



С.А. Пиявский

## «САМЫЙ ЕСТЕСТВЕННЫЙ» МЕТОД ПРИНЯТИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

(ФГБОУ ВПО «Самарский государственный  
архитектурно-строительный университет»)

Рассматриваются задачи многокритериального принятия решений, в которых альтернативы характеризуются набором частных критериев, могущих к тому же зависеть от ряда неопределенных факторов. Предлагается метод, позволяющий лицу, принимающему решение, с использованием специального программного обеспечения легко и обоснованно решать такие задачи на основе естественных для него суждений. Метод обладает максимально возможной объективностью, поскольку не использует искусственных приемов, направленных на полную формализацию задачи за счет отыскания якобы адекватного ей единственного способа учета неопределенности («принципа оптимальности»), а учитывает все множество таких способов.

### Введение

В центре процедуры принятия любого решения, в конечном счете, находится человек или небольшая группа людей: субъект, который принято обобщенно называть Лицом, принимающим решения – ЛПР. Это вызвано тем принципиальным обстоятельством, что любая, даже всего только двухкритериальная, задача принятия решения математически незамкнута. Поэтому ЛПР призван дополнить в той или иной форме постановку проблемы до содержательной замкнутости, позволяющей, в конечном счете, прийти к единственному «наиболее рациональному решению». Отсюда следует, что метод должен быть понятен ЛПР-у, не сужать его возможностей по принятию решения за счет специфических особенностей самого метода, не предполагать у него наличия квалификации, выходящей за пределы его обычной компетенции и быть нетрудоемким для него.

В [1] показано, что методов, одновременно удовлетворяющих всем этим требованиям, нет. Так, широко распространенный метод «линейной сверки» понятен ЛПР-у, однако может упускать Парето-оптимальные решения и предполагает, что ЛПР в состоянии указать точные количественные значения «весовых коэффициентов» сверки, что нереально даже при использовании «компетентных» экспертов (учитывая условность их подбора и неизбежный разброс в оценках).

Предложенный нами в начале 70-х годов метод ПРИНН [2,3] свободен от этих недостатков, однако в начальном варианте содержал упрощения, (фиксированные размеры  $\varepsilon$ -сети в пространстве способов учета неопределенности), направленные на то, чтобы уменьшить вычислительную трудоемкость метода. Информационные технологии сегодняшнего дня позволили отказаться от этих упрощений и предложить излагаемый ниже метод, который, по нашему мне-



нию, действительно и действенно ставит ЛПР в центр принятия сложных решений.

### Базовая постановка задачи

Рассмотрим классическую задачу многокритериальной оптимизации. Обозначим:  $Y$  – множество вариантов решений (альтернатив),  $f(y) = \{f^1(y), f^2(y), \dots, f^m(y)\}$ ,  $y \in Y$  – вектор-функция  $m$  частных критериев оптимальности, определенных на множестве альтернатив. Лицо, принимающее решение (ЛПР), желает выбрать из множества альтернатив «наиболее рациональный» вариант.

В этой задаче наиболее рациональный вариант решения  $\bar{y} \in Y$  должен быть Парето-оптимальным, то-есть удовлетворять известному условию (при стремлении минимизировать каждый частный критерий):

$$\neg \exists \hat{y} \in Y : (f^j(\hat{y}) \leq f^j(\bar{y}) \quad j = 1, \dots, m) \wedge (\exists j \in \{1, \dots, m\} : f^j(\hat{y}) < f^j(\bar{y})).$$

ать, в той или иной форме, дополнительную информацию или суждения.

Одно из наиболее естественных суждений состоит в том, чтобы ввести в рассмотрение некоторый скалярный комплексный критерий оптимальности  $F(f(y))$ , соразмеряющий сравнительную важность различных частных критериев и позволяющий выбрать наиболее рациональный вариант решения строго математически:

$$F(f(\bar{y})) = \min_{y \in Y} F(f(y)).$$

Тем самым задача принятия решения перестает быть многокритериальной и при задании конкретной функции  $F(f)$  наиболее рациональный вариант решения определяется путем обычной скалярной оптимизации. Однако, поскольку конкретный вид функции  $F(f)$  ЛПР-у неизвестен, тем самым в задачу вводится новое множество: множество допустимых способов учета неопределенности  $S$ , которое представляет собой множество допустимых функций  $s \equiv F(f)$ .

