АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С УЧЕТОМ ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ

О.Н. Яркова

Оренбургский государственный университет

В работе предложена имитационная модель динамики капитала страховой компании с учетом инвестирования и перестрахования. Сформулирована многоэтапная задача стохастического программирования для формирования динамического инвестиционного портфеля, максимизирующего вероятность неразорения страховой компании в условиях перестрахования. Предложен и апробирован алгоритм решения задачи условной стохастической оптимизации вероятности неразорения страховой компании.

На сегодняшний день основной тенденцией развития страхового рынка в РФ является усиление конкуренции и увеличение числа неплатежеспособных страховщиков. Данный факт требует особого внимания к обеспечению высокого уровня платежеспособности страховой компании. Учитывая наличие временного лага между моментами поступления премий и выплатами страхового возмещения, страховщики используют средства из страхового фонда для получения дохода от инвестирования. При грамотном размещении временно свободных средств инвестирование способствует увеличению капитала компании и, следовательно, её платежеспособности. Другой возможностью повысить платежеспособность страховой компании, а, следовательно, и такую ее характеристику как вероятность неразорения является перестрахование. В научной литературе уделяется внимание вопросам формирования стратегии инвестирования страховой компании, но либо указанные процессы рассматривается в статике, либо не учитывается возможность перестрахования. Кроме того, в большинстве известных научных работ [1-6 и др.], посвященных вопросам оценки и оптимизации вероятности неразорения страховой компании, авторы придерживаются определенных ограничительных предположений относительно характеристик процесса риска и активов, в частности, как правило, предполагается, что премии поступают равномерно с постоянной интенсивностью, процесс поступления исков распределен по закону Пуассона, допускается возможность использования модели Блэка-Шоулза для цен акций. Как следствие, вопросы построения стратегии инвестирования, максимизирующей вероятность неразорения страховой компании в динамике с учетом перестрахования проработаны недостаточно полно.

Пусть инвестиционный портфель $\pi = \{\alpha_0, \alpha_1, ..\alpha_n\}$ страховой компании формируется из одного безрискового финансового актива, доля которого в портфеле α_0 и n видов рисковых финансовых активов, доли которых соответственно равны α_j, $j = 1,2..n$, причем $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 1,\ \alpha_j \ge 0,\ j = 0,1..n$. Тогда, в предположении о стационарности процессов поступления исков, премий и доходностях цен акций, капитал страховой компании Y_t с учетом инвестирования и перестрахования, в момент времени t будет равен

$$Y_t = Y_{t-1}\left(1 + r\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \mu_{t,j}\right) + c_t - (1+\xi)\cdot m_X \cdot \lambda \cdot \gamma - (1-\gamma)\sum_{i=0}^{N_t} X_{i,t},$$
$$Y_0 = u,\ t = 1,2..T,\ T \in N \tag{1}$$

где u – начальный капитал страховой компании; c_t – объем премий, поступивших в момент времени t; N_t – количество исков поступивших в момент времени t; λ -

математическое ожидание количества исков поступающих в единицу времени; $X_{i,t}$ – размер i-го иска (i=0,.. N_t) поступившего в момент времени t; m_X – математическое ожидание размеров поступающих исков; ξ - относительная рисковая надбавка цедента, $\xi \in (0,1)$; γ - доля, отданная на перестрахование, $\gamma \in [0,1)$; $\mu_{t,j}$ – доходность j-го рискового актива (j=1,..n) в момент времени t; T – горизонт планирования.

