

Филиппов Григорий Александрович

ФОРМИРОВАНИЕ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫХ НОМИНАЛЬНЫХ ПРОГРАММ
УПРАВЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО
АППАРАТА С КОНЕЧНОЙ ТЯГОЙ НА ОКОЛОКРУГОВЫХ ОРБИТАХ

2.5.16. Динамика, баллистика,
управление движением летательных аппаратов

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» на кафедре динамики полёта и систем управления.

Научный руководитель:

доктор технических наук, профессор Ишков Сергей Алексеевич, профессор кафедры динамики полёта и систем управления.

Официальные оппоненты:

Константинов Михаил Сергеевич, доктор технических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», профессор кафедры 601 «Космические системы и ракетостроение».

Гришко Дмитрий Александрович, кандидат физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», доцент кафедры ФНЗ «Теоретическая механика» им. профессора Н. Е. Жуковского.

Ведущая организация: федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр «Саратовский научный центр Российской академии наук», г. Саратов.

Защита состоится 3 марта 2023 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета 24.2.379.03, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева», по адресу: 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке и на сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева»:

https://ssau.ru/files/resources/dis_protection/Filippov_G_A_Formirovanie_pareto_optimalnyh_nominalnyh.pdf

Автореферат разослан «__» _____ 2022 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
к.т.н., доцент

Крамлих Андрей Васильевич

В диссертации рассматривается задача оптимизации программ номинального управления относительным движением маневрирующего космического аппарата, снабжённого двигательной установкой конечной тяги, в окрестности пассивного космического аппарата, движущегося на околокруговой орбите.

Актуальность темы исследований. Задача управления движением одного космического аппарата (КА) относительно другого была поставлена в процессе освоения околоземного космического пространства, когда возникла необходимость организации группового полёта, сближения и стыковки КА. В последствии к ним добавились задачи приведения КА в точку стояния геостационарной орбиты, инспекции, ремонта и утилизации КА.

В качестве исполнительных органов для управления движением используются как традиционные импульсные двигатели, так и перспективные при длительных сроках существования электроракетные двигатели и другие типы двигательных установок конечной тяги. Решение задач управления относительным движением для таких двигателей потребовало разработки соответствующих моделей и методов выбора номинального управления, отличных от таковых для импульсных двигателей.

Основой для баллистических и проектных исследований является получение номинальных программ управления КА для различных граничных условий и внешних воздействий.

В качестве критериев выбора номинального управления относительным движением выступают или общая продолжительность манёвра (задача быстрогодействия) или суммарные затраты характеристической скорости манёвра при фиксированной продолжительности. Требования минимальной характеристической скорости и быстрогодействия противоречивы. Традиционно, задаются граничные условия перелёта и общая его продолжительность, а затраты характеристической скорости минимизируются.

При формировании космических миссий, задача выбора номинального управления относительным движением является центральной, играющей важную роль при проектировании КА и его систем. Теоретические основы задач управления относительным движением описаны в книгах Аппазова Р. Ф. и Сытина О. Г., Константинова М. С., Охоцимского Д. Е., Эльясберга П. Е., Clohessy W. H. и Wiltshire R. S., Geffroy S. и Epenoy R., в которых разработаны математические модели относительного движения и получены частные решения для импульсного и непрерывного управления.

Для оптимизации номинального управления относительным движением КА с двигательной установкой конечной тяги существуют косвенные методы, применённые в работах Баранова А. А., Ишкова С. А., Лебедева В. Н., Миронова В. И., Салмина В. В., Яблонько Ю. П., Shen H. J. и Tsiotras P., Han C. и Xie H. W., Kriz J. A., основанные на применении формализма принципа максимума Понтрягина, динамического программирования Беллмана, метода неопределённых множителей Лагранжа, и прямые методы, основанные на сведении исходной оптимизационной задачи к конечно-мерной параметрической (Улыбышев Ю. П., Guzman J. J., Hughes S. P., Kluever C. A., Mailhe L. M.).

В работах Баранова А. А. рассмотрены задачи, связанные с выбором оптимального управления относительным движением. На основании теории базис-векторов, получены алгоритмы расчёта манёвров с двумя – шестью включениями тяги.