Без ограничения общности рассмотрения будем полагать далее, что значения всех частных критериев, а также комплексного критерия, нормированы от 0 до 1. Тогда способ учета неопределенности – это строго монотонная функция, определенная на  $n$ -мерном единичной гиперкубе и сопоставляющая каждому вектору из него числовое значение, также заключенное то нуля до единицы. Для того, чтобы подчеркнуть там, где необходимо, именно этот смысл обозначения  $F(f)$  в отличие от значения комплексного критерия при конкретном значении аргумента  $f$ , мы будем использовать в этом втором смысле обозначение  $F_s(f)$ .

### Предлагаемый подход

Большинство существующих формализованных методов принятия решений направлены на то, чтобы отыскать «правильный» для условий конкретной задачи способ учета неопределенности  $\bar{s} \equiv \bar{F}(f)$ , после чего наиболее рациональный вариант решения  $\bar{y} \in Y$  определяется чисто математическим путем,



как правило, однозначно. Простейшим, и наиболее часто используемым на практике, примером такого подхода является введение линейной свертки частных критериев.

Более естественный путь решения задачи многокритериального выбора решения состоит, по нашему мнению, в том, чтобы, отказавшись от стремления устранить неопределенность выбором конкретного способа ее «свертывания», использовать для принятия решения непосредственно ВСЕ МНОЖЕСТВО способов учета неопределенности. В методе ПРИНН мы осуществили такой подход в три этапа. Первые два этапа носят универсальный характер, и лишь третий реализуется при решении конкретной задачи.

На первом этапе было дано математическое описание универсального множества способов учета неопределенности  $S$  для задачи, в которой скалярный критерий оптимальности  $F$  зависит от функции  $f(x)$ , принимающей значения на элементах  $x \in X$  некоторого множества неопределенности  $X$ . Показано, что множество  $S$  есть множество непрерывных строго монотонных функций одной переменной  $G(t)$  (так называемых порождающих функций), определенных на отрезке  $[0,1]$  и удовлетворяющих условиям  $G(0) = 0$ ,  $G(1) = 1$ . Значение комплексного критерия при способе учета неопределенности  $G(t)$  рассчитывается по конечной формуле.

На втором этапе все множество допустимых способов учета неопределенности было заменено оптимальной  $\varepsilon$ -сетью, т.е. конечным числом наиболее полно представляющих его способов учета неопределенности.

На третьем этапе между этими «представителями» организуется (конечно, в виде математического алгоритма) итеративная процедура согласования оценок каждого варианта решения каждым «представителем» с позиций присущего ему способа учета неопределенности, однако с учетом оценок, данных другими «представителями». Такой алгоритм моделирует известную процедуру ДЕЛФИ согласования мнений экспертов.

Метод ПРИНН хорошо зарекомендовал себя при решении значительного числа практических задач, однако определенным его недостатком является субъективность предложенной процедуры выделения небольшого числа «представителей» из всего множества способов учета неопределенности и организации процедуры типа ДЕЛФИ. Из-за этого метод по сути также можно рассматривать как один из возможных конкретных способов учета неопределенности, наряду с методом линейной свертки и другими. В предлагаемом в настоящей статье методе этот недостаток устранен, так как при принятии решения используется непосредственно все множество способов учета неопределенности. Субъективность, которая является принципиальным правом ЛПР, включается (притом лишь при его желании) только через два вида его «уверенных» суждений.

**Уверенное суждение первого типа.** *При своей уверенности ЛПР может отнести различные частные критерии к различным группам важности.* Например, «критерии 1 и 4 наиболее важны, критерии 2 и 6 просто важны, а кри-



терий 5 имеет наименьшую важность». Подчеркнем, что не предполагается, что ЛПР дает количественную оценку степени сравнительной важности частных критериев, речь идет лишь об их качественном сравнении, притом необязательном.

**Уверенное суждение второго типа.** При желании ЛПР может сконструировать пары Парето-несравнимых векторов частных критериев, в отношении которых он уверен, что один из векторов «лучше» другого. При этом не требуется, чтобы эти вектора отражали эффективность каких-либо реальных объектов. Если  $f_1$  и  $f_2$  - такая пара, в которой  $f_1$  «уверенно лучше», чем  $f_2$ , то это накладывает следующее ограничение на множество  $S$  :

$$S \subset \{s\} : F_s(f_1) \leq F_s(f_2) \quad \forall s \in S.$$

Соответственно, предлагаемый нами метод состоит из следующих четырех этапов.

