В.Е. Зотеев, А.А. Попкова

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ АППРОКСИМАЦИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОВЕРХНОСТНО УПРОЧНЕННОМ СЛОЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА

(Самарский государственный технический университет)

При расчете и исследовании полей остаточных напряжений и пластических деформаций в поверхностно-упрочненном цилиндрическом изделии одной из основных задач является задача достоверной оценки параметров аппроксимации экспериментальных зависимостей остаточных напряжений $\sigma_\theta^{res}(r)$. Эта зависимость от глубины $r$ упрочненного слоя цилиндрического образца, как правило, описывается аналитической функцией вида

$$\sigma_\theta^{res}(r) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left[-\frac{(a-r)^2}{b^2}\right], \qquad (1)$$

где $\sigma_0$, $\sigma_1$ и $b$ – параметры, подлежащие определению [1].

Известный подход к решению этой задачи не предполагает в своих алгоритмах применения статистических методов обработки результатов эксперимента [1]. Он, как правило, использует информацию о двух, специальным образом выбранных, точках кривой (1) и дополнительное условие, связывающее её параметры. При этом практически все точки эксперимента в вычислениях параметров зависимости (1) не участвуют, что является существенным недостатком такого метода.

Предлагается новый численный метод определения на основе экспериментальных данных параметров напряженного состояния поверхностно упрочненного слоя цилиндрического изделия. В основе метода лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов разностного уравнения, описывающего результаты эксперимента для компоненты остаточных напряжений, возникающих в упрочненном слое цилиндрического образца после процедуры поверхностного пластического деформирования. Алгоритм этого метода включает следующие основные этапы [2]:

- построение рекуррентной формулы, связывающей несколько последовательных дискретных значений зависимости (1) компоненты напряжений $\sigma_\theta^{res}(r)$;
- разработка разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений и учитывающих случайный разброс в данных эксперимента;
- формирование на основе разностных уравнений обобщенной регрессионной модели, коэффициенты которой известным образом связаны с параметрами исследуемой зависимости (1);

– среднеквадратичное оценивание коэффициентов обобщенной регрессионной модели, в основе которого лежит минимизация суммы квадратов отклонений модели (1) от результатов наблюдений по всем точкам эксперимента;
– вычисление параметров компоненты остаточных напряжений, возникающих в упрочненном слое цилиндрического образца;
– оценка погрешности результатов вычислений, а также адекватности построенной модели результатам эксперимента.

В соответствие с методикой, изложенной в [2], построена система разностных уравнений, описывающая результаты эксперимента для компоненты напряжений $\sigma_\theta^{res}(r)$, и лежащая в основе численного метода параметрической идентификации напряженно-деформированного состояния:

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_5 + \varepsilon_0; \\ y_1 = \lambda_6 + \varepsilon_1; \\ y_k y_{k-2} = \lambda_1 \left( y_k + y_{k-2} \right) + \lambda_2 y_{k-1}^2 + \lambda_3 y_{k-1} + \lambda_4 + \eta_k; \\ \eta_k = \varepsilon_{k-2} \left( y_k - \lambda_1 \right) - \varepsilon_{k-1} \left( 2\lambda_2 y_{k-1} + \lambda_3 \right) + \varepsilon_k \left( y_{k-2} - \lambda_1 \right), \\ \qquad k = 2,3,4,...,N-1, \end{cases} \tag{2}$$

где $y_k = \sigma_\theta^{res}(k\Delta r)$, $k = 0,1,2,3,...,N-1$, – результаты эксперимента, $\Delta r$ – шаг дискретизации зависимости (1); $N$ – объем выборки результатов наблюдений; $\varepsilon_k$ – случайный разброс в данных эксперимента;

$$\lambda_1 = \sigma_0, \quad \lambda_2 = \exp\left( -\frac{2\Delta r^2}{b^2} \right), \quad \lambda_3 = -2\lambda_1 \lambda_2, \quad \lambda_4 = \lambda_1^2 \left( \lambda_2 - 1 \right), \quad \lambda_5 = \sigma_0 - \sigma_1, \quad \lambda_6 = \sigma_0 - \sigma_1 \sqrt{\lambda_2}. \tag{3}$$

Формулы (3) позволяют по найденным среднеквадратичным оценкам коэффициентов разностного уравнения (2) вычислить параметры $\sigma_0$, $\sigma_1$ и $b$ модели (1).

Для вычисления среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения (2), обеспечивающих минимум отклонения модели (1), описывающей компоненту напряжений $\sigma_\theta^{res}(r)$, от экспериментальных данных, используется обобщенная регрессионная модель вида $\begin{cases} b = F\lambda + \eta; \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases}$ где

$b = \left( y_0, y_1, y_0 y_2, y_1 y_3, \ldots, y_{N-3} y_{N-1} \right)^T$, $\lambda = \left( \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \right)^T$, $\varepsilon = \left( \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{N-1} \right)^T$,

$$\eta = \left( \eta_1, \eta_2, ..., \eta_N \right)^T = \left[ \varepsilon_0, \varepsilon_1, \left( y_2 - \lambda_1 \right) \varepsilon_0 - \left( 2\lambda_2 y_1 + \lambda_3 \right) \varepsilon_1 + \left( y_0 - \lambda_1 \right) \varepsilon_2, ..., \right.$$