Улыбышевым Ю. П. рассмотрена оптимизация траекторий относительного движения прямым методом, связанным с разделением траектории на большое, но конечное число сегментов, в некоторых из которых допускается проведение оптимальной коррекции.

Известны решения задачи выбора оптимального управления относительным движением более современными прямыми методами: генетические алгоритмы (Luo Y. Z., Tang G. J., Li H. Y.), эволюционные алгоритмы (Luo Y. Z., Zhang J., Li H. Y.), а также их комбинации (Luo Y. Z., Tang G. J., Lei Y. J., Luo Y. Z., Li H. Y., Tang G. J., Zhang J., Wang X., Ma X. B.).

В работах Красильщикова М. Н., Малышева В. В., Федорова А. В. оптимизация траекторий выполнена комбинированным методом, сочетающим косвенные и прямые методы. Одной из особенностей работы является многокритериальная оптимизация траекторий относительного движения, выполненная методом свёртки критериев задачи, позволившим свести многокритериальную задачу к однокритериальной.

Таким образом, можно заключить, что не смотря на достигнутые успехи, задача выбора номинального управления относительным движением в многокритериальной постановке исследована недостаточно. При планировании космических миссий получение множества оптимальных по Парето программ управления с точки зрения многокритериальной постановки является **актуальной** задачей.

Целью работы является разработка алгоритма построения множества номинальных оптимальных по Парето программ управления продольным относительным движением КА в двухкритериальной постановке – по критериям затраты моторного времени и затраты общего времени.

Объектом исследования является управление относительным движением КА.

Предметом исследования является двухкритериальная оптимизация номинальных программ управления относительным движением КА.

Для достижения поставленной цели, необходимо решение следующих **задач**:

1. Разработка математической модели относительного движения центра масс КА.
2. Получение оптимальных программ управления и исследование структур управления относительным движением по критерию минимум затрат моторного времени при фиксированном общем времени методом принципа максимума Понтрягина.
3. Выбор структуры и исследование параметрических программ управления с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальном направлении, разработка алгоритмов расчёта параметрического управления.
4. Разработка алгоритмов двухкритериальной оптимизации параметрических программ управления в рамках теории эффективности Парето по критериям минимум моторного времени и минимум общего времени.
5. Разработка программного обеспечения для выполнения расчёта параметрических программ управления с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальном направлении.

Для решения поставленных задач использовались следующие **методы исследований**: принцип максимума Понтрягина, методы численного решения краевых задач, методы численной оптимизации, методы математического анализа, принцип эффективности Парето.

Научная новизна. В диссертации получены новые научные результаты:

1. Построена математическая модель относительного движения КА, инвариантная к параметрам опорной орбиты и величине ускорения от тяги маневрирующего КА.
2. Методом принципа максимума Понтрягина получены серии решений задачи оптимального управления относительным движением КА, определены структуры оптимального управления и оценены предельные минимальные затраты моторного времени.
3. Определены структуры параметрических программ управления относительным движением с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальном направлении.
4. Получены аналитические соотношения для расчёта размеров активных участков параметрических программ управления, определены области граничных условий, допускающие их применение, получены аналитические соотношения для расчёта предельных затрат моторного и общего времени.
5. Разработан алгоритм построения множества оптимальных по Парето номинальных программ управления относительным движением с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальном направлении по критериям минимум моторного времени и минимум общего времени.

Достоверность результатов обеспечивается применением известных численных ме-

тодов решения краевых задач оптимального управления, известных методов численного интегрирования, сравнением результатов, полученных в диссертации, с результатами, полученными другими авторами.

Теоретическая значимость работы заключается в определении оптимального управления относительным движением с пассивным участком методом принципа максимума Понтрягина.

Практическая значимость работы заключается в получении аналитических соотношений для размеров активных участков и предельных значений критериев параметрических программ управления с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальном направлении по критериям минимум моторного времени и минимум общего времени и получение множества оптимальных по Парето программ управления.

