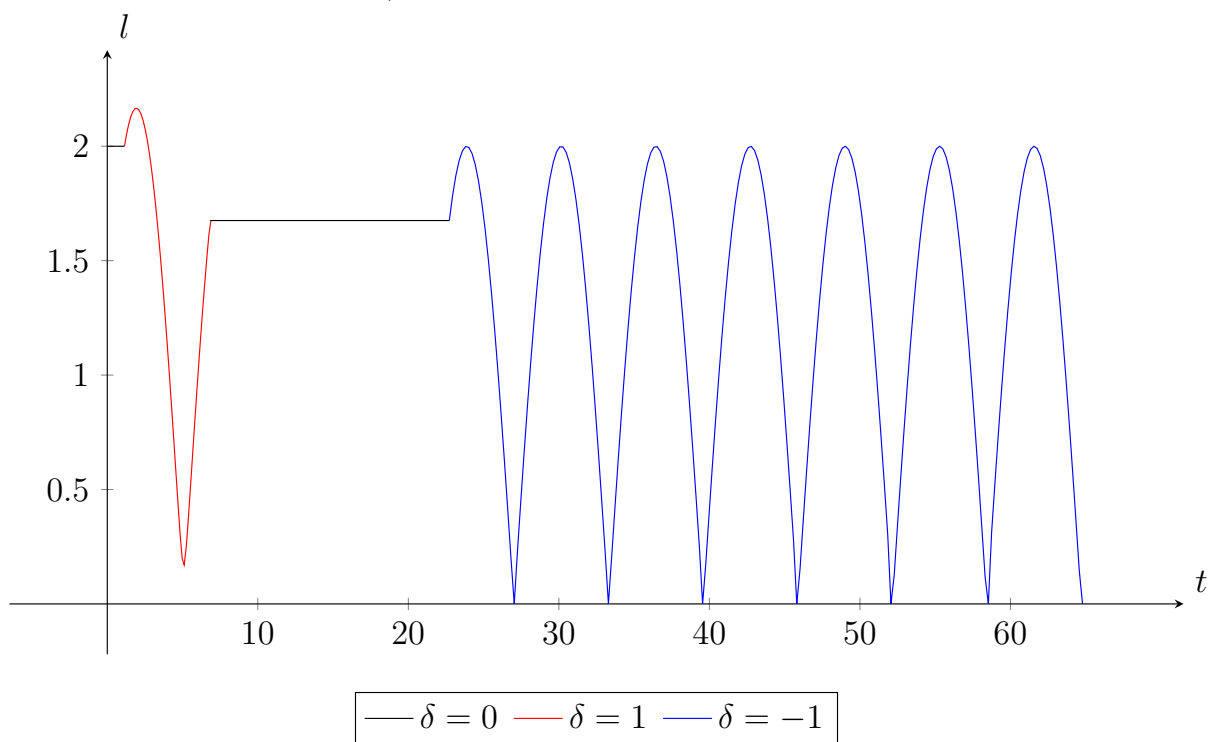
по параметрам t_0 и $t_{\text{п}}$, A и B определяются по (3.8), размеры активных участков по (3.10).

6. Из полученной серии решений выбираются оптимальные по Парето.

На рисунке 3.4 приведён пример траектории для граничных условий 1В по таблице 2.2.



а) траектория векового движения



б) зависимость малой полуоси эллипса относительного движения от времени
 Рисунок 3.4 – Пример фазовой траектории в координатах $\Delta L_{cp} - \Delta r_{cp}$ (сверху) и зависимости малой полуоси эллипса относительного движения от времени (снизу), программа управления с двумя включениями тяги разного знака

3.1.2 Оптимизация программы с двумя включениями тяги одинакового знака

Для рассматриваемой структуры управления определим многочлены A , B , C и D , получим:

$$\begin{aligned} A &= -\cos(t_1 + t_{\Pi} + t_2) + \cos(t_{\Pi} + t_2) - \cos(t_2) + 1, \\ B &= \sin(t_1 + t_{\Pi} + t_2) - \sin(t_{\Pi} + t_2) + \sin(t_2), \\ C &= t_1 + t_2, \\ D &= \frac{t_1^2 + t_2^2}{2} + t_1(t_{\Pi} + t_2). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Многочлены C и D , определённые по (3.30), подставим в первые два уравнения системы (3.2), получим:

$$\begin{aligned} \Delta r_{\text{срК}} &= \Delta r_{\text{ср0}} + \delta(t_1 + t_2), \\ \Delta L_{\text{срК}} &= \Delta r_{\text{ср0}} - \frac{3}{2}\Delta r_{\text{ср0}}(t_0 + t_1 + t_{\Pi} + t_2) - \\ &\quad - \frac{3}{2}\delta\left(\frac{t_1^2 + t_2^2}{2} + t_1(t_{\Pi} + t_2)\right). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Для рассматриваемой структуры управления размеры активных участков как функции граничных условий и размеров пассивных участков определим из системы уравнений (3.31):

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{3\delta(\Delta r_{\text{ср0}}^2 - \Delta r_{\text{срК}}^2) + 4(\Delta r_{\text{ср0}} - \Delta r_{\text{срК}}) - 6\Delta r_{\text{ср0}}(t_0 + t_{\Pi})}{6t_{\Pi}}, \\ t_2 &= \frac{3\delta(\Delta r_{\text{срК}}^2 - \Delta r_{\text{ср0}}^2) - 4(\Delta r_{\text{ср0}} - \Delta r_{\text{срК}}) + 6(\Delta r_{\text{ср0}}t_0 + \Delta r_{\text{срК}}t_{\Pi})}{6t_{\Pi}}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Здесь знак тяги на активных участках противоположен по отношению к (3.7).

Управление (3.32) обеспечивает удовлетворение граничных условий только по параметрам $\Delta r_{\text{ср}} - \Delta L_{\text{ср}}$ в первой области в любом их сочетании.

Рассмотрим особенности многокритериальной задачи без учёта граничного условия для малой полуоси эллипса относительного движения. Критерии задачи (3.5) для рассматриваемой структуры управления примут вид:

$$\begin{aligned} t_{\text{мот}} &= t_1 + t_2 = \text{const} = |\Delta r_{\text{ср0}} - \Delta r_{\text{срК}}|, \\ t_{\text{общ}} &= t_0 + t_1 + t_{\Pi} + t_2 = (t_0 + t_{\Pi}) + |\Delta r_{\text{ср0}} - \Delta r_{\text{срК}}|. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Как следует из (3.33), критерий задачи моторное время является постоянным и зависит только от граничного условия для Δr_{cp} , критерий задачи общее время непрерывно увеличивается по мере увеличения размеров пассивных участков. Двухкритериальная задача вырождена до однокритериальной, заключающейся в минимизации функции вида (3.3) по параметрам t_0 и t_{π} , которые должны быть минимальными.

Многочлен $A^2 + B^2$, учитывая соотношения (3.30), примет вид:

$$A^2 + B^2 = 4 \left(\sin^2 \frac{t_1}{2} + \sin^2 \frac{t_2}{2} \right) + 8 \sin \frac{t_1}{2} \sin \frac{t_2}{2} \cos \left(t_{\pi} + \frac{t_1 + t_2}{2} \right). \quad (3.34)$$

Определим предельные возможности коррекции малой полуоси эллипса относительного движения. Введём допущения, аналогичные (3.23) и приближённо определим многочлены А и В:

$$A \approx t_1 \sin t_{\pi},$$

$$B \approx t_1 \cos t_{\pi} + t_2.$$

Тогда многочлен $A^2 + B^2$ примет вид:

$$A^2 + B^2 = t_1^2 + 2t_1t_2 \cos t_{\pi} + t_2^2. \quad (3.35)$$

Как следует из уравнения (3.35), его предельное изменение достигается при t_{π} кратном 2π . Пусть:

$$t_{\pi} = 2\pi - \frac{t_1 + t_2}{2}. \quad (3.36)$$

Подставив (3.36) в (3.34), получим:

$$\lim (\max |l_0 - l_k|) = A^2 + B^2 = 4 \left(\sin \frac{t_1}{2} + \sin \frac{t_2}{2} \right)^2 \rightarrow 4. \quad (3.37)$$

Как следует из (3.37), наибольшее приращение малой полуоси эллипса относительного движения составит 4.

Определить конкретное значение размера пассивного участка, которое удовлетворяет заданному граничному условию для малой полуоси эллипса относительного движения, можно только численно по алгоритму:

1. Задаются граничные условия.

2. Размер участка ожидания t_0 задаётся нулевым.
3. Определяется серия оценок размера пассивного участка t_{π}^* с учётом размеров активных участков (3.10) из уравнения:

$$A^2 + B^2 = 4 \left(\sin^2 \frac{t_1}{2} + \sin^2 \frac{t_2}{2} \right) + 8 \sin \frac{t_1}{2} \sin \frac{t_2}{2} \cos \left(t_{\pi} + \frac{t_1 + t_2}{2} \right).$$

для решения которого используется приближение $t_{\pi} = 2\pi N$.

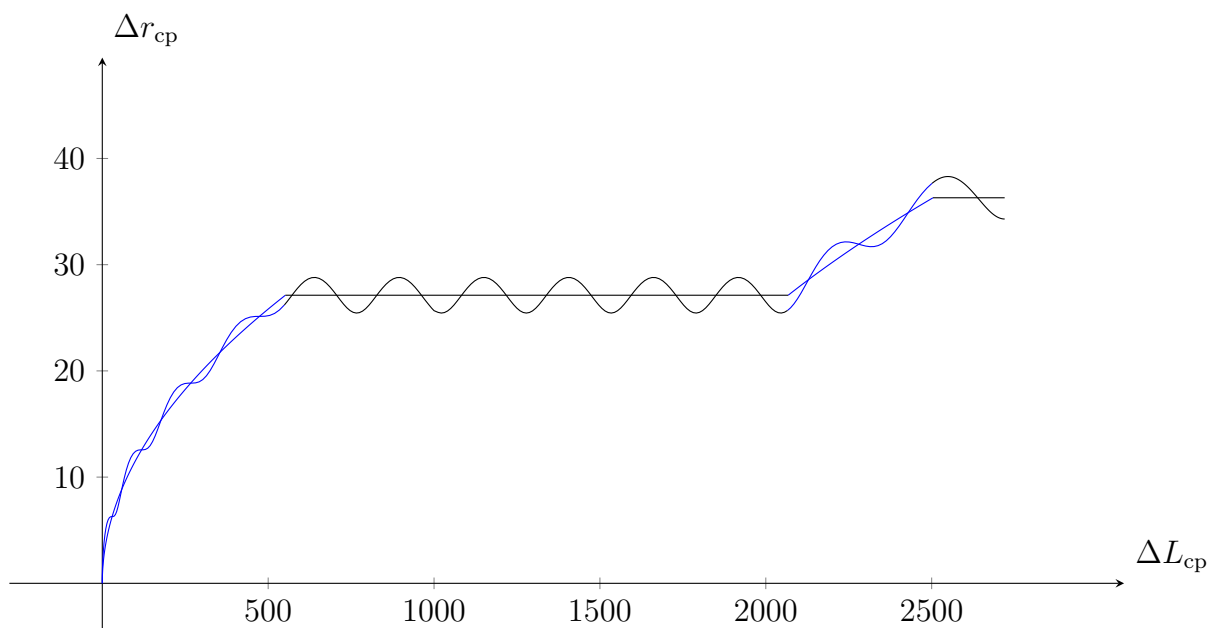
4. Определяется оценка размера участка ожидания из уравнения $\delta \sin(\varphi + t + \xi) = -1$, с учётом размеров активных участков (3.31) и размера пассивного участка t_{π}^* , определённого на третьем шаге.
5. Приближённое решение уточняется путём минимизации функции:

$$l^2 = l_0^2 + 2l_0 \sqrt{A^2 + B^2} \sin \left(\varphi_0 + t + \arctan \frac{B}{A} \right) + A^2 + B^2.$$

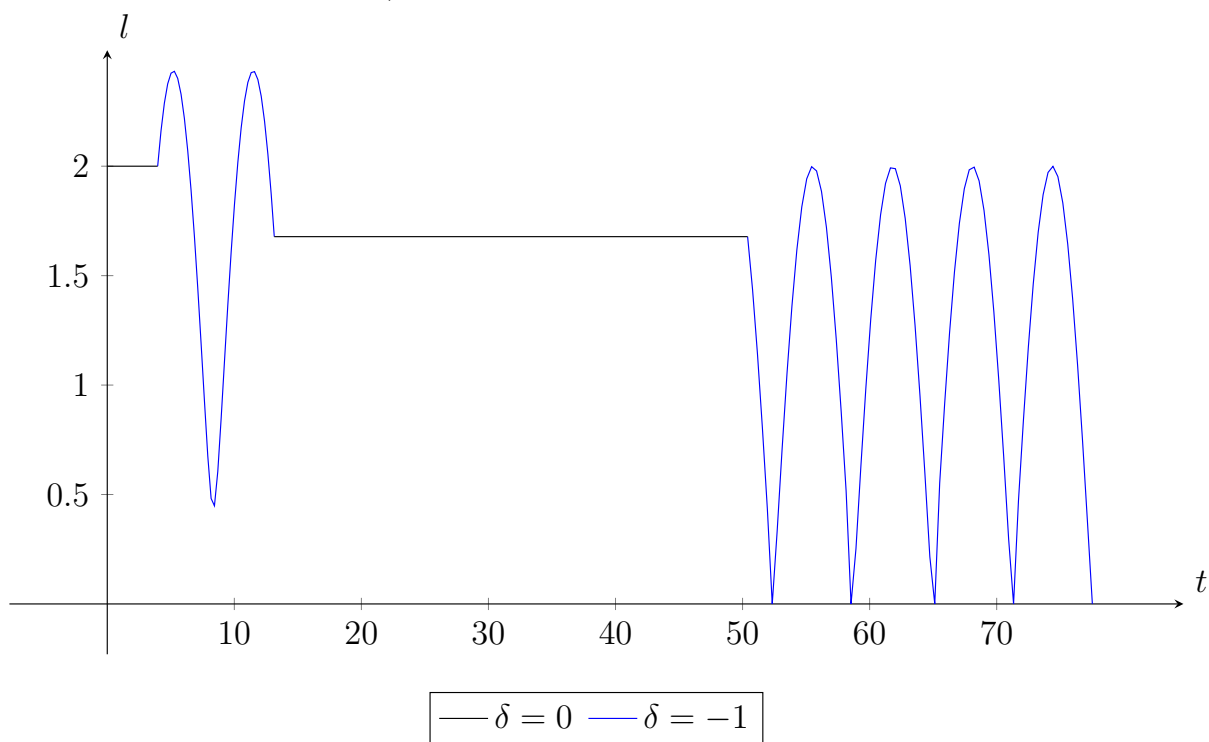
по параметрам t_0 и t_{π} , A и B определяются по (3.30), размеры активных участков по (3.31).