Вероятность неразорения страховой компании определим следующим образом: $\varphi\ (u,t) = P(Y_t\ > 0 / Y_0 = u), \forall t = 1,2..T,\ T \in N$. Поставим задачу формирования динамического инвестиционного портфеля $\Pi(t) = \{\pi_1, \pi_2 .. \pi_k\}$, $k \in N : k\Delta t = T,\ \Delta t \in N$ такого, что в каждый момент времени $t = (\tau - 1)\Delta t, (\tau - 1)\Delta t + 1, ... \tau \cdot \Delta t$ промежутка продолжительностью Δt доли акций в портфеле не меняются, и на каждом этапе $\tau = 1, 2..k$ формируется инвестиционный портфель π_τ максимизирующий вероятность неразорения страховой компании в текущем периоде $t = (\tau - 1)\Delta t + 1, (\tau - 1)\Delta t + 2, .. \tau \cdot \Delta t$, при условии что в предыдущих периодах (т.е. $\forall t = 1,2...(\tau - 1) \cdot \Delta t$) портфели были оптимальными в том же смысле. Таким образом, имеет место k этапная задача стохастического программирования для формирования динамического инвестиционного портфеля:

$$\varphi\ (u, t, \Pi(t)) = P\Big(Y_t\ \big(\pi_\tau\big) > 0 / Y_{(\tau-1)\Delta t} = Y_{(\tau-1)\Delta t}(\pi^*_{\tau-1})\Big) \rightarrow \max_{\pi_\tau}, \tag{2}$$

$$t = (\tau - 1)\Delta t + 1, (\tau - 1)\Delta t + 2 .. \tau\Delta t,$$

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j^\tau = 1\ ,\ \alpha_j^\tau \geq 0,\ j = 0,1..n, \tag{3}$$

$$\tau = 1,2..k,\ Y_0 = u\ , \Delta t,\ k \in N : k\Delta t = T, \tag{4}$$

где π_τ^* - оптимальный портфель на этапе $\tau = 1, 2..k$.

Обозначим $\varphi\ (u, t, \Pi(t)) = P\Big(Y_t\ \big(\pi_1\ , \pi_2 .. \pi_k\big) > 0 / Y_0 = u\Big), \forall t = 1,2..k\Delta t,\ k \in N$ - вероятность неразорения страховой компании с начальным капиталом u и стратегией инвестирования $\Pi(t) = (\pi_1, \pi_2 .. \pi_k)$.

Для моделирования капитала и нахождения вероятности неразорения при решении задачи (2)-(4) воспользуемся методом имитационного моделирования (алгоритм I, приведен ниже). В рассматриваемой модели случайными величинами, являются: объем премий, поступивших в момент времени t; количество исков поступивших в момент времени t; размеры исков; доходности рисковых активов в момент времени t. В общем случае указанные случайные величины могут не подчинятся известным законам распределения. Их моделирование будем осуществлять методом обратной функции распределения, при этом строится эмпирическая функция распределения на основе статистических данных наблюдений за исходными случайными величинами.

В работе [7] предложен алгоритм формирования инвестиционного портфеля максимизирующего вероятность неразорения, как меру платежеспособности страховой компании, методом имитационного моделирования, основанный на случайном переборе долей активов в портфеле. Очевидно что его использование требует, во-первых, значительных временных затрат, во-вторых, количество имитаций портфеля ограничено временными и вычислительными рамками и оптимальные соотношения долей активов в портфеле могут быть не достигнуты за приемлемое время. В связи с этим, для решения оптимизационных задач на каждом этапе планирования инвестиционного портфеля воспользуемся методом случайного поиска «наилучшей пробы», модифицированным для решения описанной задачи условной оптимизации. Для решения задачи (2), (3), (4) предлагается следующий алгоритм:

0. Задаем: начальный капитал – u, Δt– период планирования, T – горизонт планирования, n – количество рисковых активов в портфеле, r – доходность безрискового актива, статистические данные наблюдений о размерах премий и количестве исков поступающих в единицу времени, размерах исков страховой компании, доходностях рисковых активов в единицу времени;

M - максимальное число неудачно выполненных испытаний на текущей итерации максисмизации вероятности неразорения, *L_IM* – количество имитаций для вычисления вероятности неразорения страховой компании, β - начальный шаг для поиска портфеля максимизирующего вероятность неразорения, $0<\omega<1$ - коэффициент дробления шага; ε - точность вычисления портфеля.