Апробация работы. Основные научные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на:

- XIX Всероссийском семинаре по управлению движением и навигации летательных аппаратов (г. Самара, 2016 г.);
- V Всероссийской научно-технической конференции с международным участием «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» (г. Самара, 2017 г.);
- XXI Научно-технической конференции молодых учёных и специалистов, посвящённой 60-летию со дня запуска первого искусственного спутника (г. Королёв, Московская обл., 2017);
- 6 Российско-Германской конференции по электроракетным двигателям и их применению (г. Самара, 2017 г.);
- Международной конференции по нелинейным задачам в авиации и космонавтике 2018 (респ. Армения, г. Ереван, 2018 г.);
- XXII Международной научно-практической конференции, посвящённой памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика Михаила Федоровича Решетнёва (г. Красноярск, 2018 г.);
- Международном семинаре «Навигация и управление движением» (NMC 2022) (г. Саратов, 2022 г.).

Результаты работы **опубликованы** в изданиях, входящих в перечень ВАК (три статьи) и в изданиях, индексируемых Scopus/WebOfScience (четыре статьи).

Положения, выносимые на защиту:

1. Оптимальные программы управления относительным движением по критерию минимума затрат моторного времени для случая свободной и трансверсальной ориентации вектора тяги.
2. Аналитические соотношения для расчёта размеров участков постоянства тяги параметрических программ управления, определение областей применения параметрических программ управления.
3. Алгоритмы построения множества оптимального по Парето номинального управления с двумя и тремя включениями тяги в пространстве критериев минимум моторного времени и минимум общего времени.
4. Результаты решения задачи приведения КА с двигательной установкой конечной тяги в заданную точку стояния геостационарной орбиты в двухкритериальной постановке.

Соответствие паспорта специальности. Полученные в диссертации результаты соответствуют следующим пунктам паспорта специальности 2.5.16 – Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов: пункту 1 – Разработка и совершенствование математических моделей, используемых для описания движения и управления летательным аппаратом на различных режимах полета, пункту 8 – Синтез терминального управления движением ЛА, пункту 12 – Совершенствование методов навигации и управления движением летательных аппаратов, совершенствование баллистико-навигационного

обеспечения полета летательных аппаратов. Разработка новых методов оптимизации состава навигационных измерений и методов планирования навигационных измерений. Разработка методов оптимальной обработки навигационной информации.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы, содержащего 60 наименований. Работа изложена на 131 странице.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводятся характеристики решаемых задач, обосновывается актуальность темы, формулируется цель и задачи диссертационных исследований. Отмечены новизна и практическая значимость работы, даны сведения о публикациях и апробации работы.

В **первой главе** проведён анализ основных результатов исследований в области управления относительным движением КА. Представлены способы формирования оптимального управления – косвенные (принцип максимума Понтрягина) и прямые (сведение исходной задачи к параметрической). Отмечена необходимость решения задачи оптимизации траекторий относительного движения в многокритериальной постановке.

В качестве исходной нелинейной модели рассмотрены уравнения относительного движения маневрирующего космического аппарата (КА2) относительно пассивного космического аппарата (КА1) в орбитальной цилиндрической системе координат¹ (рис. 1):

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r} &= \Delta V_r, \quad \Delta \dot{u} = \frac{V_{u_2}}{r_2} - \frac{V_{u_1}}{r_1}, \quad \Delta \dot{z} = \Delta V_z, \\ \Delta \dot{V}_r &= \frac{V_{u_2}^2}{r_2} - \frac{V_{u_1}^2}{r_1} - \mu \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + a_S, \\ \Delta \dot{V}_u &= -\frac{V_{r_2} V_{u_2}}{r_2} + \frac{V_{r_1} V_{u_1}}{r_1} + a_T, \\ \Delta \dot{V}_z &= -\mu \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right) \Delta z + a_W. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь r – радиус-вектор, u – аргумент широты, z – боковое смещение КА, V_r , V_u и V_z – радиальная, трансверсальная и нормальная скорость, a_S , a_T , и a_W – проекция ускорения от тяги в радиальном, трансверсальном и нормальном направлении, μ – гравитационный параметр, символом Δ обозначена разность параметров движения маневрирующего КА2 и пассивного КА1.

