

УДК 519.217

## СТАТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ СЕРИИ В СТАЦИОНАРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Ергунева К. В., Плотников А. Н.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика  
С. П. Королёва (национальный исследовательский университет), г. Самара

Медианные серии представляют собой серии успехов/неудач в симметричной последовательности Бернулли. Несимметричный случай – то есть когда  $p \neq \frac{1}{2}$  не является ограничением – поэтому будем рассматривать произвольную последовательность Бернулли. Дальнейшее обобщение рассмотрим на примере. Два игрока играют каждый своей несимметричной монетой. Первый выигрывает на орле, второй на решке. Первая монета с вероятностью  $\alpha$  падает кверху орлом – 0 и, соответственно, вероятность альтернативного исхода 1 составляет  $1-\alpha$ . У второй монеты  $P\{X=1\}=\beta$ ,  $P\{X=0\}=1-\beta$ . Игра ведётся по следующим правилам. Сначала определяется первый «банкующий». Это можно осуществить, например, путём бросания еще одной симметричной монеты, или любым другим образом. Если на очередном шаге банкующий теряет свою «масть», то право хода переходит к другому игроку. Данная схема, представляющая собой суперпозицию двух цепей Бернулли, образует двоичную цепь Маркова. Соответствующая теория цепей Маркова требует отдельного рассмотрения. Однако и при таком элементарном построении становится очевидной справедливость результатов, полученных для цепи Бернулли так же, как и для цепи Маркова. Рассмотренное построение Марковской цепи можно обобщить на произвольное количество участников, снабдив каждого «игральной костью» с количеством граней – исходов, равным количеству игроков, и распределив по игрокам счастливые исходы. При этом, если принять точку зрения одного из игроков, то игроки разделятся на две группы: я и все остальные. Тем самым ситуация опять сведётся к двоичной цепи. Поэтому рассмотрим произвольную марковскую цепь с двумя состояниями. Устройство такой цепи удобнее всего представить в виде графа (рис. 1). Начальное условие при исследовании асимптотики распределения положим стационарным:  $p_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = 0\}$ .

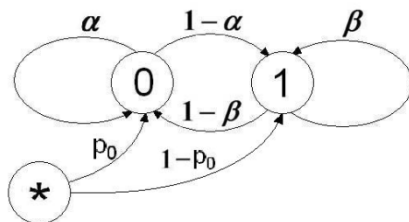


Рис. 1. Граф двоичной цепи Маркова

Величину  $p_0$  найдем по формуле полной вероятности

$$p_0 = p_0\alpha + (1-p_0)(1-\beta), \quad p_0 = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}.$$

Пусть  $L_n$  – максимальная серия успехов в марковской цепи с произвольными параметрами  $p_0, \alpha, \beta$ . Обобщая рекуррентную схему для цепи Бернулли, введём в рассмотрение две последовательности вероятностей

$$q_{n,l}^{(0)} = P\{L_n < l, X_n = 0\}, q_{n,l}^{(1)} = P\{L_n < l, X_n = 1\}, n \geq 1, l \leq n. \quad (1)$$

Смысл и структура вероятностей (1) вполне очевидны из словесной формулировки событий, заключённых в фигурных скобках: {последовательность длиной  $n$  не содержит серии успехов длиной  $l$  и оканчивается  $0$ }, {... $1$ }. Полагая  $l > 1$ , разложим каждое из этих двух событий на полную группу по формуле «хвоста» последовательности  $*0; *01; *011; \dots; *0\underbrace{1\dots 1}_{l-1}$ . Согласно формуле полной вероятности

для последовательностей (1) будем иметь систему рекуррентных уравнений:

$$q_{n,l}^{(0)} = \begin{cases} p_0, & n = 1 \\ \alpha q_{n-1,l}^{(0)} + (1-\beta)q_{n-1,l}^{(1)}, & n > 1 \end{cases}, \quad q_{n,l}^{(1)} = \begin{cases} 1-p_0, & n = 1 \\ (1-\alpha)q_{n-1,l}^{(0)} + \beta q_{n-1,l}^{(1)}, & 1 < n < l, \\ (1-\alpha)\sum_{k=1}^{l-1} \beta^{k-1} q_{n-k,l}^{(0)}, & n \geq l \end{cases}$$

$$q_{n,l} = q_{n,l}^{(0)} + q_{n,l}^{(1)}.$$

При  $l=1$   $q_{n,l}^{(1)}$  тождественно равно нулю, останется только одно слагаемое  $q_{n,l}^{(0)}$ . Сумма  $q_{n,l} = q_{n,l}^{(0)} + q_{n,l}^{(1)}$  есть вероятность отсутствия серии  $1$  длиной  $l$  на  $n$ -ом шаге последовательности. Эта вероятность тождественно равна единице при  $n < l$  и монотонно убывает при  $n \geq l$ . Подставляя в рекуррентные уравнения  $l=1,2,\dots$ , получаем двумерный массив  $q_{n,l}$ . Доопределив  $q_{n,0} = 0$ , ряд распределения  $L_n$  получаем в виде последовательных разностей:

$$P\{L_n = l\} = v_n(l) = q_{n,l+1} - q_{n,l}, n \geq 1, 1 \leq l \leq n. \quad (2)$$