Так как при увеличении числа N моторное время не изменяется, а общее только увеличивается, то N должно быть минимальным.

На рисунке 3.5 приведён пример траектории для граничных условий 1В по таблице 2.2.



а) траектория векового движения



б) зависимость малой полуоси эллипса относительного движения от времени
 Рисунок 3.5 – Пример фазовой траектории в координатах $\Delta L_{\text{ср}} - \Delta r_{\text{ср}}$ (сверху) и зависимости малой полуоси эллипса относительного движения от времени (снизу), программа управления с двумя включениями тяги одного знака

3.2 Управление с тремя включениями тяги

Структуры управления с тремя включениями тяги показаны на рисунке 2.20. Программы управления с тремя включениями тяги содержат участки:

- участок ожидания, размер которого t_0 ;
- первый активный участок, размер которого t_1 ;
- первый пассивный участок, размер которого p_1 ;
- второй активный участок, размер которого t_2 ;
- второй активный участок, размер которого p_2 ;
- третий активный участок, размер которого t_3 ;

Следует отметить, что программа с одинаковым знаком тяги может быть применена только для граничных условий первой области (см. объяснения к рисунку 3.1).

3.2.1 Управление с одинаковым знаком тяги

Для рассматриваемой структуры управления определим интегралы A , B , C и D , получим:

$$\begin{aligned}
 A &= -\cos(t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3) + \cos(p_1 + t_2 + p_2 + t_3) - \\
 &\quad - \cos(t_2 + p_2 + t_3) + \cos(p_2 + t_3) - \cos(t_3) + 1, \\
 B &= \sin(t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3) - \sin(p_1 + t_2 + p_2 + t_3) - \\
 &\quad - \sin(t_2 + p_2 + t_3) + \sin(p_2 + t_3) + \sin(t_3), \\
 C &= t_1 + t_2 + t_3, \\
 D &= \frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{2} + t_1(p_1 + t_2 + p_2 + t_3) + t_2(p_2 + t_3).
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Многочлены C и D , определённые по (3.38), подставим в первые два уравнения системы (3.2), получим:

$$\begin{aligned}
 \Delta r_{\text{срк}} &= \Delta r_{\text{ср0}} + \delta(t_1 + t_2 + t_3), \\
 \Delta L_{\text{срк}} &= \Delta L_{\text{ср0}} - \frac{3}{2}\Delta r_{\text{ср0}}(t_0 + t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3) - \\
 &\quad - \frac{3}{2}\delta\left(\frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{2} + t_1(p_1 + t_2 + p_2 + t_3) + t_2(p_2 + t_3)\right).
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Из уравнений (3.39) определим соотношения, которые связывают граничные условия с параметрами управления, получим уравнения для размеров активных участков:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{3(\Delta r_{\text{cp0}}^2 - \Delta r_{\text{cpк}}^2) - 6t_2 p_2}{6(p_1 + p_2)} + \\
&+ \delta \frac{4(\Delta L_{\text{cp0}} - \Delta L_{\text{cpк}}) - 6\Delta r_{\text{cp0}}(t_0 + p_1 + p_2)}{6(p_1 + p_2)}, \\
t_2 &= \frac{3(\Delta r_{\text{cpк}}^2 - \Delta r_{\text{cp0}}^2) - 6t_2 p_1}{6(p_1 + p_2)} + \\
&+ \delta \frac{6\Delta r_{\text{cp0}} t_0 + 6\Delta r_{\text{cpк}}(p_1 + p_2) - 4(\Delta L_{\text{cp0}} - \Delta L_{\text{cpк}})}{6(p_1 + p_2)}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Знак ускорения от тяги на активных противоположен к (3.7).

Управление (3.40) обеспечивает удовлетворение граничных условий в части вековых составляющих движения первой области в любом их сочетании.

Запишем критерии задачи (3.5) для рассматриваемой структуры управления:

$$\begin{aligned}
t_{\text{мот}} &= t_1 + t_2 + t_2 = \text{const} = |\Delta r_{\text{cp0}} - \Delta r_{\text{cpк}}|, \\
t_{\text{общ}} &= t_0 + t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3 = \\
&= (t_0 + p_1 + p_2) + |\Delta r_{\text{cp0}} - \Delta r_{\text{cpк}}|.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Как следует из (3.41), критерий задачи моторное время является постоянным и зависит только от граничного условия для Δr_{cp} , критерий задачи общее время непрерывно увеличивается. Таким образом, многокритериальная оптимизационная задача сводится к единственному решению, которое удовлетворяет граничным условиям.

Для решения этой задачи необходимо подобрать строго определённые размеры пассивных участков, которые удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned}
|l_0 - l_{\text{к}}| &= \sqrt{A^2 + B^2}, \\
-1 &= \sin\left(\varphi_0 + t + \arctan \frac{B}{A}\right).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Здесь A и B определяются по (3.38). Пусть размеры активных участков малы, таким образом можно записать $\sin t_i = t_i$, $\cos t_i = 1$, здесь i – номер активного участка. Приближённо многочлены A и B определяются:

$$\begin{aligned}
A &\approx t_1 \sin(p_1 + p_2) + t_2 \sin p_2, \\
B &\approx t_1 \cos(p_1 + p_2) + t_2 \cos p_2 + t_3.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Определим предельное приращение малой полуоси эллипса относительного движения. Рассмотрим первое уравнение системы (3.42), учитывая (3.43). Воспользуемся необходимым условием экстремума функции нескольких переменных. Запишем частные производные первого уравнения системы (3.42) по размерам пассивных участков, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_1} (A^2 + B^2) &= -2t_1 t_2 \sin p_1 - 2t_1 t_3 \sin (p_1 + p_2), \\ \frac{\partial}{\partial p_2} (A^2 + B^2) &= -2t_2 t_3 \sin p_2 - 2t_1 t_3 \sin (p_1 + p_2),\end{aligned}$$

Приравняв к нулю правые части последних уравнений, получим критические точки:

$$\begin{aligned}\text{точка 1 : } p_1 &= \pi N, & p_2 &= \pi N; \\ \text{точка 2 : } p_1 &= \pi N, & p_2 &= \pi(N + 1); \\ \text{точка 3 : } p_1 &= \pi(N + 1), & p_2 &= \pi N.\end{aligned}\tag{3.44}$$

Здесь N – целое число витков на пассивных участках. Как следует из (3.44), продолжительности пассивных участков, обеспечивающие предельное приращение малой полуоси эллипса относительного движения взаимосвязаны. Они могут быть равными (точка 1), и отличными по размеру на π (точки 2 и 3).

В таблице 3.1 показан многочлен $A^2 + B^2$ в точках (3.44).

Таблица 3.1 – Предельные значения приращения малой полуоси эллипса относительного движения в критических точках для программы управления с тремя включениями тяги одинакового знака

Номер	Многочлен $A^2 + B^2 = l_0 - l_k $	$\max l_0 - l_k $
1. Точка 1, $p_1 = \pi N, p_2 = \pi N, N -$ нечётное	$10 - 4 \cos(t_1) + 4 \cos(t_1 + t_2) - 8 \cos(t_2) +$ $+ 4 \cos(t_2 + t_3) - 4 \cos(t_3) -$ $- 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	6
2. Точка 1, $p_1 = \pi N, p_2 = \pi N, N -$ чётное	$2 - 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	2
3. Точка 2, $p_1 = \pi N, p_2 = \pi(N + 1), N -$ нечётное	$6 - 4 \cos(t_1) - 4 \cos(t_2 + t_3) +$ $+ 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	4
4. Точка 2, $p_1 = \pi N, p_2 = \pi(N + 1), N -$ чётное	$6 - 4 \cos(t_1 + t_2) - 4 \cos(t_3)$ $+ 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	4
5. Точка 3, $p_1 = \pi(N + 1), p_2 = \pi N, N -$ нечётное	$6 - 4 \cos(t_1 + t_2) - 4 \cos(t_3)$ $+ 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	4
6. Точка 3, $p_1 = \pi(N + 1), p_2 = \pi N, N -$ чётное	$6 - 4 \cos(t_1) - 4 \cos(t_2 + t_3) +$ $+ 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	4

Как следует из таблицы 3.1, максимальное приращение малой полуоси эллипса относительного движения составляет 6, что достигается при равной продолжительности пассивных участков кратной π .

Проведённый анализ позволяет составить алгоритм решения задачи:

1. Задаются граничные условия.
2. Размер участка ожидания t_0 и второго активного участка t_2 задаётся нулевым.
3. Выбирается комбинация размеров пассивных участков (3.44).
4. Определяется оценка размеров пассивных участков p_1^* и p_2^* как:

$$p_1, p_2 = \arg \min \left(|l_0 - l_k| - \sqrt{A^2 + B^2} \right).$$

Используется приближение, выбранное на 3 шаге. Размеры первого и третьего активных участков определяются по (3.40). Многочлены А и В определяются по (3.38).

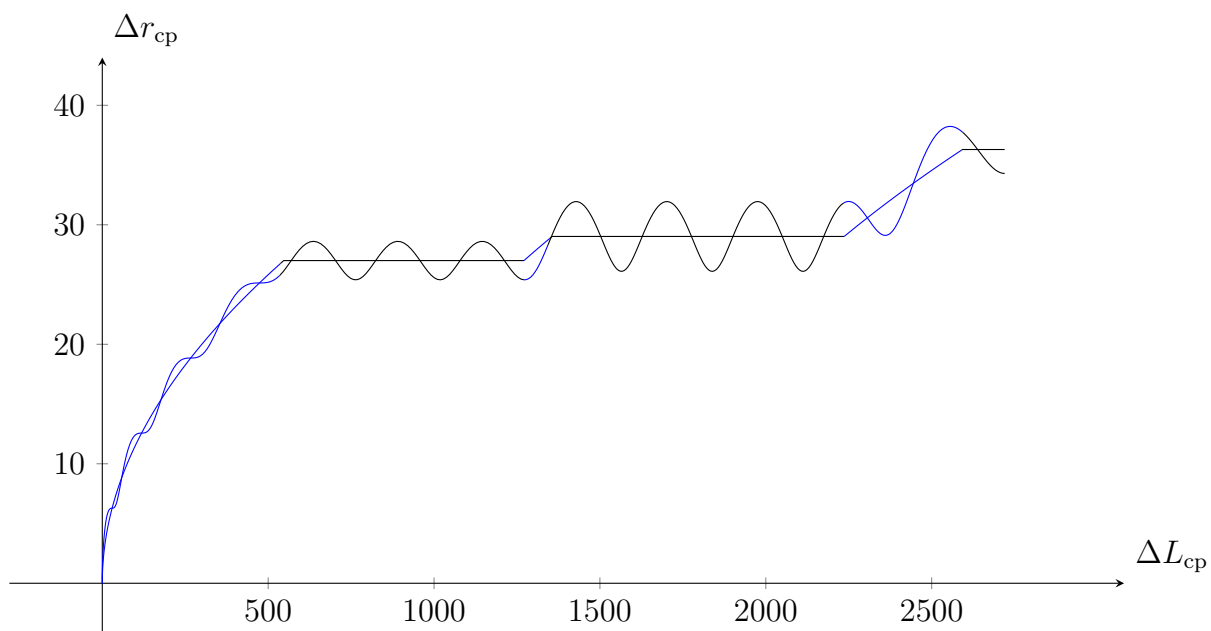
5. Определяется оценка размера участка ожидания t_0^* и второго активного участка t_2^* :

$$t_0, t_2 = \arg \min \left[\delta \sin \left(\varphi_0 + t_0 + t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3 + \arctan \frac{B}{A} \right) - 1 \right].$$

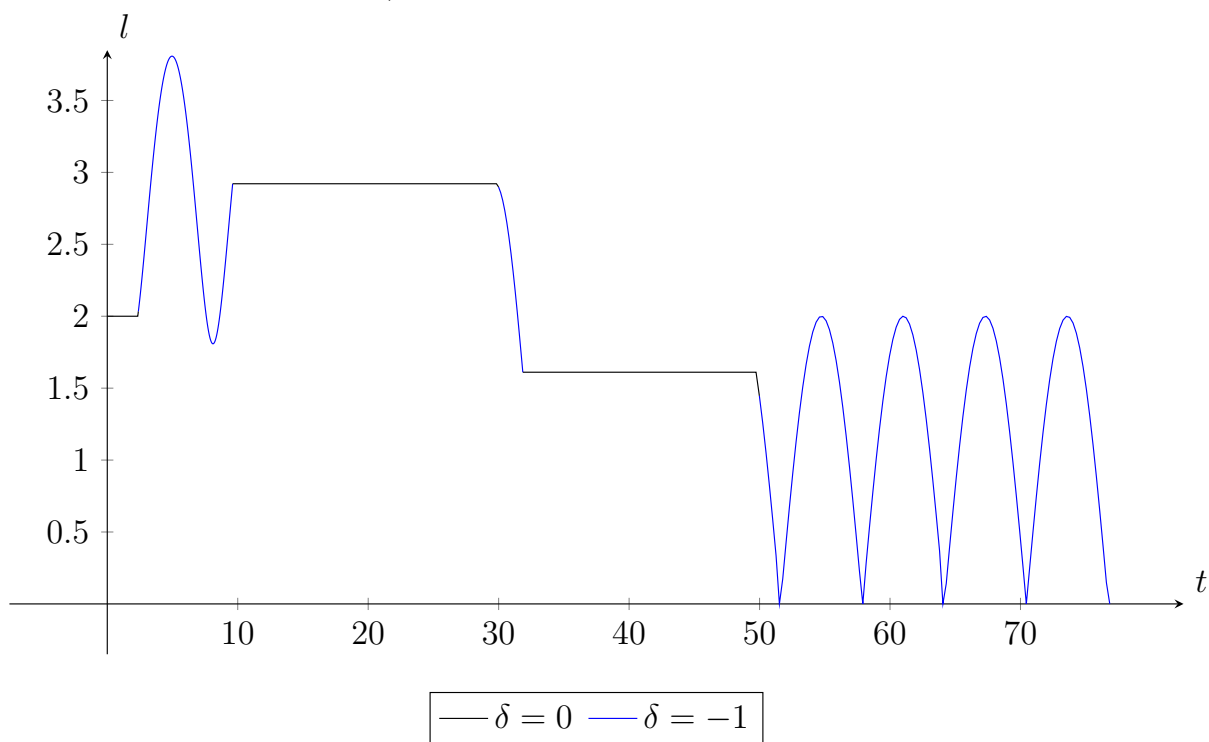
При этом t_0 ограничено интервалом $0 \dots 2\pi$, а t_2 ограничено условием неотрицательности размеров активных участков.