Введены допущения:

1. Расстояние между центрами масс КА1 и КА2 мало по сравнению с радиус-вектором КА1.
2. Орбита КА1 круговая или слабо эллиптическая с эксцентриситетом менее 0,1.
3. Величина ускорения от тяги КА2, отнесённая к гравитационному ускорению на орбите КА1, менее чем 10^{-2} . Масса КА2 постоянна.
4. Движение КА1 и КА2 рассмотрено в центральном гравитационном поле, без учёта возмущающих сил.

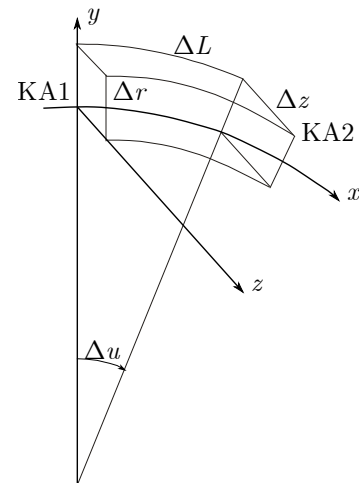


Рисунок 1 – Орбитальная цилиндрическая система координат

¹Константинов М. С. Механика космического полёта. М.: Машиностроение, 1989.

Уравнения движения (1), с учётом введённых допущений, линеаризуются¹ в окрестности базовой орбиты, которой может быть какая-либо круговая орбита или орбита КА1. На основании анализа пассивного движения выделены в явном виде вековые и периодические составляющие относительного движения (рис. 2) и построены уравнения движения в этих переменных².

Для обобщения полученных результатов, уравнения движения записаны в **безразмерном**, не имеющем вычислительных особенностей, виде. Для варианта отсутствия ограничений на ориентацию вектора тяги (свободная ориентация вектора тяги) они имеют вид:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\bar{r}}_{\text{cp}} &= \delta \cos \alpha, & \Delta \dot{\bar{L}}_{\text{cp}} &= -\frac{3}{2} \Delta \bar{r}_{\text{cp}} - \delta \sin \alpha, \\ \dot{\bar{l}}_x &= \delta \cos \alpha - \bar{l}_y, & \dot{\bar{l}}_y &= \frac{\delta \sin \alpha}{2} + \bar{l}_x, \\ \dot{t}_{\text{мот}} &= \delta,\end{aligned}\quad (2)$$

и для случая трансверсальной ориентации тяги:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\bar{r}}_{\text{cp}} &= \delta, & \Delta \dot{\bar{L}}_{\text{cp}} &= -\frac{3}{2} \Delta \bar{r}_{\text{cp}}, \\ \dot{\bar{l}}_x &= \delta - \bar{l}_y, & \dot{\bar{l}}_y &= \bar{l}_x, \\ \dot{t}_{\text{мот}} &= |\delta|.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь $\Delta \bar{r}_{\text{cp}}$ – среднее (вековое) смещение КА2 вдоль радиуса орбиты КА1, $\Delta \bar{L}_{\text{cp}}$ – среднее (вековое) смещение КА2 вдоль орбиты КА1, $\bar{l}_x = \bar{l} \cos(\varphi)$, $\bar{l}_y = \bar{l} \sin(\varphi)$ – периодические составляющие относительного движения, $l^2 = l_x^2 + l_y^2$ – малая полуось эллипса относительного движения, $\varphi = \arctg(l_y/l_x)$ – угол, определяющий положение КА2 на эллипсе относительного движения, $t_{\text{мот}}$ – моторное время работы двигателя, α – угол отклонения вектора тяги от трансверсального направления, $\delta = \{0, 1\}$ – при свободной ориентации вектора тяги и $\delta = \{-1, 0, 1\}$ – при трансверсальной.

Для перехода от размерных переменных к безразмерным используют соотношения:

$$\bar{t} = \lambda t, \quad \lambda = \sqrt{\mu \frac{(1-e^2)^3}{p^3}}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{K}, \quad K = \frac{2a}{\lambda^2}.$$

Здесь $\mathbf{x} = [\Delta r_{\text{cp}}, \Delta L_{\text{cp}}, l_x, l_y]^T$ – вектор состояния, \bar{t} , t – безразмерное и размерное время соответственно, λ – угловая скорость КА1, p , e – фокальный параметр и эксцентриситет орбиты КА1, a – ускорение от тяги КА2. Верхний символ « $\bar{\cdot}$ » указывает на безразмерность фазовых координат и в дальнейшем будет опущен.