1. jk=1 (счетчик периодов).

2. Генерируем базовый портфель $\pi_{jk}^0 = \{\alpha_j\}: \alpha_j = 1/(n+1),\ j = 0,..n$.

3. Генерируем всевозможные направления поиска. Так как для долей активов в портфеле должно выполнятся условие $\sum_{j=0}^{n}\alpha_j = 1,\ \alpha_j \ge 0,\ j = 0,1..n$ и увеличение доли одного из активов возможно только за счет снижения долей других активов, следовательно, таких направлений 2^{n+1}-2: h^1=(0,0,0,…0,0,1); h^2= (0,0,0,…0,1,0); h^3= (0,0,0,…0,1,1); h^4= (0,0,0,…1,0,0); h^5= (0,0,0,…1,0,1); h^6= (0,0,0,…1,1,1); … $h^{2^{n+1}-3}$= (1,1,1,…1,0,1); $h^{2^{n+1}-2}$= (1,1,1,…1,1,0)

4. $d\_t = \beta$, m=1,

5. Формируем портфели с заданным шагом по всем возможным направлениям относительного базового: $\tilde{\pi}_{jk}^j = \pi_{jk}^0 + d\_t \cdot h^j$, $j = 1,2..2^{n+1}-2$

6. Нормируем полученные портфели: $\pi_{jk}^j = \tilde{\pi}_{jk}^j / \left\|\tilde{\pi}_{jk}^j\right\|$, $j = 1,2..2^{n+1}-2$

7. jk =1

8. j=0

9. По алгоритму I (приведен ниже) вычисляем значения вероятности неразорения компании в момент $jk \cdot \Delta t$

$$\varphi_{jk}^j = \varphi\ (u,t,(\pi_1^*,\pi_2^*...\pi_{(jk-1)}^*,\pi_{jk}^j)) = P(Y_t\ (\pi_1^*,...\pi_{(jk-1)}^*,\pi_{jk}^j) > 0,\ \forall t = 1,2..jk\cdot\Delta t / Y_0 = u)$$

так, что к моменту $(jk-1)\Delta t$ капитал формируется по уже сформированным оптимальным портфелям для каждого из этих периодов $\pi_k^*,\ k = 1,2..jk-1$, а для периода jk по портфелю π_{jk}^j.

10. Если $j \le 2^{n+1}-2$ то (j=j+1; шаг 9)

11. Среди сформированных пар $(\pi_{jk}^j,\varphi_{jk}^j),\ j = 0,1..2^{n+1}-2$ находят портфель $\pi_{jk}^{j\max}$ которому соответствует максимальное значение вероятности неразорения, причем такое что $(\varphi_{jk}^{j\max} - \varphi_{jk}^0) > eps$, где eps зависит от точности вычисления значений вероятности неразорения, а, следовательно, от количества имитаций *L_IM* выполняемых на шаге 9.

11. Если такой портфель не найден (т.е. *jmax*=0), тогда (дробим шаг $d\_t = d\_t \cdot \omega$) иначе (заменяем базовый портфель $\pi_{jk}^0 = \pi_{jk}^{j\max}$)

12. Если $(d\_t \ge \varepsilon)$ и (m<M) то (m=m+1; идти к шагу 5) иначе шаг 13.

13. Получен оптимальный портфель для текущего периода времени $jk \cdot \Delta t$: $\pi_{jk}^* = \pi_{jk}^0$

14. Если jk<K, то (jk=jk+1; идти к шагу 4) иначе шаг 15.

15. Конец алгоритма.