6. Найденное приближённое решение уточняется численно путём минимизации функции вида (3.20).

На рисунке 3.6 приведён пример траектории для граничных условий 1В по таблице 2.2..



а) траектория векового движения



б) зависимость малой полуоси эллипса относительного движения от времени
 Рисунок 3.6 – Пример фазовой траектории в координатах $\Delta L_{cp} - \Delta r_{cp}$ (сверху) и зависимости малой полуоси эллипса относительного движения от времени (снизу), программа управления с тремя включениями тяги одного знака

3.2.2 Управление со структурой «разгон и два торможения»

Структура управления показана на рисунке 2.20.

Для рассматриваемой структуры управления определим многочлены A , B , C и D , получим:

$$\begin{aligned}
 A &= -\cos(t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3) + \cos(p_1 + t_2 + p_2 + t_3) + \\
 &\quad + \cos(t_2 + p_2 + t_3) - \cos(p_2 + t_3) + \cos(t_3) - 1, \\
 B &= \sin(t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3) - \sin(p_1 + t_2 + p_2 + t_3) - \\
 &\quad - \sin(t_2 + p_2 + t_3) + \sin(p_2 + t_3) - \sin(t_3), \\
 C &= t_1 - t_2 - t_3, \\
 D &= \frac{t_1^2 - t_2^2 - t_3^2}{2} + t_1(p_1 + t_2 + p_2 + t_3) - t_2(p_2 + t_3).
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Многочлены C и D , определённые по (3.45), подставим в первые два уравнения системы (3.2), получим:

$$\begin{aligned}
 \Delta r_{\text{срк}} &= \Delta r_{\text{ср0}} + \delta(t_1 - t_2 - t_3), \\
 \Delta L_{\text{срк}} &= \Delta L_{\text{ср0}} - \frac{3}{2}\Delta r_{\text{ср0}}(t_0 + t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3) - \\
 &\quad - \frac{3}{2}\delta\left(\frac{t_1^2 - t_2^2 - t_3^2}{2} + t_1(p_1 + t_2 + p_2 + t_3) - t_2(p_2 + t_3)\right).
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Из уравнений (3.46) определим соотношения, которые связывают граничные условия с параметрами управления, получим уравнения для длительностей активных участков:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= -\delta\Delta r_{\text{ср0}} - \frac{p_1 + p_2}{2} + \\
 &\quad + \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2 + 2p_2(p_1 + 2t_2)}{4} + \delta(\mathbf{L} - \Delta r_{\text{ср0}}t_0) + \mathbf{R}}, \\
 t_2 &= -\delta\Delta r_{\text{срк}} - \frac{p_1 + p_2 + 2t_2}{2} + \\
 &\quad + \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2 + 2p_2(p_1 + 2t_2)}{4} + \delta(\mathbf{L} - \Delta r_{\text{ср0}}t_0) + \mathbf{R}},
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Знак ускорения от тяги на первом активном участке определяется по (3.7), затем изменяется в соответствии со структурой программы.

Управление (3.47) обеспечивает удовлетворение граничных условий в части вековых составляющих движения в любом их сочетании.

Для удовлетворения граничного условия для малой полуоси эллипса относительного движения необходимо подобрать строго определённые размеры пассивных участков, которые удовлетворяют системе уравнений, аналогичной (3.42), в которой многочлены A и B определяются по (3.45).

Решить эту задачу можно только численно. Определим приближение к решению. Пусть размеры активных участков малы, таким образом можно записать $\sin t_i = t_i$, $\cos t_i = 1$, здесь i – номер активного участка. Приблизённо многочлены A и B определяются:

$$\begin{aligned} A &\approx t_1 \sin(p_1 + p_2) - t_2 \sin p_2, \\ B &\approx t_1 \cos(p_1 + p_2) - t_2 \cos p_2 + t_3. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Как и для случая управления с тремя включениями тяги одинакового знака, определим частные производные многочлена $A^2 + B^2$ по размерам пассивных участков:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_1} (A^2 + B^2) &= 2t_1 t_2 \sin p_1 - 2t_1 t_3 \sin(p_1 + p_2), \\ \frac{\partial}{\partial p_2} (A^2 + B^2) &= 2t_2 t_3 \sin p_2 - 2t_1 t_3 \sin(p_1 + p_2), \end{aligned}$$

Приравняв к нулю правые части последних уравнений, получим критические точки:

$$\begin{aligned} \text{точка 1 : } p_1 &= \pi N, & p_2 &= \pi N; \\ \text{точка 2 : } p_1 &= \pi N, & p_2 &= \pi(N + 1); \\ \text{точка 3 : } p_1 &= \pi(N + 1), & p_2 &= \pi N. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Здесь N – целое число витков на пассивном участке.

В таблице 3.2 определим многочлен $A^2 + B^2$ (3.45) в точках (3.49).

Как следует из таблицы 3.2, максимальное приращение малой полуоси эллипса относительного движения составляет 6, что достигается при отличающейся на π продолжительности пассивных участков.

Таблица 3.2 – Пределные значения приращения малой полуоси эллипса относительного движения в критических точках для программы управления с тремя включениями тяги, структура "разгон и два торможения"

Номер	Многочлен $A^2 + B^2 = l_0 - l_k $	$\max l_0 - l_k $
1. Точка 1, $p_1 = \pi N, p_2 = \pi N, N$ – нечётное	$6 - 4 \cos(t_1 + t_2) - 4 \cos(t_3) +$ $+ 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	4
2. Точка 1, $p_1 = \pi N, p_2 = \pi N, N$ – чётное	$6 - 4 \cos(t_1) - 4 \cos(t_2 + t_3) +$ $+ 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	4
3. Точка 2, $p_1 = \pi N, p_2 = \pi(N + 1), N$ – нечётное	$2 - 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	2
4. Точка 2, $p_1 = \pi N, p_2 = \pi(N + 1), N$ – чётное	$10 - 8 \cos(t_2) - 4 \cos(t_1) + 4 \cos(t_1 + t_2) +$ $+ 4 \cos(t_2 + t_3) - 4 \cos(t_3) -$ $- 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	6
5. Точка 3, $p_1 = \pi(N + 1), p_2 = \pi N, N$ – нечётное	$10 - 4 \cos(t_1) + 4 \cos(t_1 + t_2) - 8 \cos(t_2) -$ $- 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3) +$ $+ 4 \cos(t_2 + t_3) - 4 \cos(t_3)$	6
6. Точка 3, $p_1 = \pi(N + 1), p_2 = \pi N, N$ – чётное	$2 - 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	2

Проведённый анализ позволяет составить АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задаются граничные условия.
2. Размер участка ожидания t_0 и второго активного участка t_2 задаётся нулевым.
3. Выбирается комбинация размеров пассивных участков (3.49), ограниченных условием неотрицательности размеров активных участков.
4. Определяется оценка размеров пассивных участков p_1^* и p_2^* как:

$$p_1, p_2 = \arg \min \left(|l_0 - l_k| - \sqrt{A^2 + B^2} \right).$$

Используется приближение, выбранное на 3 шаге. Размеры первого и третьего активных участков определяются по (3.47). Многочлены А и В определяются по (3.45).

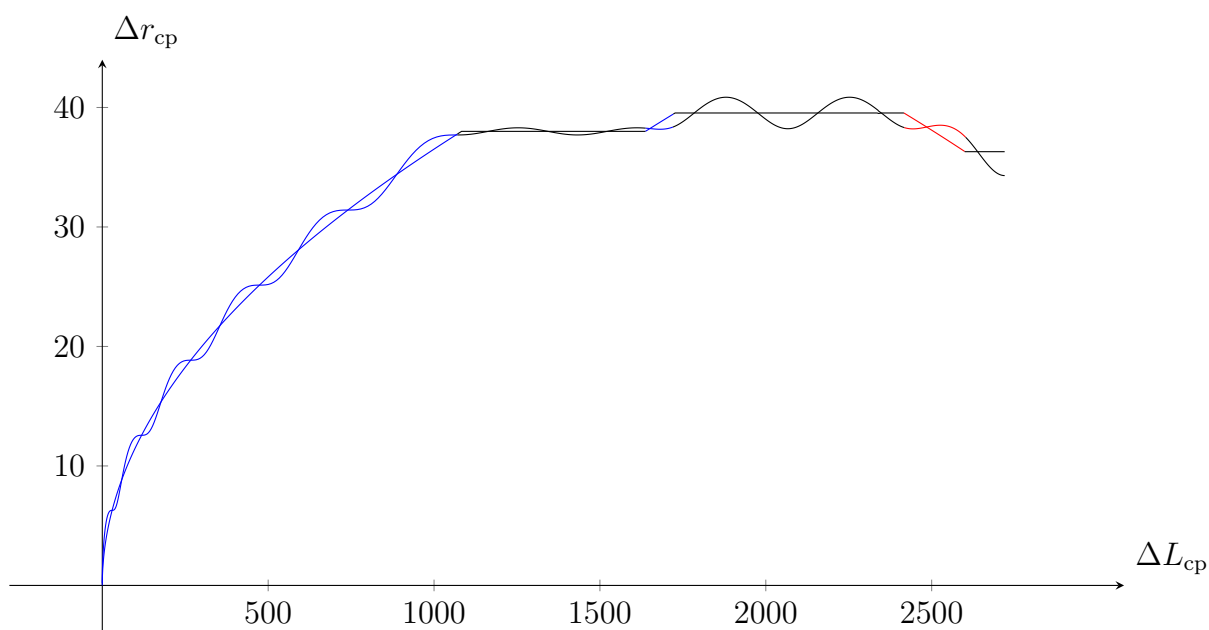
5. Определяется оценка размера участка ожидания t_0^* и второго активного участка t_2^* :

$$t_0, t_2 = \arg \min \left[\delta \sin \left(\varphi_0 + t_0 + t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3 + \arctan \frac{B}{A} \right) - 1 \right].$$

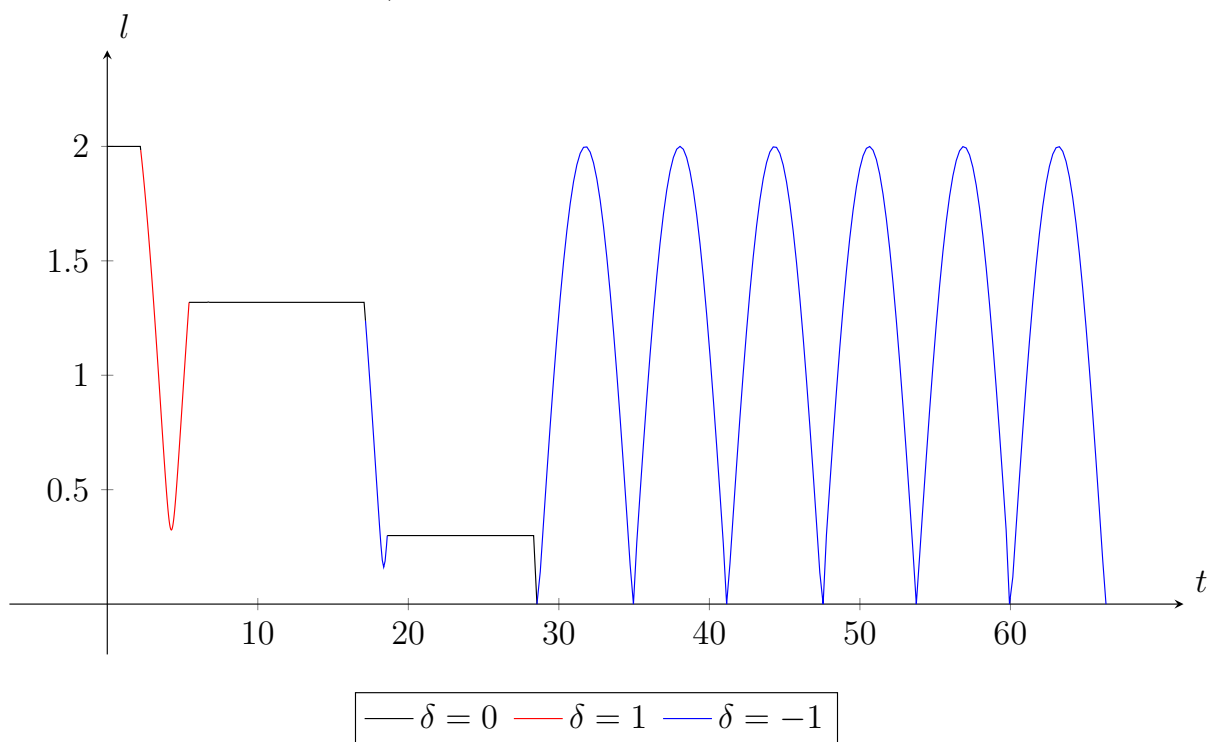
При этом t_0 ограничено интервалом $0 \dots 2\pi$, а t_2 ограничено условием неотрицательности продолжительностей активных участков (проверяется численно).

6. Найденное приближённое решение уточняется численно путём минимизации функции вида (3.20).

На рисунке 3.7 приведён пример траектории для граничных условий 1В по таблице 2.2.