Для случая трансверсальной ориентации вектора тяги система (3) имеет³ аналитическое решение в квадратурах, приведённое в диссертации к **безразмерному** виду:

²Ишков С. А. Сближение космических аппаратов с малой тягой на около-круговых орбитах // Космические исследования. 1992. Т. 30. № 2. С. 165-179

³Эльясберг П. Е. Введение в теорию полёта искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965. 540 с.

$$\begin{aligned}
\Delta r_{cp}(t) &= \Delta r_{cp0} + \int_0^t \delta \, d\psi, & \Delta L_{cp}(t) &= -1.5\Delta r_{cp0} - 1.5 \int_0^t \delta (t - \psi) \, d\psi, \\
l_x(t) &= l_{x0} - \int_0^t \delta \cos(t - \psi) \, d\psi, & l_y(t) &= l_{y0} + \int_0^t \delta \sin(t - \psi) \, d\psi.
\end{aligned} \tag{4}$$

Поставлена задача двухкритериальной оптимизации – определить оптимальное управление, обеспечивающее удовлетворение граничных условий \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_k и доставляющее минимум критериям задачи – затраты моторного времени $t_{\text{мот}}$, общие затраты времени $t_{\text{общ}}$:

$$\mathbf{u}_{\text{опт}} = \arg \min_{\mathbf{u} \in U} [t_{\text{мот}} \rightarrow \min, t_{\text{общ}} \rightarrow \min \mid \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_k]. \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{u}_{\text{опт}}$ – оптимальное управление, \mathbf{u} – вектор, определяющий угол отклонения вектора тяги от трансверсального направления и функцию включения тяги, U – область допустимых управлений, \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_k – вектор состояния в начальный t_0 и конечный t_k момент времени, $t_{\text{мот}}$ и $t_{\text{общ}}$ – критерии задачи – моторное и общее время перелёта соответственно.

Во **второй главе** с применением принципа максимума Понтрягина сформулированы и решены вариационные задачи оптимального управления продольным относительным движением для случая свободной и трансверсальной ориентации вектора тяги.

Критерием задачи является минимум моторного времени $t_{\text{мот}} \rightarrow \min$ при фиксированном общем времени перелёта $t_{\text{общ}}$. Граничные условия задачи имеют вид:

$$\begin{aligned}
t = 0 : \quad & \Delta r_{cp} = \Delta r_{cp0}, \quad \Delta L_{cp} = \Delta L_{cp0} \quad l_x = l_{x0}, \quad l_y = l_{y0}; \\
t = t_k : \quad & \Delta r_{cp} = 0, \quad \Delta L_{cp} = 0, \quad l_x = 0, \quad l_y = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

На **первом этапе** определено оптимальное **управление вековыми** составляющими движения для случая трансверсальной ориентации вектора тяги. Гамильтониан системы уравнений векового движения (первые два уравнения системы (3)) имеет вид:

$$H = \delta \Psi_{\Delta r_{cp}} - \frac{3}{2} \Psi_{\Delta L_{cp}} \Delta r_{cp} + \Psi_{t_{\text{мот}}} |\delta|. \tag{7}$$

Здесь $\Psi_{\Delta r_{cp}}$, $\Psi_{\Delta L_{cp}}$ – сопряжённые множители, решения для которых имеют вид:

$$\Psi_{\Delta r_{cp}}(t) = \Psi_{\Delta r_{cp0}} + \frac{3}{2} t \Psi_{\Delta L_{cp0}}, \quad \Psi_{\Delta L_{cp}}(t) = \Psi_{\Delta L_{cp0}}. \tag{8}$$

Оптимальное управление определено как максимум гамильтониана (7) в виде релейной функции времени:

$$\delta_{\text{опт}} = \begin{cases} -1 & \Psi_{\Delta r_{cp}} < -\Psi_{t_{\text{мот}}} \\ 0 & -\Psi_{t_{\text{мот}}} < \Psi_{\Delta r_{cp}} < \Psi_{t_{\text{мот}}} \\ 1 & \Psi_{\Delta r_{cp}} > \Psi_{t_{\text{мот}}} \end{cases}. \tag{9}$$

Анализ оптимального управления (9) показывает, что оно определяется знаком линейной функции времени (сопряжённой переменной $\Psi_{\Delta r_{cp}}$) и имеет не более двух включений тяги разного знака, которые разделены пассивным участком.