Замечание к шагу 3: без потери общности в качестве векторов направлений можно выбрать: h^1=(-1,-1,-1,…-1,-1,1); h^2= (-1,-1,-1,…-1,1,-1); h^3= (-1,-1,-1,…-1,1,1); h^4= (-1,-1,-

1,…1,-1,-1); h^5= (-1,-1,-1,…1,-1,1); h^6= (-1,-1,-1,…1,1,1)… $h^{2^{n+1}-3}$= (1,1,1,…1,-1,1); $h^{2^{n+1}-2}$= (1,1,1,…1,1,-1)

Алгоритм I вычисления вероятности неразорения $\varphi\left(u,k\cdot\Delta t,\Pi(t)=\left(\pi_1,\pi_2..\pi_{k-1},\pi_k\right)\right)$, при $Y_0=u$, страховой компании в момент $k\cdot\Delta t$ для заданных портфелей $\pi_\tau=(\alpha_0^\tau,\alpha_1^\tau..\alpha_n^\tau)$, $\tau=1,2..k$

I.0 p=0 (счетчик числа имитаций приведших к отрицательным значениям капитала)

I.1 l=1 (счетчик общего количества имитаций)

I.2 $\tau=1$ (счетчик числа периодов изменения структуры портфеля)

I.3 t=1 (счетчик по времени внутри периода)

I.4 Генерируем доходности рисковых активов $\mu_{t,l}$, l=1..n (корреляция между активами может быть внесена в соответствии с методикой описанной в работе [8]).

I.5 Генерируем объем премий c_t

I.6 Генерируем число исков N_t

I.7 Генерируем величину исков $X_{l,t}$, l=1.. N_t

I.8 Вычисляем капитал компании в очередной момент времени

$$Y_t=Y_{t-1}\left(1+r\alpha_0^\tau+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^\tau\cdot\mu_{t,l}\right)+c_t-(1+\xi)\cdot m_X\cdot\lambda\cdot\gamma-(1-\gamma)\sum_{i=0}^{N_t}X_{l,t},$$

I.9 Если $Y_t<0$ то (p=p+1; $t=\Delta t$; $\tau=k$)

I.10 Если $t<\Delta t$ то (t=t+1; шаг I.4) иначе шаг I.11

I.11 Если $\tau<k$ то ($\tau=\tau+1$; шаг I.3) иначе I.12

I.12 Если $l<L\_IM$ то ($l=l+1$; шаг I.2) иначе I.13

I.13 $\varphi\left(u,k\cdot\Delta t,\Pi(t)=\left(\pi_1,\pi_2..\pi_{k-1},\pi_k\right)\right)=p/L$

I.14 Конец алгоритма

С помощью разработанного программного средства проведен вычислительный эксперимент. Предварительно определено достаточное количество имитаций, т.е. выбран параметр *L_IM* – общее количество имитаций капитала компании.

Для определения достаточного количества имитаций по параметру *L_IM* положили, что компания инвестирует свободные средства в равных долях во все активы (безрисковый по ставке r=0,00328 и рисковые активы: ОАО Газпром, ОАО Сбербанк России, ОАО Сургутнефтегаз), т.е. $\alpha_j=1/(n+1),\ j=0,1..n,\ n=3$. Для договоров автострахования ОСАГО было выявлено, что количество исков является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона, а среднее количество исков равно 2,054 иска в день. Варьируя *L_IM* рассчитаем вероятности неразорения страховой компании для договоров автострахования. Данные расчетов представлены в таблице 3.2.

Таблица 1. Зависимость оценки вероятности неразорения страховой компании от *L_IM*, T = 3, u = 90 тыс. руб., $\hat{\lambda}=2{,}054$ иска/день, r=0,00328, n=3, $\xi=0{,}6$, $\gamma=0{,}3$

L_IM – количество имитаций	Оценка вероятности неразорения страховой компании для договоров автострахования
10000	0,77400
15000	0,79867
20000	0,80345
25000	0,80248
29000	0,80407
30000	0,80447
31000	0,80453
32000	0,80434

Анализ результатов показал, что L = 30 000 имитаций достаточно для получения нужной точности расчетов.