а) траектория векового движения



б) зависимость малой полуоси эллипса относительного движения от времени
 Рисунок 3.7 – Пример фазовой траектории в координатах $\Delta L_{cp} - \Delta r_{cp}$ (сверху) и зависимости малой полуоси эллипса относительного движения от времени (снизу), программа управления с тремя включениями тяги, структура "разгон и два торможения"

3.2.3 Управление со структурой «два разгона и торможение»

Структура управления показана на рисунке 2.20. Для рассматриваемой структуры управления определим многочлены A , B , C и D , получим:

$$\begin{aligned}
 A &= -\cos(t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3) + \cos(p_1 + t_2 + p_2 + t_3) - \\
 &\quad - \cos(t_2 + p_2 + t_3) + \cos(p_2 + t_3) + \cos(t_3) - 1, \\
 B &= \sin(t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3) - \sin(p_1 + t_2 + p_2 + t_3) + \\
 &\quad + \sin(t_2 + p_2 + t_3) - \sin(p_2 + t_3) - \sin(t_3), \\
 C &= t_1 + t_2 - t_3, \\
 D &= \frac{t_1^2 + t_2^2 - t_3^2}{2} + t_1(p_1 + t_2 + p_2 + t_3) + t_2(p_2 + t_3).
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Многочлены C и D , определённые по (3.50), подставим в первые два уравнения системы (3.2), получим:

$$\begin{aligned}
 \Delta r_{\text{срк}} &= \Delta r_{\text{ср0}} + \delta(t_1 + t_2 - t_3), \\
 \Delta L_{\text{срк}} &= \Delta L_{\text{ср0}} - \frac{3}{2}\Delta r_{\text{ср0}}(t_0 + t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3) - \\
 &\quad - \frac{3}{2}\delta\left(\frac{t_1^2 + t_2^2 - t_3^2}{2} + t_1(p_1 + t_2 + p_2 + t_3) + t_2(p_2 + t_3)\right).
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Из уравнений (3.51) определим соотношения, которые связывают граничные условия с параметрами управления, получим уравнения для длительностей активных участков:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= -\delta\Delta r_{\text{ср0}} - \frac{p_1 + p_2 + 2t_2}{2} + \\
 &\quad + \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2 + 2p_2(p_1 + 2t_2)}{4} + \delta(\mathbf{L} - \Delta r_{\text{ср0}}t_0) + \mathbf{R}}, \\
 t_2 &= -\delta\Delta r_{\text{срк}} - \frac{p_1 + p_2}{2} + \\
 &\quad + \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2 + 2p_2(p_1 + 2t_2)}{4} + \delta(\mathbf{L} - \Delta r_{\text{ср0}}t_0) + \mathbf{R}},
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Знак ускорения от тяги на первом активном участке определяется по (3.7), затем изменяется в соответствии со структурой программы.

Управление (3.52) обеспечивает удовлетворение граничных условий в части вековых составляющих движения в любом их сочетании.

Для удовлетворения граничного условия для малой полуоси эллипса относительного движения необходимо подобрать строго определённые размеры пассивных участков, которые удовлетворяют системе уравнений, аналогичной (3.42), в которой многочлены A и B определяются по (3.50).

Решить эту задачу можно только численно. Определим приближение к решению. Пусть размеры активных участков малы, таким образом можно записать $\sin t_i = t_i$, $\cos t_i = 1$, здесь i – номер активного участка. Приблизённо многочлены A и B определяются:

$$\begin{aligned} A &\approx t_1 \sin(p_1 + p_2) + t_2 \sin p_2, \\ B &\approx t_1 \cos(p_1 + p_2) + t_2 \cos p_2 - t_3. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Как и для случая управления с тремя включениями тяги одинакового знака, определим частные производные многочлена $A^2 + B^2$ по размерам пассивных участков:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_1} (A^2 + B^2) &= -2t_1 t_2 \sin p_1 + 2t_1 t_3 \sin(p_1 + p_2), \\ \frac{\partial}{\partial p_2} (A^2 + B^2) &= 2t_2 t_3 \sin p_2 + 2t_1 t_3 \sin(p_1 + p_2), \end{aligned}$$

Приравняв к нулю правые части последних уравнений, получим критические точки:

$$\begin{aligned} \text{точка 1 : } p_1 &= \pi N, & p_2 &= \pi N; \\ \text{точка 2 : } p_1 &= \pi N, & p_2 &= \pi(N + 1); \\ \text{точка 3 : } p_1 &= \pi(N + 1), & p_2 &= \pi N. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Здесь N – целое число витков на пассивном участке.

В таблице 3.3 определим многочлен $A^2 + B^2$ (3.50) в точках (3.54).

Таблица 3.3 – Пределные значения приращения малой полуоси эллипса относительного движения в критических точках для программы управления с тремя включениями тяги, структура "разгон и два торможения"

Номер	Многочлен $A^2 + B^2 = l_0 - l_k $	$\max l_0 - l_k $
1. Точка 1, $p_1 = \pi N, p_2 = \pi N, N$ – нечётное	$6 - 4 \cos(t_1) - 4 \cos(t_2 + t_3) +$ $+ 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	4
2. Точка 1, $p_1 = \pi N, p_2 = \pi N, N$ – чётное	$6 - 4 \cos(t_1 + t_2) - 4 \cos(t_3) +$ $+ 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	4
3. Точка 2, $p_1 = \pi N, p_2 = \pi(N + 1), N$ – нечётное	$10 + 4 \cos(t_1 + t_2) - 8 \cos(t_2) - 4 \cos(t_1) -$ $- 4 \cos(t_3) + 4 \cos(t_2 + t_3) -$ $- 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	6
4. Точка 2, $p_1 = \pi N, p_2 = \pi(N + 1), N$ – чётное	$2 - 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	2
5. Точка 3, $p_1 = \pi(N + 1), p_2 = \pi N, N$ – нечётное	$2 - 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	2
6. Точка 3, $p_1 = \pi(N + 1), p_2 = \pi N, N$ – чётное	$10 + 4 \cos(t_1 + t_2) - 8 \cos(t_2) - 4 \cos(t_1) -$ $- 4 \cos(t_3) + 4 \cos(t_2 + t_3) -$ $- 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3)$	6

Проведённый анализ позволяет составить АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задаются граничные условия.
2. Размер участка ожидания t_0 и второго активного участка t_2 задаётся нулевым.
3. Выбирается комбинация продолжительностей пассивных участков (3.49).
4. Определяется оценка размеров пассивных участков p_1^* и p_2^* как:

$$p_1, p_2 = \arg \min \left(|l_0 - l_k| - \sqrt{A^2 + B^2} \right).$$

Используется приближение, выбранное на 3 шаге. Размеры первого и третьего активных участков определяются по (3.52). Многочлены А и В определяются по (3.50).

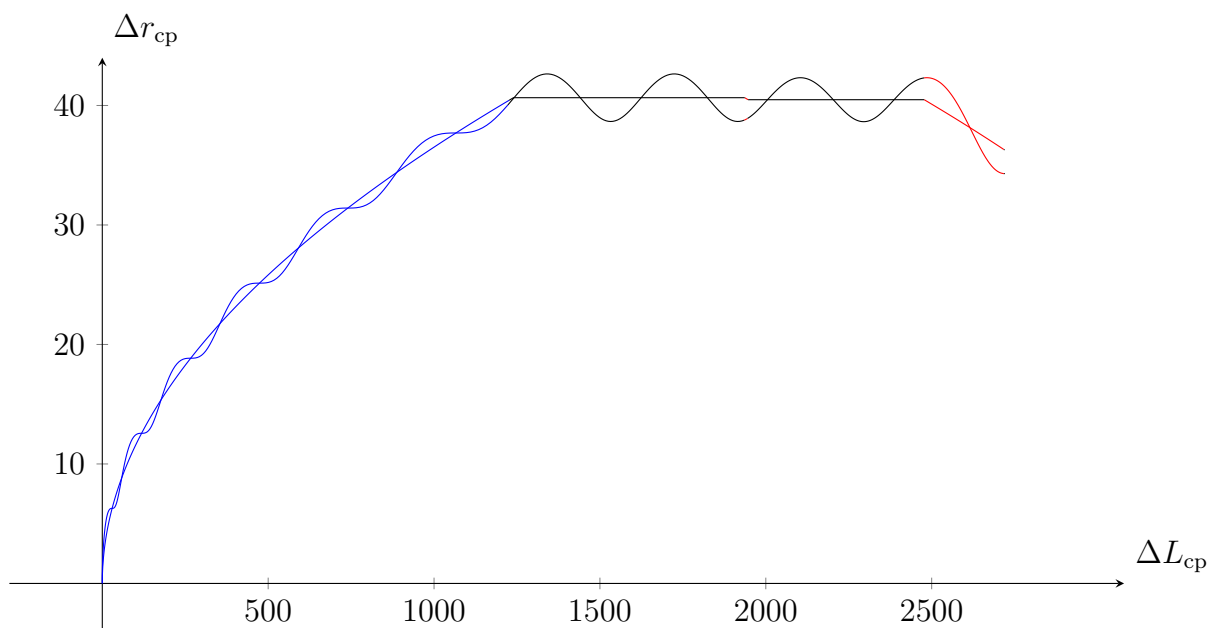
5. Определяется оценка размера участка ожидания t_0^* и второго активного участка t_2^* :

$$t_0, t_2 = \arg \min \left[\delta \sin \left(\varphi_0 + t_0 + t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3 + \arctan \frac{B}{A} \right) - 1 \right].$$

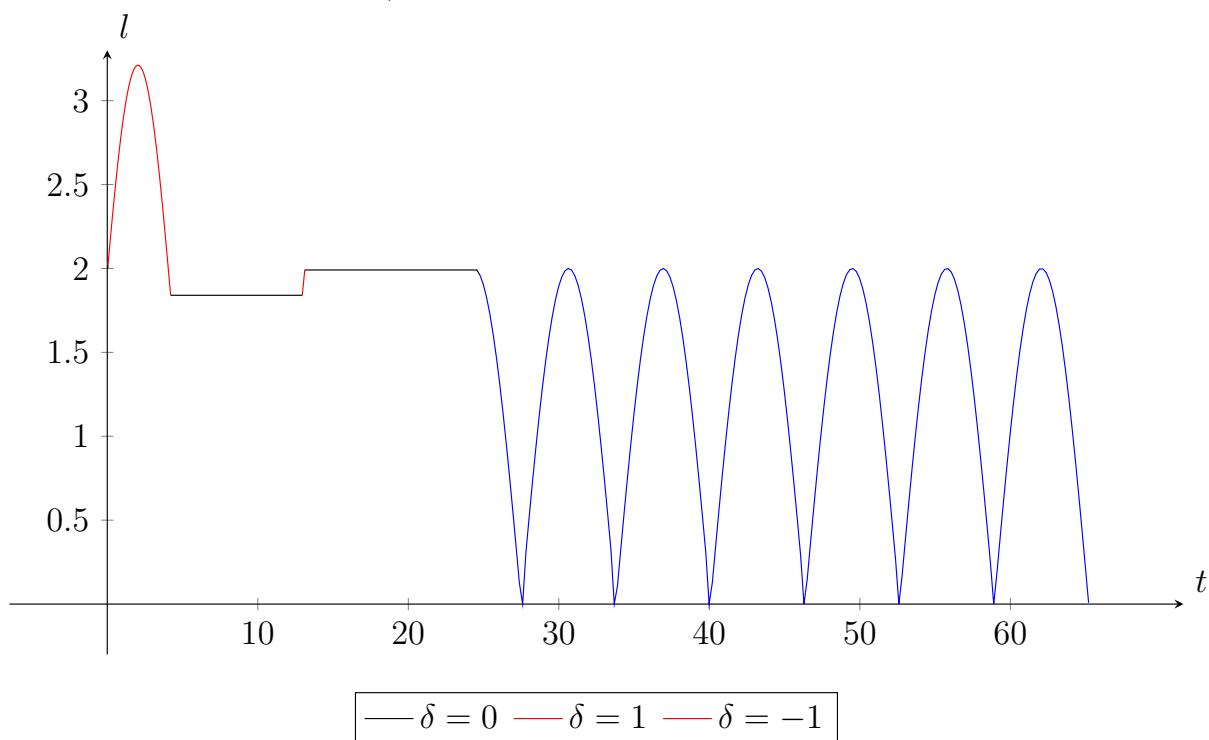
При этом t_0 ограничено интервалом $0 \dots 2\pi$, а t_2 ограничено условием не отрицательности размеров активных участков (проверяется численно).

6. Найденное приближённое решение уточняется численно путём минимизации функции вида (3.20).

На рисунке 3.9 приведён пример траектории для граничных условий 1В по таблице 2.2.



а) траектория векового движения



б) зависимость малой полуоси эллипса относительного движения от времени

Рисунок 3.8 – Пример фазовой траектории в координатах $\Delta L_{cp} - \Delta r_{cp}$ (сверху) и зависимости малой полуоси эллипса относительного движения от времени (снизу), программа управления с тремя включениями тяги, структура "разгон и два торможения"

3.3 Сравнение результатов параметрической оптимизации с оптимальными решениями

Сравним результаты решения задачи с применением параметрических программ управления с оптимальными. Решим задачу для граничных условий 1Б и 1В по таблице 2.2. Выпишем эти условия:

условия 1В

$$\Delta r_{\text{ср}_0} = 36,3 \quad \Delta L_{\text{ср}_0} = 2720, \quad l_0 = 2, \quad \varphi_0 = 0;$$

$$\Delta r_{\text{ср}_k} = 0, \quad \Delta L_{\text{ср}_k} = 0, \quad l_k = 0, \quad -;$$

(3.55)

условия 1Б

$$\Delta r_{\text{ср}_0} = 18,15 \quad \Delta L_{\text{ср}_0} = 1360, \quad l_0 = 5, \quad \varphi_0 = 0;$$

$$\Delta r_{\text{ср}_k} = 0, \quad \Delta L_{\text{ср}_k} = 0, \quad l_k = 0, \quad -;$$

На рисунке 3.9 точками показано множество Парето, полученное в результате решения задач параметрической оптимизации, сплошной линией показаны оптимальные решения задачи, полученные методом принципа максимума Понтрягина для соответствующих граничных условий во второй главе.

В таблице 3.4 и 3.5 показаны решения задач для граничных условий (3.55).