Аналитически определены размеры участков постоянства знака тяги:

$$\begin{aligned}
t_1 &= -\delta \Delta r_{cp0} - \frac{t_{\text{п}}}{2} + \sqrt{\frac{t_{\text{п}}^2}{4} + \delta \mathbf{L} + \mathbf{R}}, \\
t_2 &= -\delta \Delta r_{cpk} - \frac{t_{\text{п}}}{2} + \sqrt{\frac{t_{\text{п}}^2}{4} + \delta \mathbf{L} + \mathbf{R}},
\end{aligned} \tag{10}$$

где t_{π} – размер пассивного участка, введены обозначения:

$$\mathbf{R} = \frac{\Delta r_{\text{cp0}}^2 + \Delta r_{\text{cpк}}^2}{2}, \quad \mathbf{L} = \frac{2}{3} (\Delta L_{\text{cp0}} - \Delta L_{\text{cpк}}),$$

функция включения тяги (знак тяги) на первом активном участке определяется граничными условиями:

$$\delta = \text{sign} \left[\frac{2}{3} (\Delta L_{\text{cp0}} - \Delta L_{\text{cpк}}) - \frac{(\Delta r_{\text{cp0}} - \Delta r_{\text{cpк}}) |\Delta r_{\text{cp0}} - \Delta r_{\text{cpк}}|}{2} \right], \quad (11)$$

а на втором она противоположного знака.

Существует размер пассивного участка, при котором размер одного из активных участков (10) становится нулевым:

$$t_1 = 0 \quad \text{при} \quad t_{\pi} = \frac{-\Delta r_{\text{cp0}}^2 + \delta \mathbf{L} + \mathbf{R}}{\delta \Delta r_{\text{cp0}}};$$

$$t_2 = 0 \quad \text{при} \quad t_{\pi} = \frac{-\Delta r_{\text{cpк}}^2 + \delta \mathbf{L} + \mathbf{R}}{\delta \Delta r_{\text{cpк}}}.$$

При отсутствии одного из активных участков достигается минимум затрат моторного времени:

$$t_{\text{мот}}^{\min} = | \Delta r_{\text{cp0}} - \Delta r_{\text{cpк}} |. \quad (12)$$

Таким образом, минимальные затраты моторного времени зависят только от граничного условия для среднего смещения вдоль радиуса орбиты.

Определено оптимальное управление периодическими составляющими относительного движения для случая трансверсальной ориентации вектора тяги. Гамильтониан системы уравнений периодического движения (третье и четвёртое уравнения системы (3)) имеет вид:

$$H = \Psi_{l_x} (\delta - l_y) + \Psi_{l_y} l_x + \Psi_{t_{\text{мот}}} | \delta |. \quad (13)$$

Здесь Ψ_{l_x} , Ψ_{l_y} – сопряжённые множители, решения для которых имеют вид:

$$\Psi_{l_x}(t) = \sqrt{\Psi_{l_x0}^2 + \Psi_{l_y0}^2} \cos \left(t + \arctg \frac{\Psi_{l_y0}}{\Psi_{l_x0}} \right);$$

$$\Psi_{l_y}(t) = \sqrt{\Psi_{l_x0}^2 + \Psi_{l_y0}^2} \sin \left(t + \arctg \frac{\Psi_{l_y0}}{\Psi_{l_x0}} \right). \quad (14)$$

Оптимальное управление определено как максимум гамильтониана (13) в виде релейной функции времени:

$$\delta_{\text{опт}} = \begin{cases} -1 & \Psi_{l_x} < -\Psi_{t_{\text{мот}}} \\ 0 & -\Psi_{t_{\text{мот}}} < \Psi_{l_x} < \Psi_{t_{\text{мот}}} \\ 1 & \Psi_{l_x} > \Psi_{t_{\text{мот}}} \end{cases}. \quad (15)$$

Анализ оптимального управления (15) показывает, что оно определяется знаком гармонической функции времени (сопряжённой переменной Ψ_{l_x}) и, на интервале витка, содержит три включения тяги разного знака, которые разделены пассивными участками.

