7. Fnaiech F., Ljung L. Recursive identification of bilinear systems // International Journal of Control Vol. 45(2), P. 453-470, 1987.

Д.В. Иванов, Л.Ю. Фролова

КРИТЕРИЙ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ АВТОРЕГРЕССИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОМЕХОЙ НАБЛЮДЕНИЯ

(Самарский государственный университет путей сообщения)

Модели авторегрессии находят применение в цифровой обработке сигналов, эконометрике, экологии, геофизических исследованиях, системах распознавания изображений, анализе временных рядов.

При наличии аддитивной помехи в выходном сигнале МНК дает смещенные оценки параметров авторегрессии. В настоящее время активно развиваются методы нелинейного оценивания параметров динамических систем [1,2]. В [3] предложен метод нелинейных наименьших квадратов, позволяющий получать сильно состоятельные оценки параметров авторегрессии при наличии помехи в выходном сигнале, его рекуррентная модификация приведена в [4]. В статье дано обобщение метода нелинейных наименьших квадратов на случай авторегрессии дробного порядка с помехой наблюдения.

Постановка задачи. Рассмотрим линейную динамическую систему дробного порядка, описываемую следующими стохастическими уравнениями с дискретным временем $i = ... -1,0,1,...$:

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \xi_i^{(1)},\ \ y_i = z_i + \xi_i^{(2)}, \tag{1}$$

где $0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_r$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$, $\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha_m}{j} z_{i-j}$,

$$\binom{\alpha_m}{j} = \frac{\Gamma(\alpha_m + 1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m - j + 1)},$$

z_i, y_i-ненаблюдаемая и наблюдаемая выходные переменные; x_i – наблюдаемая входная переменная; $\xi_i^{(2)}$ – помеха наблюдения в выходном сигнале;

Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Множество $\widetilde{\mathrm{B}}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой динамической системы является компактом.

2. Случайные процессы $\left\{\xi_i^{(k)}\right\}, k = 1,2$ является мартингал-разностью и удовлетворяет следующим условиям: $E\left(\xi_i^{(k)} / F_i^{(k)}\right) = 0$, п.н., $E\left(\left(\xi_i^{(k)}\right)^2 / F_i^{(k)}\right) < \infty$ п.н. $E\left(\left(\xi_i^{(k)}\right)^4\right) < \infty$, $E\left(\left(\xi_i^{(k)}\right)^2\right) < \infty$, где $F_i^{(k)}$ – σ- алгебра,

индуцированная семейством непрерывных случайных величин $\{\xi_k(t), t \in T_i\}, T_i = \{\text{t; t} \le \text{i, t} \in \text{Z}_\text{c}$-множество целых чисел$\}$.

3^0. Помехи $\{\xi_i^{(k)}\}, k = 1,2$ независимы в совокупности.

Требуется определять оценки неизвестных коэффициентов динамической системы описываемой уравнением (1) по наблюдаемой последовательности y_i при известных $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

Критерий для оценивания параметров. Система может быть записана как линейная регрессия

$$y_i = \varphi_i^T b_0 + \varepsilon_i, \tag{2}$$

где $\varphi_i = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha_1}{j} y_{i-j-1}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha_r}{j} y_{i-j-1} \right)^T$, $b = \left(b_0^{(1)}, \ldots, b_0^{(r)}\right)^T$,

$\varepsilon_i = \xi_i^{(1)} + \xi_i^{(2)} - b_0^T \varphi_\xi^{(i)}$, $\varphi_\xi^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha_1}{j} \xi_{i-j-1}^{(1)}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha_r}{j} \xi_{i-j-1}^{(1)} \right)^T$.

Лемма. *Пусть выполняются условия 1-3, тогда средняя дисперсия обобщенной ошибки равна*

$$\overline{\sigma}_\varepsilon^2 = \overline{\sigma}_1^2 + \overline{\sigma}_2^2 + b_0^T H_\xi b_0 = \omega(b_0),$$

где $\overline{\sigma}_1^2 = \lim\limits_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \left(\xi_i^{(1)}\right)^2$, $\overline{\sigma}_2^2 = \lim\limits_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \left(\xi_i^{(2)}\right)^2$,

$$H_\xi = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} E\left[\sum_{i=1}^{N} \varphi_\xi^{(i)} \left(\varphi_\xi^{(i)}\right)^T \right] = \begin{pmatrix} h_\xi^{(11)} & \cdots & h_\xi^{(r1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\xi^{(1r)} & \cdots & h_\xi^{(rr)} \end{pmatrix},$$

$$h_\xi^{(mk)} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} \binom{\alpha_m}{j} \binom{\alpha_k}{j} \sigma_2^2 (i-j-1), m = \overline{1,r}.$$

Тогда определим оценку $\hat{b}(N)$ неизвестных параметров из условия минимума суммы взвешенных квадратов обобщённых ошибок $\left(\varepsilon_i(b,i)\right)^2$ с весом $\omega(b)$, т.е.

$$\min_{b \in \tilde{B}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - \varphi_i^T \theta\right)^2}{\overline{\sigma}_1^2 + \overline{\sigma}_2^2 + b_0^T H_\xi b_0} = \min_{\theta \in \tilde{B}} \frac{U_N(b)}{\omega(b)}. \tag{3}$$

Имеет место, следующая теорема:

Теорема. *Пусть некоторый случайный процесс* $\{y_i, i = \ldots -1,0,1,\ldots\}$ *описывается уравнением (1) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1-3. Тогда оценка* $\hat{b}(N)$, *определяемая выражением (3) с вероятно-*

стью 1 при $N \to \infty$, *существует, единственная и является сильно состоятельной оценкой, т.е.* $\hat{b}(N) \xrightarrow[N \to \infty]{\text{п.н.}} b_0$.

Литература

1. Кацюба О.А. Теория идентификации стохастических динамических систем в условиях неопределенности: монография. – Самара: СамГУПС, 2008. ISBN 978-5-98941-079-8.

2. Иванов Д.В. Рекуррентное оценивание параметров динамических систем. Модели с ошибками в переменных. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH. 2011. ISBN 978-3-8473-0715-0.

3. Кацюба О.А., Жданов А.И. Идентификация методом наименьших квадратов уравнений авторегрессии с аддитивными ошибками измерений. // Автоматика и телемеханика. 1982. - №2 – с.29-32.

4. Ivanov D.V., Katsyuba O.A. Recurrent identification of autoregression in the presence of observation noises in output signal // International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON-2009). Proceedings. – Tomsk: Tomsk IEEE Chapter & Student Branch. Russia, Tomsk, March 27-28, 2009. P. 79-82.

Д.В. Иванов, Ю.Ф. Шакурова

О СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОШИБКАМИ В ПЕРЕМЕННЫХ

(Самарский государственный университет путей сообщения)

В настоящее время активно развиваются методы нелинейного оценивания параметров динамических систем [1,2]. В статье предложено обобщение метода нелинейных наименьших квадратов на случай динамической системы нецелого порядка с помехой в выходном сигнале.

Постановка задачи

Рассмотрим линейную динамическую систему дробного порядка, описываемую следующими стохастическими уравнениями с дискретным временем $i = \ldots -1,0,1,\ldots$:

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i,$$
$$y_i = z_i + \xi_i^{(1)}, \quad w_i = x_i + \xi_i^{(2)}, \tag{1}$$

где $0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_r$, $0 < \beta_1 \ldots < \beta_{r_1}$, $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$,