$$\left. \ldots, \ \left( y_{N-1} - \lambda_1 \right) \varepsilon_{N-3} - \left( 2\lambda_2 y_{N-2} + \lambda_3 \right) \varepsilon_{N-2} + \left( y_{N-3} - \lambda_1 \right) \varepsilon_{N-1} \right]^T,$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y_0 + y_2 & y_1^2 & y_1 & 1 & 0 & 0 \\ y_1 + y_3 & y_2^2 & y_2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N-3} + y_{N-1} & y_{N-2}^2 & y_{N-2} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ y_2-\lambda_1 & -(2\lambda_2 y_1+\lambda_3) & y_0-\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_3-\lambda_1 & -(2\lambda_2 y_2+\lambda_3) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(2\lambda_2 y_{N-3}+\lambda_3) & y_{N-4}-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{N-1}-\lambda & -(2\lambda_2 y_{N-2}+\lambda_3) & y_{N-3}-\lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Для выполнения требования $\|\varepsilon\|^2 = \left\|P_\lambda^{-1}b - P_\lambda^{-1}F\lambda\right\|^2 \to \min$ алгоритм численного метода на основе обобщенной регрессионной модели использует итерационную процедуру уточнения среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}_i$ коэффициентов разностного уравнения. Эта процедура может быть описана формулой:

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \left(F^T\Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i)}}F\right)^{-1}F^T\Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i)}}b, \quad \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}} = P_{\hat{\lambda}^{(i)}}P^T_{\hat{\lambda}^{(i)}}, \tag{4}$$

где $i = 0,1,2,...$ – номер итерации. Начальное приближение вектора среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}^{(0)}$ может быть найдено из условия минимизации невязки $\|\eta\|^2 \to \min$ по формуле $\hat{\lambda}^{(0)} = \left(F^TF\right)^{-1}F^Tb$. Достаточные условия сходимости итерационной процедуры рассматриваются и исследуются в [2].

Среднеквадратичные оценки $\hat{\lambda}_i$ коэффициентов разностного уравнения, вычисленные на основе описанного выше алгоритма численного метода, используются для нахождения оценок параметров зависимости компоненты напряжений (1). Из (3) можно получить следующие соотношения:

$$\hat{b} = \frac{\sqrt{2}\Delta r}{\sqrt{-\ln\hat{\lambda}_2}}, \quad \hat{\sigma}_0 = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{\sigma}_1 = \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_5. \tag{5}$$

Проведенные численно-аналитические исследования алгоритмов численного метода на основе модели (2) показали, что устойчивость вычисления динамической характеристики $b$ существенно выше, чем параметров $\sigma_0$ и $\sigma_1$, величина которых зависит от выбора начала координат. В связи с этим был предложен алгоритм уточнения параметров $\sigma_0$ и $\sigma_1$ с учетом известной оценки $\hat{b}$, в основе которого лежит минимизация функционала: $\sum_{k=0}^{N-1}\left[y_k - \sigma_0 - \sigma_1\exp\left(-\frac{(\Delta r)^2k^2}{\hat{b}^2}\right)\right]^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\left[y_k - \sigma_0 - \sigma_1\hat{\lambda}_2^{\frac{k^2}{2}}\right]^2 \to \min$, где оценка $\hat{\lambda}_2$ найдена на основе итерационной процедуры (4). Использование этого алгоритма позволяет существенно повысить адекватность построенной модели экспериментальным данным.

Таким образом, применение численного метода, в основе которого лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов разностного уравнения, при расчете и исследовании полей остаточных напряжений и пластических деформаций при поверхностном упрочнении цилиндрических изделий позволяет повысить адекватность модели экспериментальным данным и, тем самым, достоверность оценок параметров напряженно деформируемого состояния.

**Литература**

1. Радченко, В.П. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях/В. П. Радченко, М.Н. Саушкин М.: Машиностроение-1, 2005. – 226 с.

2. Зотеев, В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений/В. Е. Зотеев.- М.: Машиностроение, 2009.-344 с.

3. Гриневич, Е.В. Исследование полей остаточных напряжений при поверхностном упрочнении цилиндрических изделий // Прочность и долговечность элементов конструкций/Е.В. Гриневич, О.В. Колотникова – Куйбышев: КПтИ, 1983. – С. 88-97.

Д.В. Иванов, Е.А. Донец

## РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ БИЛИНЕЙНЫХ ARX СИСТЕМ С ПОМЕХОЙ НАБЛЮДЕНИЯ ВО ВХОДНОМ СИГНАЛЕ

(Самарский государственный университет путей сообщения)

Билинейные системы - это класс нелинейных систем с простой структурой. Билинейные системы являются простейшим обобщением линейных динамических систем: выходной сигнал зависит не только от входных и выходных сигналов, но и от произведения входного сигнала на выходной. Моделирование физических процессов с помощью билинейных систем находит применение во многих областях науки, таких как ядерная физика, электрические сети, химическая кинетика, гидродинамика и т.д. [1].

Модели ошибки уравнения (ARX модели) [2] наиболее распространенный вид моделей параметризации шума. Идентификация моделей ошибки уравнения сводится к классической задаче регрессионного анализа и может быть решена методом наименьших квадратов. Однако во многих практических задачах помеха содержится также и во входном сигнале, в этом случае классический метод наименьших квадратов не позволяет получать состоятельные оценки.

В настоящее время активно развиваются методы идентификации билинейных динамических систем, такие как инструментальные переменные [3], компенсирующий смещение метод наименьших квадратов [4], метод максимального правдоподобия [5] и методы на основе высших статистик [6]. Рекуррентные методы идентификации билинейных систем, которые могут быть получены из рекуррентных методов идентификации линейных систем приведены в [7]. В статье предложен рекуррентный алгоритм оценивания параметров билинейных ARX систем с помехой во входном сигнале на основе стохастической аппроксимации.