Оценены минимальные затраты моторного времени:

$$t_{\text{мот}}^{\min} = | l_0 - l_{\text{к}} |. \quad (16)$$

Таким образом, минимальные затраты моторного времени зависят только от граничного условия для малой полуоси эллипса относительного движения.

На **втором этапе** определено оптимальное управление всеми составляющими относительного движения. Для случая свободной ориентации вектора тяги гамильтониан системы (2) имеет вид:

$$H = \left[\left(\frac{\Psi_{l_y}}{2} - \Psi_{\Delta L_{cp}} \right) \sin \alpha + (\Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{cp}}) \cos \alpha + \Psi_{t_{mot}} \right] \delta - \frac{3}{2} \Psi_{\Delta L_{cp}} \Delta r_{cp} + \Psi_{l_y} l_x - \Psi_{l_x} l_y. \quad (17)$$

Оптимальное управление определено как максимума гамильтониана (17) в виде:

$$\operatorname{tg}(\alpha_{opt}) = \frac{\frac{\Psi_{l_y}}{2} - \Psi_{\Delta L_{cp}}}{\Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{cp}}}, \quad \delta_{opt} = \begin{cases} 0 & \sqrt{\left(\frac{\Psi_{l_y}}{2} - \Psi_{\Delta L_{cp}} \right)^2 + (\Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{cp}})^2} + \Psi_{t_{mot}} < 0 \\ 1 & \sqrt{\left(\frac{\Psi_{l_y}}{2} - \Psi_{\Delta L_{cp}} \right)^2 + (\Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{cp}})^2} + \Psi_{t_{mot}} > 0 \end{cases}. \quad (18)$$

Для случая трансверсальной ориентации вектора тяги гамильтониан системы (3) имеет вид:

$$H = \Psi_{\Delta r_{cp}} \delta - \Psi_{\Delta L_{cp}} \frac{3}{2} \Delta r_{cp} + \Psi_{l_x} (\delta - l_y) + \Psi_{l_y} l_x + \Psi_{t_{mot}} |\delta|. \quad (19)$$

Оптимальное управление определено как максимум гамильтониана (19) в виде:

$$\delta_{opt} = \begin{cases} -1 & \Psi_{\Delta r_{cp}} + \Psi_{l_x} < -\Psi_{t_{mot}} \\ 0 & -\Psi_{t_{mot}} < \Psi_{\Delta r_{cp}} + \Psi_{l_x} < \Psi_{t_{mot}} \\ 1 & \Psi_{\Delta r_{cp}} + \Psi_{l_x} > \Psi_{t_{mot}} \end{cases}. \quad (20)$$

Выполнен расчёт оптимальных траекторий в области граничных условий, приведённых в табл. 1. Начальный фазовый угол φ_0 принят равным нулю, граничные условия при $t = t_k$ нулевые. На рис. 3 показана зависимость общего времени перелёта от моторного для выбранных граничных условий для вариантов свободной и трансверсальной ориентации вектора тяги. На рис. 4 показан пример оптимальной траектории и управления для граничных условий 1Б по табл. 1.