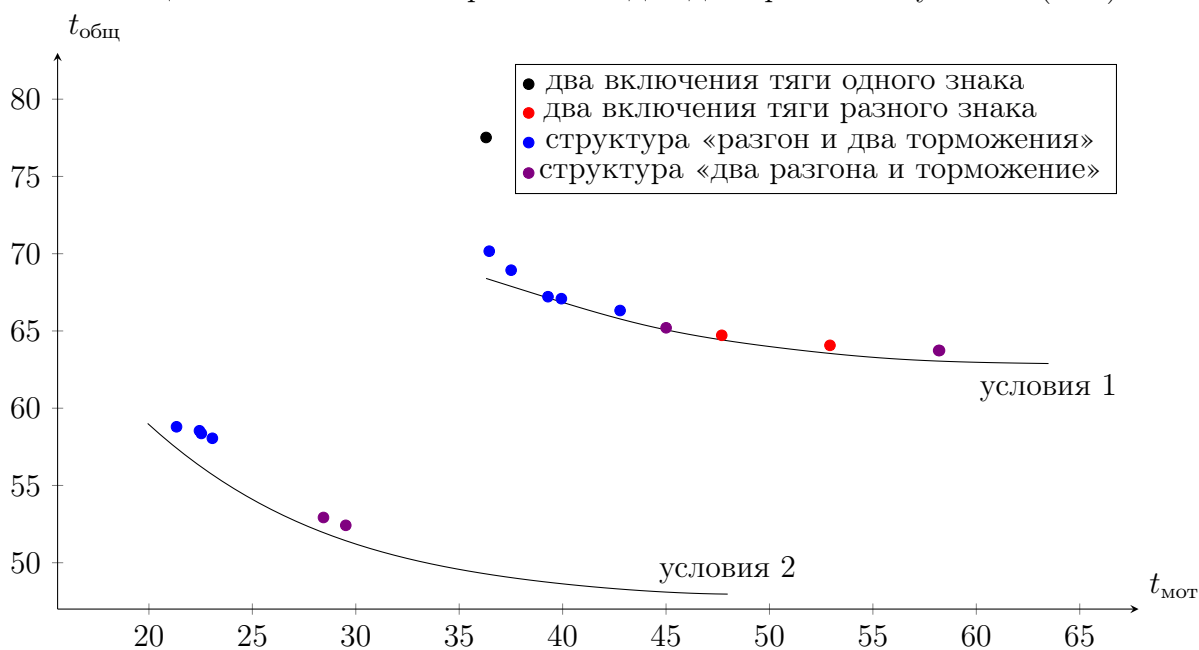


Рисунок 3.9 – Множества Парето для граничных условий (3.55)

Таблица 3.4 – Решения задачи (3.55), условия 1

№	$t_{\text{мот}}$	$t_{\text{общ}}$	t_0	t_1	p_1	t_2	p_2	t_3
1. Два включения тяги одного знака								
1.1	36.3	77.5215	3.9673	9.1762	37.2542	27.1238	–	–
2. Два включения тяги разного знака								
2.1	52.9249	64.0684	1.8321	8.3124	9.3114	44.6124	–	–
2.2	47.6924	64.7180	1.1433	5.6962	15.8823	41.9962	–	–
3. Три включения тяги одного знака								
3.1	36.3	76.7347	2.3357	7.2753	20.2221	2.0199	17.8769	27.0048
4. Три включения тяги, структура «разгон и два торможения»								
4.1	39.9400	67.0889	2.4406	1.8200	12.9269	0.9702	11.7814	37.1498
4.2	36.4521	70.1626	3.2696	0.0760	13.0479	4.4296	17.3930	31.9465
4.3	39.2919	67.2170	2.0744	1.4959	14.5746	0.7723	11.2761	37.0236
4.4	42.7786	66.3222	2.1942	3.2393	11.6279	1.5397	9.7215	37.9996
4.5	37.5111	68.9333	2.4364	0.6056	15.2091	3.4856	13.7767	33.4199
5. Три включения тяги, структура «два разгона и торможение»								
5.1	58.2201	63.7354	2.0055	10.9339	0.1692	0.0261	3.3406	47.2600
5.2	45.0031	65.2044	0.0279	4.1843	8.7422	0.1672	11.4312	40.6515
5.3	58.1795	63.7351	1.9899	7.6738	0.0273	3.2659	3.5383	47.2397

Таблица 3.5 – Решения задачи (3.55), условия 2

№	$t_{\text{мот}}$	$t_{\text{общ}}$	t_0	t_1	p_1	t_2	p_2	t_3
1. Три включения тяги, структура «разгон и два торможения»								
1.1	23.0673	58.0539	8.1998	2.4586	13.0237	3.9383	13.7631	16.6703
1.2	22.5335	58.3663	2.5176	2.1918	17.7581	4.2291	15.5571	16.1126
1.3	22.4432	58.5408	1.6922	2.1466	13.8164	3.3804	20.5890	16.9162
1.4	21.3342	58.7977	2.4794	1.5921	18.9453	3.3689	16.0388	16.3732
2. Три включения тяги, структура «два разгона и торможение»								
2.1	29.5162	52.4201	1.9068	2.4868	9.9095	3.1962	11.0877	23.8331
2.2	28.4387	52.9276	2.1356	1.9731	9.6855	3.1713	12.6677	23.2944

Как следует из рисунка 3.9, с одной стороны полученные решения задачи не являются оптимальными, так как они не лежат на кривых оптимальных решений, с другой стороны проигрыш по критериям составляет величину не более 3-5%, что с технической точки зрения не является принципиальным.

Проигрыш по критериям можно объяснить тем, что структура управления в оптимальных решениях ограничена только ориентацией тяги – трансверсальная, в параметрических программах введено ограничение на количество включения тяги – два или три.

ВЫВОДЫ ПО ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ

1. Для параметрических программ управления относительным движением с трансверсальной ориентацией вектора тяги с двумя и тремя включениями тяги получены аналитические соотношения для расчёта размеров активных участков как функции граничных условий и размеров пассивных участков, которые удовлетворяют граничные условия в части вековых составляющих движения в любом их сочетании.
2. Для параметрических программ управления обоснован оптимальный размер пассивных участков, который обеспечивает предельное изменение малой полуоси эллипса относительного движения. На основании проведённого анализа выявлено:
 - для программ управления с двумя включениями тяги оно составляет величину от нуля (без изменения) до 4;
 - для программ управления с тремя включениями тяги оно составляет величину от нуля (без изменения) до 6.
3. На основании проведённого анализа разработан алгоритм расчёта необходимого размера пассивных участков, обеспечивающего удовлетворение граничного условия для малой полуоси эллипса относительного движения.
4. Разработанный алгоритм позволяет получить несколько возможных решений задачи, из которых выбираются оптимальные по Парето в критериях минимум моторного времени и минимум общего времени.
5. Проведено сравнение результатов оптимизации размеров активных участков параметрических программ управления с оптимальными решениями, полученными методом принципа максимума Понтрягина, показавшее близость параметрических решений к оптимальным по введённым критериям – моторное и общее время.

4 ЗАДАЧА ПРИВЕДЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ В ТОЧКУ СТОЯНИЯ ГЕОСТАЦИОНАРНОЙ ОРБИТЫ

В главе диссертации рассматривается задача приведения космического аппарата в точку стояния геостационарной орбиты в двухкритериальной постановке для различных начальных условий движения. Приводится сравнение результатов, полученных с применением параметрических программ, с результатами, полученными другими авторами. Проведено моделирование относительного движения на исходной модели с учётом возмущений.

Выпишем безразмерную математическую модель движения для случая трансверсальной ориентации ускорения от тяги:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{r}_{\text{cp}} &= \delta, \\ \Delta \dot{L}_{\text{cp}} &= -\frac{3}{2} \Delta r_{\text{cp}}, \\ \dot{l}_x &= \delta - l_y, \\ \dot{l}_y &= l_x,\end{aligned}\tag{4.1}$$

Здесь δ – функция управления (включения тяги), которая принимает значения $\delta = -1; 0; 1$, $\delta = -1$ соответствует включённой тяге, ориентированной в отрицательном трансверсальном направлении, $\delta = 0$ соответствует пассивному участку, $\delta = 1$ соответствует включённой тяге, ориентированной в положительном трансверсальном направлении.

На систему (4.1) наложены граничные условия:

$$\begin{aligned}t = 0 : \quad \Delta r_{\text{cp}} &= \Delta r_{\text{cp}0}, \quad \Delta L_{\text{cp}} = \Delta L_{\text{cp}0} \quad l_x = l_{x0}, \quad l_y = l_{y0}; \\ t = t_{\text{к}} : \quad \Delta r_{\text{cp}} &= 0, \quad \Delta L_{\text{cp}} = 0, \quad l_x = 0, \quad l_y = 0.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Необходимо подобрать параметры (размеры активных и пассивных участков) структур управления (рисунок 2.20), которые удовлетворяют граничным условиям (4.2) и доставляют минимум критериям задачи – моторное и общее время.

Переход от размерного времени и фазовых координат к безразмерным выполняют по формулам:

для времени:

$$\bar{t}_{\text{мот}} = \lambda t, \quad \lambda = \sqrt{\mu \frac{(1 - e^2)^3}{p^3}},$$

для фазовых координат:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X}}{K}, \quad K = 2 \frac{a}{\lambda^2}.$$

Здесь $\mathbf{X} = [\Delta r_{\text{ср}}, \Delta L_{\text{ср}}, l_x, l_y]^T$ – вектор фазовых координат, λ – угловая скорость на опорной орбите, p , e – фокальный параметр и эксцентриситет опорной орбиты, t – время.

4.1 Сравнение с результатами других авторов

Выполним расчёт траекторий приведения космического аппарата в точку стояния с применением параметрических программ управления для граничных условий, которые приведены в [8].

Там рассмотрена задача приведения космического аппарата в заданную точку стояния – 76° в.д. Выпишем начальные параметры движения:

большая полуось	42300 км
эксцентриситет	0,001
аргумент перигея	90°
аргумент широты	180°

В [8] рассматривается космический аппарат, который имеет массу 4000 кг и тягу 0,08 Н, таким образом, ускорение от тяги $2 \cdot 10^{-5}$ м/с². Угловая скорость на опорной орбите $\lambda = 7,292 \cdot 10^{-5}$ рад/с, параметр $K = 7,522$ км.

Авторами [8] получено одно единственное решение, которое имеет критерии задачи $t_{\text{мот}} = 18,242$, $t_{\text{общ}} = 73,583$.

Согласно формулам, которые приведены в первой главе, определим граничные условия задачи. Параметры движения маневрирующего космического аппарата в начальной точке составят:

радиус-вектор r	42299,9657 км
трансверсальная скорость V_u	3,0697 км/с
радиальная скорость V_r	0,002762 км/с

Отклонения параметров движения КА1 от параметров движения КА2 составят:

смещение вдоль радиуса орбиты Δr	135,8057 км
смещение вдоль орбиты ΔL	10302,6478 км
разность радиальных скоростей ΔV_r	0,002762 км/с
разность трансверсальных скоростей ΔV_u	0,004939 км/с

Параметры движения КА2 в терминах векового и периодического движения составят:

среднее смещение вдоль радиуса орбиты Δr_{cp}	136,1329 км
среднее смещение вдоль орбиты ΔL_{cp}	10226,8743 км
малая полуось эллипса относительного движения l	37,8882 км
фазовый угол φ	88,5052 град

Запишем граничные условия в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
 t = 0 : \quad \Delta r_{cp_0} = 18,0971, \quad \Delta L_{cp_0} = 1359,5347 \quad l_0 = 5,0367, \quad \varphi_0 = 1,5621; \\
 t = t_k : \quad \Delta r_{cp} = 0, \quad \Delta L_{cp} = 0, \quad l_x = 0, \quad l_y = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Как следует из граничных условий (4.3), решение данной задачи возможно только по программе с тремя включениями тяги, так как $|l_0 - l_k| > 4$.

В таблице 4.1 приведены оптимальные по Парето решения задачи с применением параметрических программ управления в двухкритериальной постановке. На рисунке 4.1 показано множество Парето.

На рисунке 4.1 крайняя левая точка множества соответствует программе с тремя включениями тяги одного знака, в которой достигаются минимально возможные затраты моторного времени. Остальные точки соответствуют программам с разным знаком тяги, которые позволяют уменьшить общее время за счёт увеличения моторного.

Таблица 4.1 – Решения задачи (4.3)

№	$t_{\text{мот}}$	$t_{\text{общ}}$	t_0	t_1	p_1	t_2	p_2	t_3
1.1	35.08	50.0564	0.6065	8.4915	6.6796	3.887	7.6902	22.7016
1.2	33.9454	50.2985	0.492	7.9242	7.599	3.4647	8.2621	22.5566
1.3	33.5448	50.7316	1.1152	7.7239	6.4388	3.2989	9.6327	22.522
1.5	24.6307	56.7737	0.0862	3.2668	17.6138	5.0354	14.443	16.3285
1.6	23.4064	57.3269	6.2331	2.6546	13.3623	3.343	14.3251	17.4087
1.7	22.6435	57.4435	0.7556	2.2732	18.4104	3.3266	15.6339	17.0437
1.8	22.5258	57.6299	0.5341	2.2143	18.6615	3.4119	15.9085	16.8995
1.9	21.6941	63.4476	6.4033	1.7985	20.2569	9.6017	15.0933	10.2939
1.10	21.4495	69.2577	0.3506	1.6762	20.2582	9.7653	27.1995	10.008
1.11	18.0971	75.3954	1.789	5.6753	33.0956	3.773	34.5849	8.6489

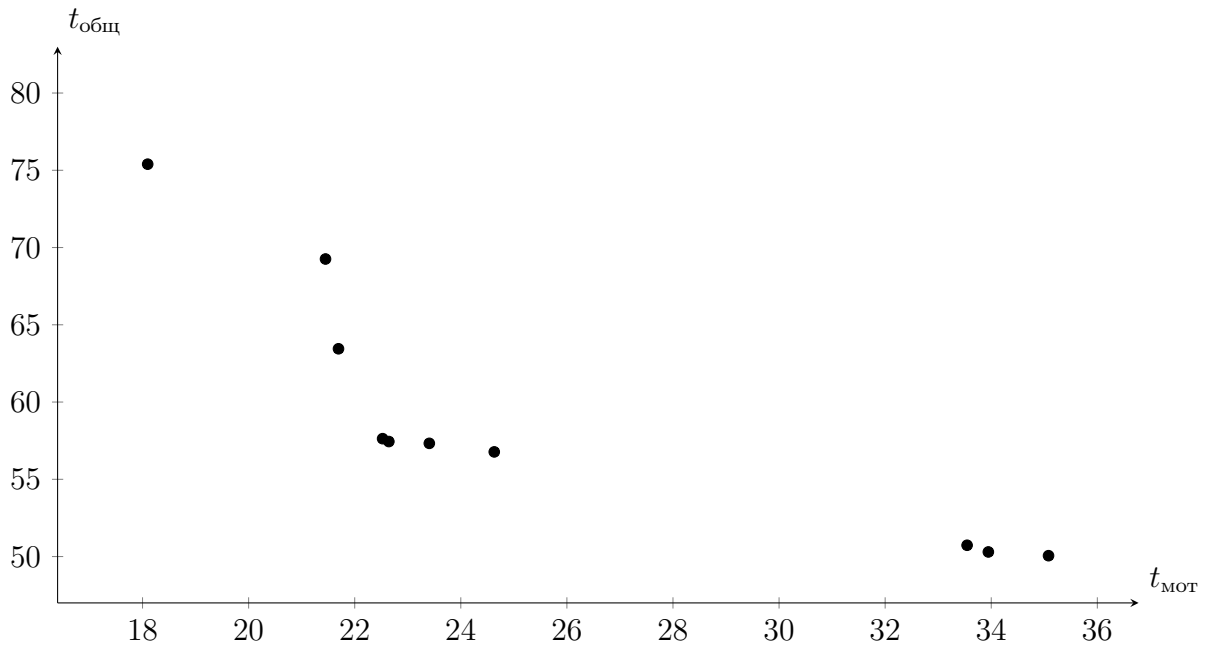


Рисунок 4.1 – Множество Парето решений задачи (4.3)

Таким образом, получен результат, аналогичный ранее опубликованному в [8] – решение 1.11 по таблице 4.1, что можно рассмотреть как подтверждение правильности разработанной методики расчёта программ управления относительным движением с двумя и тремя включениями тяги.

