УДК 519.217

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ ЛОКАЛЬНОГО ТРЕНДА

Максимова Г. А., Плотников А. Н.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет), г. Самара

Анализ временных рядов является одним из наиболее популярных приложений статистических методов в прогнозировании динамики финансовых показателей, а также в различных естественнонаучных приложениях. Первоочередной задачей всякого подобного анализа является оценка случайности временного ряда. Наиболее наглядной и удобной статистикой критерия случайности служит длина максимального локального тренда.

При исследовании закономерности образования трендов используем тот факт, что соотношение порядка между членами временного ряда непрерывной величины инвариантно к закону её распределения. Поэтому, не ограничивая общность результатов и выводов, достаточно рассмотреть закономерность образования трендов в случайной выборке из совокупности $\boldsymbol{R(0,1)}$. Приняв $\mathbf{0}$ – отрицательные значения последовательных разностей, $\mathbf{1}$ – положительные, получим $P\{\underbrace{001...01}_{n-1}\}=\int_0^1 dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^1 dx_{n-2} ... \int_0^{x_4} dx_3 \int_{x_3}^1 dx_2 \int_{x_2}^1 dx_1$. Таким образом, вероятность любой перестановки $n-1$ кодированных последовательных разностей представим в виде $P_n=\int_0^1 \varphi_n(x)dx$, где $\varphi_n(x)$ – рекуррентный многочлен порядка $n-1$.

Введём в рассмотрение вероятности отсутствия тренда длиной l в последовательности длиной n: $q_n^{(l)}$. Задача определения многочленов, соответствующих $q_n^{(l)}$, сводится к интегральному уравнению

$$\varphi_n^{(l)}(x)=\int_0^x \bar{\varphi}_{n-1}^{(l)}(x)dx+...+\underbrace{\int_0^x ... \int_0^x}_{l-2} \bar{\varphi}_{n-l+2}^{(l)}(x)\underbrace{dx...dx}_{l-2}, \quad \varphi_2^{(l)}(x)=\ldots\varphi_{l-1}^{(l)}(x)=x,$$

где $\bar{\varphi}_n^{(l)}(x)=\varphi_n^{(l)}(1-x)$.

Коэффициенты многочлена имеют вид правильных простых дробей с факториальными знаменателями. Общий вид формул для рекуррентного многочлена, рекуррентных соотношений для его коэффициентов и вероятностей $q_n^{(l)}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi_n^{(l)}(x)=\sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(l)}(n)x^k, n\ge l, \\ a_k^{(l)}(n)=\sum_{i=1}^{\min(k,l-2)} \dfrac{(-1)^{k-i}(k-i)!}{k!} \sum_{m=k-i}^{n-i-1} C_m^{k-i} a_m^{(l)}(n-i), n\ge l, k\le n-1, \\ q_n^{(l)}=2\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{a_k^{(l)}(n)}{k+1}. \end{cases}$$

Закон распределения длины максимального тренда $v_n(l)=P\{L_n=l\}$, как следует из определения вероятностей $q_n^{(l)}$, есть последовательные разности

$$v_n(l)=q_n^{(l+1)}-q_n^{(l)}. \quad (1)$$

Предельная форма (1) имеет вид

$$v_n(l)=\exp\left\{-(n-1)\frac{l+1}{(l+2)!}\right\}-\exp\left\{-(n-1)\frac{l}{(l+1)!}\right\},\ 2\le l\le n. \qquad (2)$$

Положим в (2) $n=\frac{\alpha(l+1)!}{2}$, где α – константа порядка 1. Приравнивая $v_n(l)=v_n(l+1)=\frac{1}{2}$, получаем $\alpha=\ln(2)$. Таким образом, последовательность $n_2(l)=\left[\frac{(l+1)!\ln(2)}{2}\right]$ соответствует фазе симметрично расщеплённой двойной изолированной моды: $P\{L_{n_2}=l\}\approx P\{L_{n_2}=l+1\}\approx\frac{1}{2}$. Другую последовательность характерных значений n представим в виде $n_1(l)=\left[\frac{(l+1)!\,\beta(l)}{2}\right]$. Из условия $v_n(l)\to\max$ получаем $\beta(l)=\frac{\ln(l)}{l-1}$, $n_1(l)=\left[\frac{(l+1)!\ln(l)}{2(l-1)}\right]$. Подставляя $n_1(l)$ в (2), получаем оценку $v(l)=1-O\left(\frac{\ln(l)}{l}\right)$. Следовательно, данная подпоследовательность соответствует фазе изолированной моды, то есть предельной формой распределения в этой фазе является вырожденное $P\{L_{n_1}=l\}\approx 1$. Таким образом, длина максимального локального тренда с возрастанием n циклически эволюционирует от симметричного бинарного до полностью вырожденного распределения, и её ареал последовательно пробегает все значения натурального ряда.

При установлении закона больших чисел для длины максимального тренда воспользуемся пуассоновской асимптотикой и взаимной независимостью величин $R_l^{(n)}$. Для верхней и нижней границ получим соответственно:

$$P\{L_n\ge l\}=1-\exp\left\{-2n\sum_{m\ge l}\left(\frac{m}{(m+1)!}-\frac{m+1}{(m+2)!}\right)\right\}=1-\exp\left\{-2n\left(\frac{l}{(l+1)!}\right)\right\}, \qquad (3)$$

$$P\{L_n\le l\}=\exp\left\{-2n\sum_{m>l}\left(\frac{m}{(m+1)!}-\frac{m+1}{(m+2)!}\right)\right\}=\exp\left\{-2n\left(\frac{l+1}{(l+2)!}\right)\right\}. \qquad (4)$$

Границы сходимости рядов (3), (4) устанавливаем непосредственным перебором. На интервале $n_1(l)<n<n_2(l)$ множество практически реализуемых значений максимального тренда серии состоит из не более четырёх подряд стоящих значений $L_n\in\{l-1\div l+2\}$. Внутри интервала $n_2(l)<n<n_1(l+1)$ множество реализуемых значений сокращается до трёх: $L_n\in\{l\div l+2\}$. Интервалы $n_1(l)<n<n_1(l+1)$ плотно (без пропусков) покрывают всё множество N. Следовательно, длина максимального локального тренда в стационарном временном ряду при $n\to\infty$ лишь конечное число раз может выйти за границы множества четырёх подряд стоящих значений; на интервале $\frac{(l+1)!\ln(2)}{2}<n<(l+2)!\frac{\ln(l+1)}{2l}$ множество практически реализуемых значений сокращается до трёх $L_n\in\{l\div l+2\}$. Установленный факт подтверждается статистическими экспериментами и представляет значительный интерес в контексте проблемы случайности, а также в части фундаментальных основ информационных технологий.