Определим оптимальную стратегию инвестирования в несколько рисковых активов для договоров авто-страхования. Стратегия инвестирования, максимизирующая платежеспособность страховой компании в динамике, в условиях перестрахования, полученная в соответствии с представленным алгоритмом для договоров авто-страхования при начальном капитале 90 тыс. руб. и инвестировании в безрисковый актив и акции компаний: ОАО Газпром, ОАО Сбербанк России, ОАО Сургутнефтегаз представлены в таблице 3.4.

Таблица 2. Стратегия инвестирования страховой компании при инвестировании в безрисковый актив и рисковые активы: ОАО Газпром, ОАО Сбербанк России, ОАО Сургутнефтегаз, при r=0,00328, $\hat{\lambda} = 2{,}054$ иска/день, u = 90 тыс. руб., $\xi = 0{,}6$, $\gamma = 0{,}3$, $\Delta t = 3$, L_IM =3000, k=6

Период времени t	Вероятность неразорения	доли активов в оптимальном портфеле			
		Безрисковый	ОАО Газпром	ОАО Сургутнефтегаз	ОАО Сбербанк России
3	0,9894	0,0202	0,1528	0,3356	0,4914
6	0,9798	0,0464	0,1844	0,3608	0,4083
9	0,9776	0,0422	0,1676	0,3280	0,4621
12	0,9772	0,0422	0,1676	0,3280	0,4621
15	0,9761	0,1077	0,2937	0,2485	0,3501
18	0,9742	0,1889	0,2670	0,2259	0,3183

Анализ результатов показал, что наибольшая доля в портфеле, максимизирующем вероятность неразорения приходится на акции ОАО Сбербанк России. С течением времени доля безрискового актива в портфеле максимизирующем вероятность неразорения увеличивается за счет снижения доли рисковых активов ОАО Сургутнефтегаз и ОАО Сбербанк России. Доля акций ОАО Газпром в портфеле увеличивается. Что свидетельствует о невысокой доходности акций ОАО Газпром, но меньшем риске.

Описанный алгоритм показал хорошие результаты, обеспечивая сходимость вычислительного процесса к оптимальному значению долей активов в портфелях за приемлемое время с удовлетворительной точностью.

Литература

1. Frolova, A.G. In the inshurance business risky investments are dangerouse / A.G. Frolova, Y. Kabanov, S.M. Pergamenschikov // Finance and Stochastics. – 2002. – № 6. – P. 227-235.

2. Gaier, J. Asymptotic ruin probabilities and optimal investment / J. Gaier, P. Grandits, W. Schachermayer // Ann. Appl. Probab. – 2003. – № 3. – P. 1054-1076.

3. Paulsen, J. Ruin models with investment income / J. Paulsen // Probability Surveys. – 2008. – Vol. 5. – P. 416-434.

4. Белкина, Т.А. Сингулярная краевая задача для интегродифференциального уравнения в модели страхования со случайными премиями: анализ и численное решение / Т.А. Белкина, Н.Б. Конюхова, С.В. Курочкин // Вычислительная математика и математическая физика. – 2012. – № 52:10. – С. 1812-1846

5. Реннер А.Г. Динамическая модель формирования инвестиционного портфеля страховой компании РФ / А.Г. Реннер, А. И. Буреш // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2012. – № 13. – С. 295-297.

6. Глухова, Е.В. Математические модели страхования / Е.В. Глухова, О.А. Змеев, К.И. Лившиц. – Томск: Издательство Томского университета. – 2004. – 178 с.

7. Яркова, О.Н. Моделирование инвестиционного портфеля страховой компании в статике и динамике [Электронный ресурс]: монография / О.Н. Яркова, А.Г. Реннер, А.И. Буреш, под редакцией Реннера А.Г. – Самара: Изд-во СамНЦ РАН. – 2014. –207 с.

8. Кирьянов, Б.Ф. Разработка и совершенствование методов стохастического моделирования / Б.Ф. Кирьянов // Вестник Новгородского государственного университета. – 2001. – №19. – С. 108-115.