Важно отметить, что полученный здесь результат дополняет ранее опубликованный, так как получена серия неуправляемых по Парето решений задачи.

4.2 Моделирование оптимальных траекторий на исходной модели

Решим серию задач приведения космического аппарата в точку стояния геостационарной орбиты.

Пусть активный космический аппарат имеет ускорение от тяги $5 \cdot 10^{-5}$ м/с², параметр $K = 18,8058$ км. Активный космический аппарат необходимо привести в позицию нуль градусов геостационарной орбиты.

Начальные условия движения показаны в таблице 4.2 и 4.3, конечные условия соответствуют равенству нулю параметров движения $\Delta r_{\text{ср}}$, $\Delta L_{\text{ср}}$ и l . В таблице 4.2 показаны начальные условия в оскулирующих элементах – большая полуось, эксцентриситет, угол истинной аномалии и аргумент широты. В таблице 4.3 показаны начальные условия движения в безразмерных составляющих относительного движения.

В таблицах показаны следующие результаты:

- В таблице 4.4 и таблице 4.8 показаны оптимальные по Парето решения задачи для граничных условий "малое отклонение" и "большое отклонение" соответственно;
- В таблице 4.5 и таблице 4.9 показаны результаты расчёта параметров движения на исходной модели для граничных условий "малое отклонение" и "большое отклонение" соответственно;
- В таблице 4.6 и таблице 4.10 показаны результаты уточнения размеров активных и пассивных участков на исходной модели для граничных условий "малое отклонение" и "большое отклонение" соответственно;
- В таблице 4.7 и таблице 4.11 показаны результаты расчёта возмущённых траекторий для граничных условий "малое отклонение" и "большое отклонение" соответственно;

Как следует из таблиц 4.9 и (4.9) методическая ошибка, обусловленная линеаризацией уравнений движения, мала. Для устранения методической ошибки решена краевая задача уточнения размеров активных и пассивных участков на исходной нелинеаризованной модели, в результате чего критерии задачи изменились на величину 1 – 2% (см. таблицы 4.6 и 4.10).

Расчёт показал (таблицы 4.7 и 4.11), что нецентральность гравитационного поля Земли приводит к слабым отклонениям параметров движения от номинальных.

Таблица 4.2 – Начальные условия движения активного космического аппарата

Вариант начальных условий	Большая полуось, км	Эксцентриситет	Угол истинной аномалии, град	Аргумент широты, град
«малое отклонение»	42164,16	10^{-4}	0	4
«большое отклонение»	42464,16	$2 \cdot 10^{-3}$	0	20

Таблица 4.3 – Безразмерные начальные условия движения

Вариант начальных условий	$\Delta r_{\text{ср}}$	$\Delta L_{\text{ср}}$	l_0	φ_0
«малое отклонение»	0 км (0)	2943 км (156,52)	4,21 км (0,22)	0
«большое отклонение»	300 км (15,99)	14807 км (787,41)	43,06 км (2,29)	0

Для граничных условий «малое отклонение» найдено 134 решения, из которых только 28 формируют множество Парето (4.4 и рисунок 4.2). Для граничных условий «большое отклонение» найдено 98 решений задачи, 14 из которых формируют множество Парето (4.8 и рисунок 4.3).

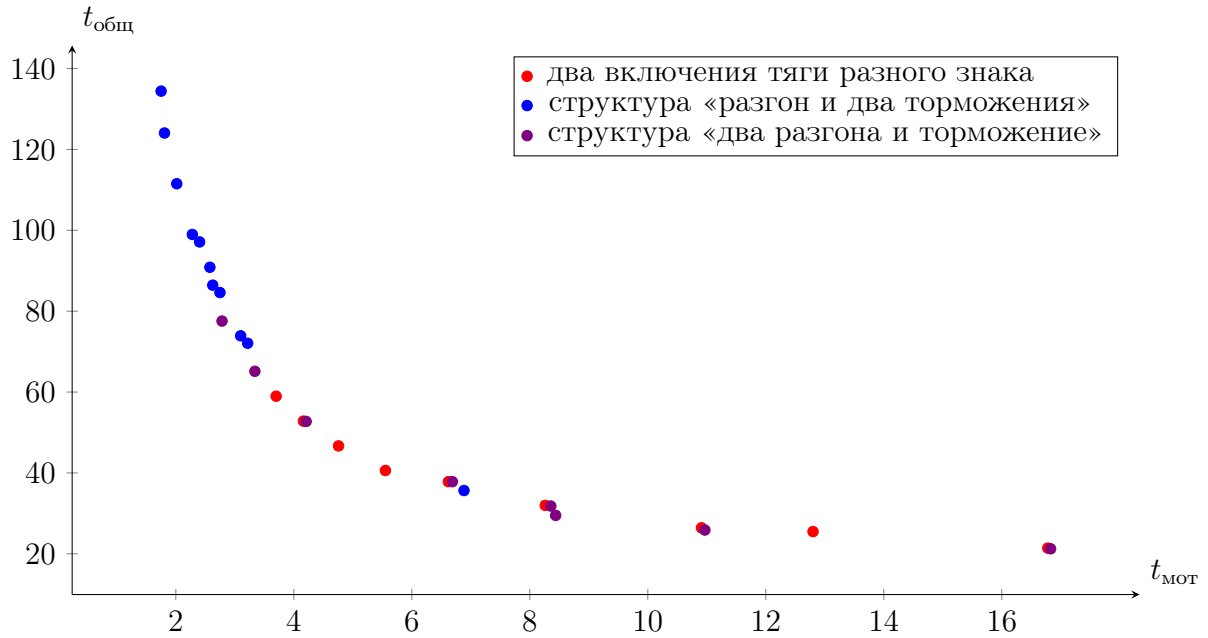


Рисунок 4.2 – Множество Парето для граничных условий «малое отклонение»

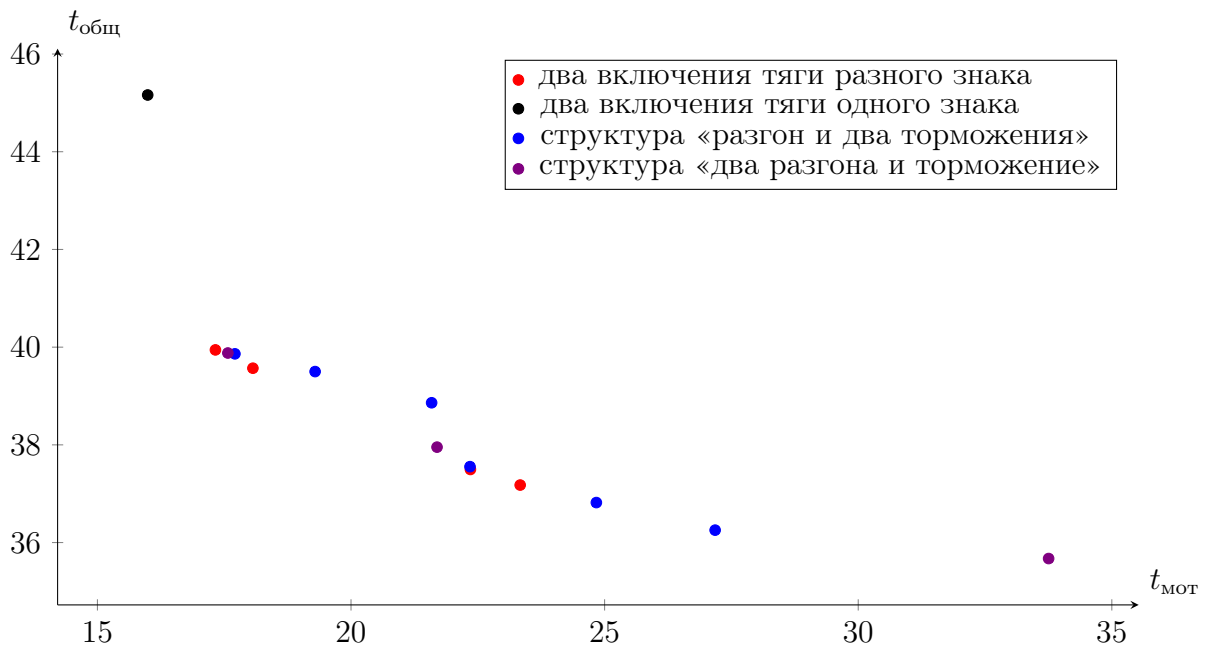


Рисунок 4.3 – Множество Парето для граничных условий «большое отклонение»

Таблица 4.4 – Оптимальные по Парето решения задачи для начальных условий

«малое отклонение»

№	$t_{\text{мот}}$	$t_{\text{общ}}$	t_0	t_1	p_1	t_2	p_2	t_3
1. Два включения тяги разного знака								
1.1	16,7803	21,4093	0,5818	8,3902	4,0471	8,3902	–	–
1.2	12,801	25,4892	2,7851	6,4005	9,903	6,4005	–	–
1.3	10,9102	26,4293	1,8451	5,4551	13,674	5,4551	–	–
1.4	8,2621	31,9744	2,5831	4,131	21,1292	4,131	–	–
1.5	6,6195	37,8395	3,0012	3,3097	28,2187	3,3097	–	–
1.6	5,5528	40,6011	0,2396	2,7764	34,8087	2,7764	–	–
1.7	4,7582	46,6822	0,4417	2,3791	41,4823	2,3791	–	–
1.8	4,1628	52,812	0,5951	2,0814	48,0541	2,0814	–	–
1.9	3,6999	58,9742	0,7161	1,8499	54,5583	1,8499	–	–
2. Три включения тяги, структура "разгон и два торможения"								
2.1	6,8843	35,6491	0,9743	3,4422	13,6669	0,2235	14,1236	3,2187
2.2	3,2175	72,0709	1,4275	1,6087	35,2919	0,2087	32,134	1,400
2.3	3,0991	73,9098	3,1646	1,5495	33,7823	0,0847	33,8638	1,4648
2.4	2,748	84,6053	1,6192	1,374	41,6854	0,2019	38,5526	1,1721
2.5	2,6257	86,4377	3,3312	1,3129	40,2188	0,0753	40,262	1,2375
2.6	2,5771	90,8674	1,6803	1,2886	41,7262	0,1985	44,8838	1,0900
2.7	2,4027	97,127	1,7403	1,2013	48,0535	0,1958	44,9305	1,0055
2.8	2,2796	98,9756	3,4466	1,1398	46,6148	0,0693	46,6346	1,0705
2.9	2,0156	111,518	3,5275	1,0078	52,9852	0,0654	52,9899	0,9424
2.1	1,8079	124,063	3,5839	0,904	59,3383	0,063	59,3329	0,8409
2.11	1,7503	134,422	1,7136	0,8752	67,2359	0,173	63,7221	0,7022
3. Три включения тяги, структура "два разгона и торможение"								
3.1	16,8273	21,2409	0,4147	8,3825	2,7015	0,0311	1,2974	8,4137
3.2	10,9679	25,8788	1,2281	5,3405	5,2884	0,1435	8,3943	5,484
3.3	8,4385	29,4955	0,2972	4,1179	10,2777	0,1013	10,4821	4,2192
3.4	8,3563	31,8059	2,3638	4,0787	12,1211	0,0995	8,9647	4,1781
3.5	6,6872	37,8309	2,9588	3,2582	12,5049	0,0854	15,6801	3,3436
3.6	4,2091	52,7305	0,5406	2,0577	22,5433	0,0468	25,4375	2,1045
3.7	3,3397	65,1392	0,8011	1,6597	29,1385	0,0102	31,8599	1,6699
3.8	2,7829	77,5583	0,9549	1,383	35,6307	0,0085	38,1898	1,3914

Таблица 4.5 – Результат расчёта параметров движения на исходной модели для граничных условий «малое отклонение»

№ по таблице 4.4	$\Delta r_{ср_к}$	$\Delta L_{ср_к}$	$l_к$
1. Два включения тяги разного знака			
1.1	0,0001	0,2165	0,075
1.2	0,0002	0,1898	0,0288
1.3	0,0002	0,1645	0,0599
1.4	0,0000	0,1123	0,1224
1.5	0,0000	0,0738	0,1386
1.6	0,0000	0,0474	0,1375
1.7	0,0000	0,0336	0,1301
1.8	0,0000	0,0221	0,1208
1.9	0,0000	0,0198	0,1119
2. Три включения тяги, структура "разгон и два торможения"			
2.1	0,0000	0,0739	0,1316
2.2	0,0000	0,017	0,0911
2.3	0,0000	0,0162	0,0903
2.4	0,0000	0,0119	0,0783
2.5	0,0000	0,0053	0,0782
2.6	0,0000	0,0023	0,0732
2.7	0,0000	0,0016	0,0683
2.8	0,0000	0,001	0,0583
2.9	0,0000	0,0007	0,0502
2.1	0,0000	0,0000	0,0447
2.11	0,0000	0,0000	0,0344
3. Три включения тяги, структура "два разгона и торможение"			
3.1	0,0000	0,2186	0,0764
3.2	0,0000	0,1638	0,0563
3.3	0,0000	0,1148	0,1175
3.4	0,0000	0,1096	0,1205
3.5	0,0000	0,0715	0,1379
3.6	0,0000	0,0255	0,1215
3.7	0,0000	0,0111	0,1037
3.8	0,0000	0,0033	0,0897