**Этап 1. Строится профиль неопределенности решаемой задачи.** Он показывает для каждого варианта решения  $y \in Y$  диапазон изменения значений комплексного критерия эффективности на данном решении при всевозможных способах учета неопределенности. Профиль неопределенности задается парой определенных на  $Y$  функций:

$$\text{минорантой } m(y) = \min_{s \in S} F(f(y)) \text{ и мажорантой } M(y) = \max_{s \in S} F(f(y)).$$

Заметим, что при этом могут быть выявлены заведомо нерациональные решения  $z \in Y$ , для которых существуют такие решения  $\bar{z} \in Y$ , которые лучше их по комплексному критерию при любых возможных способах неопределенности. Условие выявления таких решений  $z$  имеет вид:

$$\exists \bar{z} \in Y : M(\bar{z}) < m(z).$$

Основное назначение профиля неопределенности – дать ЛПР представление о степени влияния неопределенности на принятие решений в данной задаче. По мере добавления им «уверенных суждений» он сможет судить, насколько они уменьшают неопределенность.

**Этап 2. По возможности сужается множество неопределенностей за счет учета в нем уверенных суждений ЛПР.** При уверенных суждениях первого типа из множества  $S$  исключаются не соответствующие этим суждениям способы учета неопределенности. При уверенных суждениях второго типа к описанию множества  $S$  добавляются условия, исключаяющие те способы учета неопределенности, для которых не выполняются эти суждения.

В результате первых двух этапов исходное множество неопределенностей может сузиться, что отразится на профиле неопределенности решаемой задачи, однако вряд ли в нем останется лишь один элемент, или из множества вариантов решений по условию (8) будут исключены все варианты, кроме одного. Таким образом, неопределенность в задаче сохранится. Это и будет **неустрашимая** неопределенность. Все образующие ее способы учета неопределенности полностью равноправны для ЛПР, поскольку свои возможности внести дополнительное содержание в описание задачи он уже внес утверждениями первого и



второго типа. Не исключено, что могут быть найдены и другие типы уверенных суждений ЛПР, но они не изменят картину принципиально: все равно и после их использования неустранимая неопределенность в задаче останется.

**Этап 3. Рассчитываются жесткий и мягкий рейтинги вариантов решений с учетом неустранимой неопределенности.** Чтобы не вводить ненужный для понимания (и практического применения) сложный математический аппарат, будем считать, что множество  $S$  содержит конечное число способов учета неопределенности  $S = \{s_k\}_{k=1, \dots, K}$ .

Тогда **жесткий рейтинг**  $RG(y)$  решения  $y \in Y$  есть доля способов учета неопределенности, при которых это решение является наилучшим по сравнению с остальными решениями:

$$RG(y) = \frac{\sum_{k=1}^K 1_{F_k(y) \leq F_k(z) \forall z \in Y}}{K}, \quad y \in Y.$$

(В случае, если при каком-то способе учета неопределенности лучшими оказываются несколько (например,  $p$ ) решений, в жестком рейтинге каждого из них в сумме в числителе добавляется не 1, а  $\frac{1}{p}$ ).

**Мягкий рейтинг**  $RM(y)$  решения  $y \in Y$  отражает среднюю сравнительную эффективность этого решения  $y$  по сравнению с решениями, оказавшимися наилучшими при различных способах учета неопределенности:

$$RM = \frac{\sum_{k=1}^K \frac{F_{s_k}(f(y))}{\max_{y \in Y} F_{s_k}(f(y))}}{K}.$$

**Этап 4. ЛПР признает, что возможности дальнейшего уменьшения неопределенности за счет его «уверенных суждений» исчерпаны.** Окончательно, в качестве «наиболее рационального» решения им выбирается решение с наилучшим (наименьшим) жестким рейтингом. Если таких решений несколько, в качестве наиболее рационального выбирается то из них, которое имеет наилучший (наименьший) мягкий рейтинг.

Автор благодарит В.В.Малышева за многократные полезные обсуждения, способствовавшие появлению данной работы.

### Литература

1. Малышев В.В., Пиявский Б.С., Пиявский С.А. Метод принятия решений в условиях многообразия способов учета неопределенности // Известия РАН. Теория и системы управления, 2010. – № 1. – с. 46 – 61
2. Пиявский С.А., Брусков В.С., Хвилон Е.А. Оптимизация параметров многоцелевых летательных аппаратов. – М. «Машиностроение», 1974. – 106 с.



3. Смирнов О.Л., Падалко С.А., Пиявский С.А. САПР: формирование и функционирование проектных модулей. – М.: Машиностроение, 1987. – 272 с.