Переход к максимальной серии нулей осуществляется циклической перестановкой в  $\alpha \leftrightarrow \beta$ .

С точки зрения практического применения более интересным представляется закон распределения максимальной серии, образованной одним знаком:  $L_n = \max\{L_n^{(0)}, L_n^{(1)}\}$ . Рекуррентные уравнения в таком случае приводятся к виду:

$$q_{n,l}^{(0)} = \begin{cases} (1-p_0)(1-\beta), & n = 2 \\ \alpha q_{n-1,l}^{(0)} + (1-\beta)q_{n-1,l}^{(1)}, & 2 < n < l, \\ (1-\beta)\sum_{k=1}^{l-1} \alpha^k q_{n-k,l}^{(1)}, & n \geq l \end{cases}, \quad q_{n,l}^{(1)} = \begin{cases} p_0(1-\alpha), & n = 2 \\ \beta q_{n-1,l}^{(1)} + (1-\alpha)q_{n-1,l}^{(0)}, & 1 < n < l, \\ (1-\alpha)\sum_{k=1}^{l-1} \beta^k q_{n-k,l}^{(0)}, & n \geq l \end{cases}$$

$$q_{n,l} = q_{n,l}^{(0)} + q_{n,l}^{(1)}.$$

Иллюстрацией данной схемы служит рис. 2. Полученные формулы годятся и для цепи Бернулли при замене  $\beta \leftarrow p, \alpha \leftarrow 1-p$ . В таблице 1 приведены доверительные интервалы длины максимальной серии для симметричного случая – орлянки. Например, в последовательности длиной  $n = 40$  с вероятностью не менее 90 % длина максимальной серии единиц или нулей окажется в границах интервала  $4 \leq L \leq 9$ . При расширении интервала до  $3 \leq L \leq 10$  доверительная вероятность составит не менее 95 %.

Таблица 1. Числовые характеристики и границы **90%**-х доверительных интервалов для максимальной серии успехов в симметричной цепи Бернулли (в скобках даны границы **95%**-х доверительных интервалов)

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16
$\mu$	1,50	2,00	2,38	2,69	2,94	3,16	3,34	3,51	3,66	3,92	4,15	4,34
$\sigma$	0,50	0,71	0,86	0,98	1,09	1,18	1,25	1,30	1,35	1,43	1,48	1,52
<b>НГ</b>	1	1	1	1	2(1)	2	2	2	2	2	2	3(2)
<b>ВГ</b>	2	3	4	5	5(6)	5(6)	6	6(7)	6(7)	7	7(8)	7(8)
<b>18</b>	<b>20</b>	<b>25</b>	<b>30</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>200</b>	<b>300</b>	<b>500</b>	<b>700</b>	<b>1000</b>	
4.51	4,66	4,98	5,24	5,66	5,98	6,98	7,98	8,56	9,30	9,78	10,30	
1.55	1,58	1,63	1,66	1,70	1,73	1,79	1,83	1,84	1,85	1,86	1,86	
3(2)	3	3	3	4(3)	4	5(4)	6(5)	6	7	7	8	
7(8)	8	8(9)	8(9)	9(10)	9(10)	10(11)	11(12)	12(13)	13(14)	13(14)	14(15)	

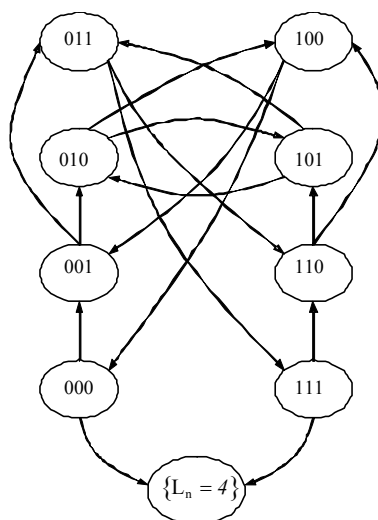


Рис. 2. Граф вероятностной цепи формирования серии  $L_n = 4$