Таблица 4.6 – Результат уточнения размеров участков на исходной модели для граничных условий «малое отклонение»

№	$t_{\text{мот}}$	$t_{\text{общ}}$	t_0	t_1	p_1	t_2	p_2	t_3
1. Два включения тяги разного знака								
1.1	16,7520	21,4381	0,5822	8,3750	4,1040	8,3770	–	–
1.2	12,8293	25,5159	2,8100	6,4140	9,8760	6,4150	–	–
1.3	10,8835	26,4858	1,8460	5,4410	13,7600	5,4420	–	–
1.4	8,2458	32,0368	2,5850	4,1230	21,2100	4,1230	–	–
1.5	6,6084	37,9037	3,0020	3,3040	28,2900	3,3040	–	–
1.6	5,5488	40,6688	0,2396	2,7720	34,8800	2,7770	–	–
1.7	4,7552	46,7503	0,4417	2,3760	41,5500	2,3790	–	–
1.8	4,1603	52,8805	0,5951	2,0790	48,1300	2,0810	–	–
1.9	3,6978	59,0430	0,7161	1,8480	54,6300	1,8500	–	–
2. Три включения тяги, структура "разгон и два торможения"								
2.1	6,8787	35,7148	0,9743	3,4368	13,6979	0,2235	14,1640	3,2183
2.2	3,2162	72,1393	1,4275	1,6074	35,3297	0,2087	32,1659	1,4000
2.3	3,0977	73,9786	3,1646	1,5482	33,8153	0,0847	33,9010	1,4648
2.4	2,7471	84,6747	1,6192	1,3730	41,7229	0,2019	38,5856	1,1721
2.5	2,6247	86,5053	3,3312	1,3119	40,2510	0,0753	40,2984	1,2375
2.6	2,5763	90,9345	1,6803	1,2877	41,7573	0,1985	44,9207	1,0900
2.7	2,4019	97,1960	1,7403	1,2006	48,0903	0,1958	44,9635	1,0055
2.8	2,2789	99,0435	3,4466	1,1391	46,6470	0,0693	46,6711	1,0705
2.9	2,0150	111,5870	3,5275	1,0072	53,0174	0,0654	53,0269	0,9424
2.10	1,8074	124,1320	3,5839	0,9035	59,3705	0,0630	59,3704	0,8409
2.11	1,7500	134,4920	1,7136	0,8748	67,2735	0,1730	63,7546	0,7022
3. Три включения тяги, структура "два разгона и торможение"								
3.1	16,7992	21,2689	0,4147	8,3670	2,7473	0,0311	1,3077	8,4011
3.2	10,9431	25,9314	1,2278	5,3278	5,3111	0,1435	8,4495	5,4718
3.3	8,4213	29,5569	0,2972	4,1093	10,3144	0,1013	10,5240	4,2107
3.4	8,3408	31,8668	2,3639	4,0705	12,1700	0,0995	8,9922	4,1707
3.5	6,6778	37,8958	2,9590	3,2526	12,5330	0,0854	15,7260	3,3398
3.6	4,2060	52,7989	0,5406	2,0552	22,5760	0,0468	25,4764	2,1040
3.7	3,3380	65,2036	0,7964	1,6580	29,1468	0,0102	31,9224	1,6699
3.8	2,7828	77,5483	0,9548	1,3870	35,6307	0,0089	38,1898	1,3914

Таблица 4.7 – Результат расчёта возмущённых траекторий для граничных условий
«малое отклонение»

№ по таблице 4.4	$\Delta r_{ср_к}$	$\Delta L_{ср_к}$	l_k
1. Два включения тяги разного знака			
1.1	0,0000	0,0444	0,0024
1.2	0,0000	0,0306	0,0039
1.3	0,0000	0,0383	0,0066
1.4	0,0000	0,0553	0,0102
1.5	0,0000	0,0025	0,0071
1.6	0,0000	0,0031	0,0065
1.7	0,0000	0,0132	0,0077
1.8	0,0000	0,0469	0,0130
1.9	0,0000	0,0331	0,0084
2. Три включения тяги, структура "разгон и два торможения"			
2.1	0,0000	0,0235	0,0034
2.2	0,0000	0,0262	0,0050
2.3	0,0000	0,0276	0,0037
2.4	0,0000	0,0221	0,0045
2.5	0,0000	0,0238	0,0044
2.6	0,0000	0,0209	0,0048
2.7	0,0000	0,0229	0,0043
2.8	0,0000	0,0292	0,0045
2.9	0,0000	0,0187	0,0047
2.10	0,0000	0,0253	0,0050
2.11	0,0000	0,0264	0,0051
3. Три включения тяги, структура "два разгона и торможение"			
3.1	0,0000	0,0226	0,0029
3.2	0,0000	0,0224	0,0051
3.3	0,0000	0,0219	0,0043
3.4	0,0000	0,0202	0,0037
3.5	0,0000	0,0231	0,0055
3.6	0,0000	0,0222	0,0083
3.7	0,0000	0,0220	0,0075
3.8	0,0000	0,0199	0,0040

Таблица 4.8 – Оптимальные по Парето решения задачи для начальных условий «большое отклонение»

№	$t_{\text{мот}}$	$t_{\text{общ}}$	t_0	t_1	p_1	t_2	p_2	t_3
1. Два включения тяги разного знака								
1.1	23,3351	37,1773	1,6403	3,6718	12,2019	19,6633	–	–
1.2	22,3542	37,4967	1,6083	3,1813	13,5342	19,1728	–	–
1.3	18,0655	39,5692	3,2209	1,0370	18,2828	17,0285	–	–
1.4	17,3267	39,9437	2,2440	0,6676	20,3730	16,6591	–	–
2. Два включения тяги одного знака								
2.1	15.9915	45.1613	4.6374	2.8286	24.5324	13.1629	–	–
3. Три включения тяги, структура "разгон и два торможения"								
3.1	27,1788	36,2544	0,4715	5,5937	5,6755	2,1765	2,9286	19,4086
3.2	24,8372	36,8187	1,3474	4,4229	6,7650	0,6657	3,8690	19,7487
3.3	22,3460	37,5540	1,5138	3,1773	8,1465	0,2422	5,5477	18,9266
3.4	21,5893	38,8617	1,4037	2,7989	9,1595	3,1150	6,7092	15,6754
3.5	19,2922	39,4999	0,7625	1,6503	10,7208	1,5670	8,7244	16,0748
3.6	17,7111	39,8630	1,8101	0,8598	11,3790	0,3227	8,9628	16,5286
4. Три включения тяги, структура "два разгона и торможение"								
4.1	33,7538	35,6730	1,3733	5,4757	0,4054	3,4054	0,1404	24,8727
4.2	21,6959	37,9535	1,8591	2,2485	5,5165	0,6036	8,8820	18,8437
4.3	17,5720	39,8801	2,7105	0,6832	9,7835	0,1070	9,8142	16,7817

Таблица 4.9 – Результат расчёта параметров движения на исходной модели для граничных условий «большое отклонение»

№ по таблице 4.4	$\Delta r_{\text{срк}}$	$\Delta L_{\text{срк}}$	$l_{\text{к}}$
1. Два включения тяги разного знака			
1.1	– 0,1247	5,074	0,1086
1.2	– 0,1247	5,097	0,0667
1.3	– 0,1244	5,240	0,5069
1.4	– 0,1244	5,268	0,5809
2. Два включения тяги одного знака			
2.1	– 0,1247	5,884	0,3062
3. Три включения тяги, структура "разгон и два торможения"			
3.1	– 0,1246	5,009	0,2128
3.2	– 0,1247	5,051	0,0755
3.3	– 0,1247	5,094	0,0508
3.4	– 0,1247	5,200	0,3376
3.5	– 0,1244	5,222	0,7081
3.6	– 0,1243	5,2604	0,6024
4. Три включения тяги, структура "два разгона и торможение"			
4.1	– 0,1248	5,0135	0,2585
4.2	– 0,1248	5,1338	0,0946
4.3	– 0,1247	5,2648	0,5521

Таблица 4.10 – Результат уточнения размеров участков на исходной модели для граничных условий «большое отклонение»

№	$t_{\text{мот}}$	$t_{\text{общ}}$	t_0	t_1	p_1	t_2	p_2	t_3
1. Два включения тяги разного знака								
1.1	23,3413	37,2925	1,6419	3,6973	12,3093	19,6439	–	–
1.2	23,3505	37,6204	1,6099	3,201	13,6600	19,1496	–	–
1.3	18,1009	39,8309	3,2286	1,0388	18,5014	17,0620	–	–
1.4	17,3583	40,2195	2,2472	0,6681	20,6141	16,9601	–	–
2. Два включения тяги одного знака								
2.1	15,9859	45,459	4,6533	2,8230	24,8198	13,1629	–	–
3. Три включения тяги, структура "разгон и два торможения"								
3.1	27,1926	36,2966	0,4716	5,6483	5,6990	2,1759	2,9332	19,3684
3.2	24,846	36,8817	1,3487	4,4666	6,8054	0,6656	3,8816	19,7137
3.3	22,3367	37,6451	1,5159	3,2064	8,2140	0,2421	5,5784	18,8880
3.4	21,6296	39,0457	1,4063	2,8235	9,2485	3,1129	6,7611	15,6933
3.5	19,3537	39,7877	0,7631	1,6564	10,8706	1,5681	8,8002	16,1291
3.6	17,7723	40,1607	1,8139	0,8615	11,5246	0,3227	9,0498	16,5880
4. Три включения тяги, структура "два разгона и торможение"								
4.1	33,8247	35,7450	1,3743	5,5247	0,4055	3,4238	0,1404	24,8762
4.2	21,6792	38,0815	1,8632	2,2664	5,5528	0,6047	8,9763	18,8080
4.3	17,6343	40,1749	2,7200	0,6844	9,8930	0,1070	9,9275	16,8428

Таблица 4.11 – Результат расчёта возмущённых траекторий для граничных условий «большое отклонение»

№ по таблице 4.4	$\Delta r_{\text{срк}}$	$\Delta L_{\text{срк}}$	$l_{\text{к}}$
1. Два включения тяги разного знака			
1.1	0,0000	0,0196	0,0130
1.2	0,0000	0,0196	0,0027
1.3	0,0000	0,0207	0,0232
1.4	0,0000	0,0206	0,1675
2. Два включения тяги одного знака			
2.1	0,0000	0,0156	0,0307
3. Три включения тяги, структура "разгон и два торможения"			
3.1	0,0000	0,0204	0,0126
3.2	0,0000	0,0198	0,0201
3.3	0,0000	0,0195	0,0085
3.4	0,0000	0,0205	0,0290
3.5	0,0000	0,0216	0,0252
3.6	0,0000	0,0207	0,0177
4. Три включения тяги, структура "два разгона и торможение"			
4.1	0,0000	0,0202	0,0107
4.2	0,0000	0,0197	0,0236
4.3	0,0000	0,0205	0,0176

ВЫВОДЫ ПО ЧЕТВЁРТОЙ ГЛАВЕ

Проведены численные расчёты номинального управления с применением параметрических программ управления с двумя и тремя включениями тяги на примере задачи приведения космического аппарата в точку стояния геостационарной орбиты.

Приведён пример расчёта параметров управления для граничных условий, взятых у других авторов. Получена номинальная программа с такими же значениями критериев задачи, а также несколько других программ, дополняющих ранее опубликованный результат.

Выполнен расчёт траекторий относительного движения на исходной нелинейной модели. Решены задачи приведения космического аппарата в точку стояния из разных, по величине, граничных условий. Показано, что существует область, в которой линеаризация уравнений практически не сказывается на точности решения задачи приведения космического аппарата в точку стояния. Для сравнительно больших начальных удалений космического аппарата от точки стояния необходимо уточнение параметров управления, полученных на линейной модели, на исходной, при этом множество Парето не испытывает значительных изменений. Критерии задачи изменились на величину не более 1 – 3 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённые исследования программ управления центром масс относительного движения с пассивным участком в многокритериальной постановке позволяют сформулировать следующие выводы:

1. Построена модель относительного движения, инвариантная к проектным характеристикам маневрирующего космического аппарата и параметрам опорной орбиты, которая позволяет получить универсальные решения задачи построения номинального управления, зависящее только от безразмерных граничных условий перелёта.
2. Исследованы оптимальные программы номинального управления относительным движением. Рассмотрен как случай свободной ориентации тяги, так и трансверсальной. Получены оптимальные программы управления относительным движением по критерию минимума затрат моторного времени при фиксированных граничных условиях и изменяемом в некотором пределе общем времени перелёта. Сравнение результатов расчёта программ управления при трансверсальной и свободной ориентации вектора тяги показал, что введение ограничений на направление тяги ухудшает критерии задачи на величину порядка 1 – 10%.
3. Исследованы параметрические программы управления относительным движением с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальном направлении. Параметрами программ управления являются размеры участков постоянства тяги (активных и пассивных), для размеров активных участков получены аналитические соотношения. Получены области граничных условий для периодического движения, допускающие применение параметрических программ управления – максимальное его изменение составляет 4 и 6 для программ с двумя и тремя включениями тяги соответственно. Разработаны алгоритмы двухкритериальной оптимизации параметрических программ управления в критериях минимум моторного и общего

времени.

4. Решена задача приведения космического аппарата в точку стояния геостационарной орбиты в двухкритериальной постановке. Показана эффективность двухкритериального подхода к оптимизации траекторий относительного движения, которая заключается в построении исчерпывающего множества решений задачи при фиксированных граничных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авксентьев, А. А. Метод управления сближением космического аппарата с орбитальным объектом на участке дальнего наведения / А. А. Авксентьев // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2017. – Т. 60. – № 8. – С. 689-696.
2. Аппазов, Р. Ф., Сытин, О. Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли / Р. Ф. Аппазов, О. Г. Сытин. – М.: Наука, 1987. – 440 с.
3. Ахметжанов, Р. В., Богатый, А. В., Дьяконов, Г. А., Ким, В. П., Меркурьев, Д. В., Любинская, Н. В., Семенихин, С. А., Спивак, О. О., Попов, Г. А. Электрические ракетные двигатели нового поколения для малых космических аппаратов / Р. В. Ахметжанов, А. В. Богатый, Г. А. Дьяконов, В. П. Ким, Д. В. Меркульев, Н. В. Любинская, С. А. Семенихин, О. О. Спивак, Г. А. Попов // Известия РАН. Энергетика. – 2019. – № 3. – С. 3-13.
4. Балахонцев В. Г., Иванов В. А., Шабанов В. И. Сближение в космосе. / В. Г. Балахонцев, В. А. Иванов, В. И. Шабанов. – М.: Воениздат, 1973. – 240 с.
5. Баранов, А. А., Ролдугин, Д. С. Шестиимпульсные маневры встречи космических аппаратов на околокруговых некомпланарных орбитах. / А. А. Баранов, Д. С. Ролдугин // Космические исследования. – 2012. – Т. 50. – № 6. – С. 472- 480.
6. Баранов, А. А., Терехова, Е., О. Оптимальная четырехимпульсная встреча на компланарных почти круговых орбитах. / А. А. Баранов, Е. О. Терехова // Космические исследования. – 1995. – Т. 33. – № 4. – С. 420-425.
7. Баранов А. А., Маневрирование в окрестности круговой орбиты. / А. А. Баранов. – М.: Издательство «Спутник», 2016. – 512 с.
8. Беллман, Р. Динамическое программирование. /Р. Беллман; пер. с англ. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.
9. Важелин, Н. А., Обухов, В. А., Плохих, А. П., Попов, Г. А. Электрические ракетные двигатели космических аппаратов и их влияние на радиосистемы космической

- связи / Н. А. Важелин, В. А. Обухов, А. П. Плохих, Г. А. Попов. – М.: ФИЗМАТ-ЛИТ. – 2012. – 432 с.
10. Войсковский, А. П., Красильщиков, М. Н., Малышев, В. В., Федотов, А. В. Автономная реализация динамических операций на геостационарной орбите. II. Синтез алгоритмов управления / А. П. Войсковский, М. Н. Красильщиков, В. В. Малышев, А. В. Федотов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2016. – № 6. – С. 107-128.
 11. Гришин, С. Д. Проектирование космических аппаратов с двигателями малой тяги. / С. Д. Гришин. – М.: Машиностроение, 1990. – 224 с.
 12. Гродзовский, Г. Д. Механика космического полета (проблемы оптимизации). / Г. Д. Гродзовский. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
 13. Гусев, Ю. Г., Пильников, А. В. Роль и место электроракетных двигателей в Российской космической программе / Ю. Г. Гусев, А. В. Пильников. // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2012. – № 60.
 14. Ерисов, А. А., Евтух, А. В., Крылов, А. С. Перспективные направления развития электрореактивных двигателей. / А. А. Ерисов, А. В. Евтух, А. С. Крылов // Решетневские чтения. – 2013, – Т. 1. – С. 126-128.
 15. Звездин, И. Малые космические аппарата: перспективы рынка. / И. Звездин // Взлет. – 2005. – № 1. – С. 50-55.
 16. Ишков, С. А. Сближение космических аппаратов с малой тягой на околокруговых орбитах / С. А. Ишков // Космические исследования. – 1992. – Т. 30. – № 2. – С. 165-179.
 17. Ишков, С. А., Филиппов, Г. А., Храмов, А. А. Номинальная программа управления сближением космического аппарата – сборщика мусора с электроракетным двигателем малой тяги на геостационарной орбите / С. А. Ишков, Г. А. Филиппов, А. А. Храмов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2016. – Т. 18. – № 4(46). – С. 1215-1222.
 18. Кириллов, В. А., Багатеев, И. Р., Тарлецкий, И. С., Баландина, Т. Н., Баландин, Е. А. Анализ концепции очистки околоземного космического пространства. / В. А. Кириллов, И. Р. Багатеев, И. С. Тарлецкий, Т. Н. Баландина, Е. А. Баландин // Сибирский журнал науки и технологий. – 2017. – Т. 18. – № 2. – С. 343-351.
 19. Константинов, М. С., Каменков, Е. Ф., Перельгин, Б. П., Безвербый, В. К. Меха-

- ника космического полёта. / М. С. Константинов, Е. Ф. Каменков, Б. П. Перелыгин, В. К. Безвербый. – М.: Машиностроение, 1989. – 408 с.
20. Константинов, М. С., Мин Тхейн Метод оптимизации траекторий выведения КА с электроракетной двигательной установкой на ГСО / М. С. Константинов, Мин Тхейн // Вестник Московского авиационного института. – 2009. – Т. 16. – № 5. – С. 282-290.
21. Красильщиков, М. Н., Малышев, В. В., Федотов А. В. Автономная реализация динамических операций на геостационарной орбите. I. Формализация задачи управления. / М. Н. Красильщиков, В. В. Малышев, А. В. Федотов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2015. – № 6. – С. 82-96.
22. Кротов, В. Ф. Методы и задачи оптимального управления. /В. Ф. Кротов. – М.: Наука, 1973. –448 с.
23. Кубасов, В. Н., Данков, Г. Ю., Яблонько, Ю. П. Методы сближения на орбите. / В. Н. Кубасов, Г. Ю. Данков, Ю. П. Яблонько. – М.: Машиностроения, 1985. – 184 с.
24. Лебедев, В. Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой. / В. Н. Лебедев. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1968. – 108 с.
25. Лоуден, Д. Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. / Д. Ф. Лоуден; пер. с англ. – М.: Мир, 1966. – 154 с.
26. Лукьяненко, М. В., Кудряшов, В. С. Энерговооруженность космических аппаратов и бортовые источники энергии / М. В. Лукьяненко, В. С. Кудряшов. // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М. Ф. Решетнева. – 2008. – № 1(18). – С. 141-145.
27. Миронов, В. И., Миронов, Ю. В., Фоминов, И. В. Энергетически оптимальное управление сближением космических аппаратов в нецентральной гравитационном поле Земли на этапе дальнего наведения / В. И. Миронов, Ю. В. Миронов, И. В. Фоминов. // Труды СПИИРАН. – 2019. – Т. 18. – № 1. – С. 202-229.
28. Назаров, А. Е. Управление относительным движением космических аппаратов при организации тандемной схемы полёта. / А. Е. Назаров. // Вестник НПО им. С. А. Лавочкина. – 2018. – № 1(39). – С. 27-35.
29. Основы теории полета космических аппаратов. / Под ред. д-ра физ.-мат. наук Г. С. Нариманова и д-ра техн. наук М. К. Тихонравова. – М.: Машиностроение,

1972. – 600с.
30. Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. / Л. С. Понтрягин, В. Е. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
 31. Рыжков, В. В., Сулинов, А. В. Двигательные установки и ракетные двигатели малой тяги на различных физических принципах для систем управления малых и сверхмалых космических аппаратов / В. В. Рыжков, А. В. Сулинов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2018. – Т. 17, – № 4. – С. 115-128.
 32. Салмин, В. В. Оптимизация космических перелётов с малой тягой: проблемы совместного управления траекторным и угловым двигателем. / В. В. Салмин. – М.: Машиностроение, 1987. – 208 с.
 33. Салмин, В. В., Четвериков, А. С. Управление плоскими параметрами орбиты геостационарного космического аппарата с помощью двигателя малой тяги / В. В. Салмин, А. С. Четвериков. // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2015. – Т. 14. – № 4. – С. 92-101.
 34. Улыбышев, Ю. П. Оптимизация многорежимных траекторий сближения с ограничениями. / Ю. П. Улыбышев // Космические исследования. – 2008. – Т. 46. – № 2. – С. 135-147.
 35. Филиппов, Г. А. Итерационная процедура выбора программы управления сближением с малой тягой в задаче утилизации космического мусора на геостационарной орбите / Г. А. Филиппов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2017. – Т. 16. – № 3. – С. 125-137.
 36. Штойер, Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. / Р. Штойер; пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с.
 37. Эльясберг, П. Е. Введение в теорию полёта искусственных спутников Земли. / П. Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1965. – 540 с.
 38. Ishkov, S. A., Filippov, G. A., Fadeenkov, P. V. Nominal control program in problem of far rendezvous at geostationary orbit with low transversal thrust / S. A. Ishkov, G. A. Filippov, P. V. Faddenkov // AIP Conference Proceedings. – 2018. – № 2046.
 39. Clohessy, W. H., Wiltshire, R. S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous / Clohessy W. H., R. S. Wiltshire // Journal Aerospace Science. – 1960. – Vol. 27, –

- № 9. C. 653 – 658.
40. Geffroy, S., Epenoy, R. Optimal Low-Thrust Transfers with Constraints – Generalization of Averaging Techniques / S. Geffroy, R. Epenoy // Acta Astronautica. – 1997. – Vol. 41. – № 3. – C. 133 – 149.
 41. Gross, L. R., Prussing, J. E., Optimal Multiple-Impulse Direct Ascent Fixed-Time Rendezvous. / L. R. Gross, J. E. Prussing // AIAA Journal. – 1974. – Vol.12. – № 7. –C. 885–889.
 42. Han, C., Xie, H. W. Study on the Multi-Revolution Lambert Transfer Algorithm for Rendezvous / C. Han, H. W. Xie // Chinese Space Science and Technology. – 2004. – Vol. 24. – № 5. – C. 9-13.
 43. Hughes, S. P., Mailhe, L. M., Guzman, J. J. A Comparison of Trajectory Optimization Methods for the Impulsive Minimum Fuel Rendezvous Problem / S. P. Hughes, L. M. Mailhe, J. J. Guzman. // Advances in the Astronautical Sciences. – 2003.– Vol. 113. –C. 85–104.
 44. Ishkov, S. A., Filippov, G. A., Khramov, A. A. Autonomous Control Program for Special Spacecraft Debris Collector Rendezvous Transfer with Fragment of Space Debris with Low-thrust / S. A. Ishkov, G. A. Filippov, A. A. Khramov // Procedia Engineering. – 2017. – Vol. 185. – C. 388-395.
 45. Ishkov, S. A., Filippov, G. A., Kremenetskaja, M. E., Frolov, I. V. Ballistic analyze of spacecraft inspector motion, equipped with electric thruster, above International Space Station / S. A. Ishkov, G. A. Filippov, M. E. Kremenetskaja, I. V. Frolov // AIP Conference Proceedings. – 2018. – № 2046.
 46. Ishkov, S. A., Khramov, A. A., Filippov, G. A. Formation algorithms of sequential control for spacecraft rendezvous with low-thrust / S. A. Ishkov, A. A. Khramov, G. A. Filippov // AIP Conference Proceedings. – 2018. – № 2046.
 47. Kluever, C. A. Low-Thrust Trajectory Optimization Using Orbital Averaging and Control Parameterization / C. A. Kluever. // Cambridge University Press, 2010. – C. 112–138.
 48. Kriz, J. A. A Uniform Solution of the Lambert Problem / J. A. Kriz // Celestial Mechanics. – 1976. – Vol. 14. – C. 509–513.
 49. Lansard, E., Frayssinhes, E., Palmade, J. L. Global design of satellite constellations a multi-criteria performance comparison of classical walker pattern and new design

- patterns / E. Lansard, E. Frayssinhes, J. L. Palmade // *Acta Astronautica*. – 1998. Vol. 42. – № 9. – C. 555–564.
50. Luo, Y. Z, Li, H. Y., Tang, G. J. Hybrid approach to optimize a rendezvous phasing strategy / Y. Z. Luo, H. Y. Li, G. J. Tang // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 2007. – № 30(2). – C. 185–191.
51. Luo, Y. Z., Tang, G. J., Lei, Y. J. Optimization of multiple-impulse multiple revolution rendezvous phasing maneuvers / Y. Z. Luo, G. J. Tang, Y. J. Lei // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 2007. – № 30(4). – C. 946–952.
52. Luo, Y. Z., Tang, G. J., Li, H. Y. Optimization of multi-impulse minimum-time rendezvous using a hybrid genetic algorithm / Y. Z. Luo, G. J. Tang, H. Y. Li // *Aerospace Science and Technology* 2006; 10(6): 534-540
53. Luo, Y. Z., Zhang, J., Li, H. Y. Interactive optimization approach for optimal impulsive rendezvous using primer vector and evolutionary algorithms / Y. Z. Luo, J. Zhang, H. Y. Li // *Acta Astronautica*. – 2010. – № 67(3–4). –C. 396–405.
54. Prussing, J. E. A Class of Optimal Two-Impulse Rendezvous Using Multiple Revolution Lambert Solutions / J. E. Prussing // *Journal of the Astronautical Sciences*. – 2000. – Vol. 106. – C. 17–37.
55. Prussing, J. E., Chiu, J. H., Optimal Multiple-Impulse Fixed-Time Rendezvous Between Circular Orbits / J. E. Prussing, J. H. Chiu // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 1986. – Vol. 9. – № 1. – C. 17–22.
56. Shen, H. J., Tsiotras, P., Optimal Two-Impulse Rendezvous Using Multiple Revolution Lambert Solutions / H. J. Shen, P. Tsiotras // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 2003. – Vol. 26. – № 1. – C. 50–61.
57. Ya-Zhong Luo, Guo-Jin Tang, Yong-Jun Lei, Hai-Yang Li Optimization of Multiple-Impulse, Multiple-Revolution, Rendezvous-Phasing Maneuvers / Luo Ya-Zhong, Tang Guo-Jin, Lei Yong-Jun, Li Hai-Yang // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 2007. – Vol. 30. – № 4. – C. 946–952.
58. Ya-Zhong Luo, Hai-Yang Li, Guo-Jin Tang Hybrid approach to Optimize a Rendezvous-Phasing Strategy / Luo Ya-Zhong, Li Hai-Yang, Tang Guo-Jin // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 2007. – Vol. 30. – № 1. – C. 185–191.
59. Yazhong, L., Jin, Z., Guojin, T., Survey of Orbital Dynamics and Control of Space Rendezvous / L. Yazhong, Z. Jin, T. Guojin // *Chinese Journal of Aeronautics*. –

2013. – Vol. 27. – Iss. 1. – C. 1–11.

60. Zhang, J., Wang, X., Ma, X. B. Spacecraft long-duration phasing maneuver optimization using hybrid approach / J. Zhang, X. Wang, X. B. Ma // Acta Astronautica. – 2012. – Vol. 72. – C. 132–142.