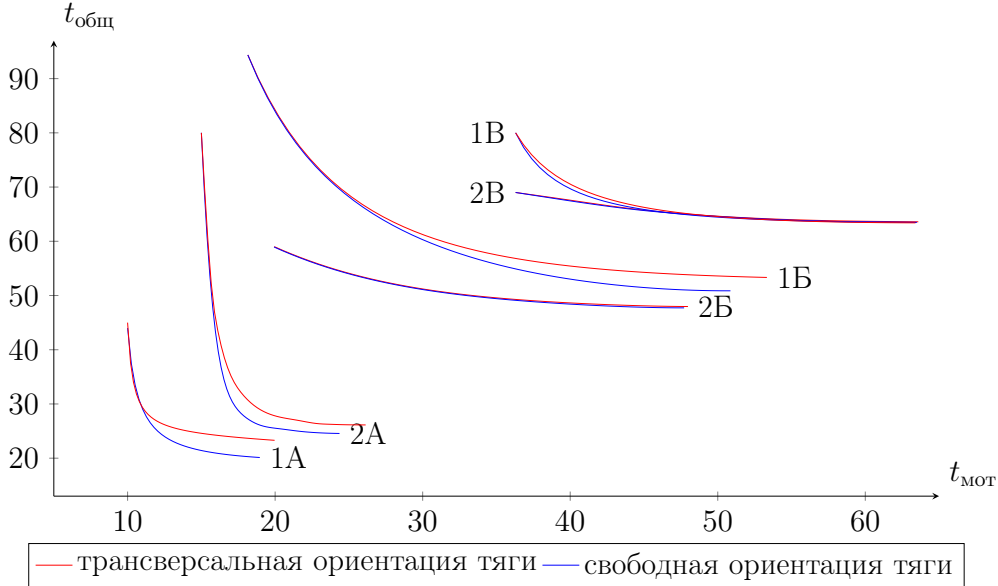


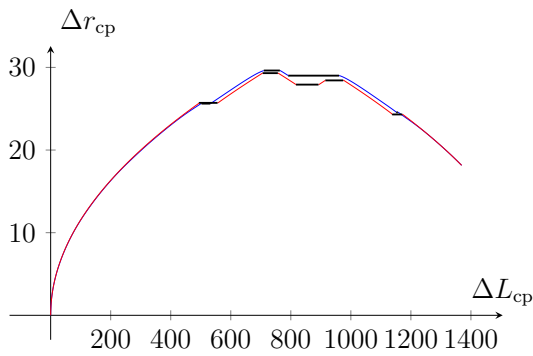
Рисунок 3 – Зависимостей критериев задачи для граничных условий из табл. 1

На основании проведённого анализа решений краевой задачи, для случая трансверсальной ориентации вектора тяги, получены структуры оптимального управления:

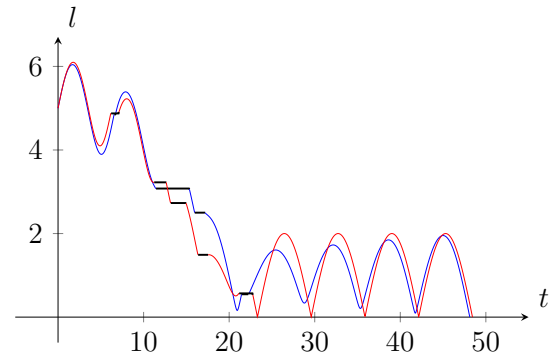
1. При доминировании требования коррекции векового движения $|\Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k}| \gg |l_0 - l_k|$ выполнено условие $\Psi_{\Delta r_{cp}} \gg \Psi_{l_x}$ и оптимальное управление (20) стремится к программе коррекции векового движения (9), для которого количество включений тяги конечно.
2. При доминировании требования коррекции периодического движения $|l_0 - l_k| \gg |\Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k}|$ выполнено условие $\Psi_{l_x} \gg \Psi_{\Delta r_{cp}}$ оптимальное управление (20) стремится к программе коррекции периодического движения (15) – три включения тяги **в пределах витка**, разделённые пассивным участком. Количество витков не ограничено.

Таблица 1 – Безразмерные начальные условия движения

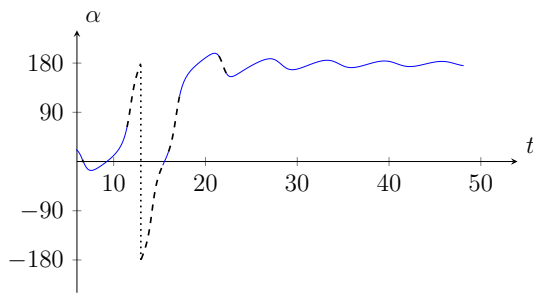
	Вариант "А" $ l_0 - l_k \gg \Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k} $	Вариант "Б" $ l_0 - l_k \approx \Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k} $	Вариант "В" $ l_0 - l_k \ll \Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k} $
1	$\Delta r_{cp_0} = 1,815$ $\Delta L_{cp_0} = 136$ $l_0 = 10$	$\Delta r_{cp_0} = 18,15$ $\Delta L_{cp_0} = 1360$ $l_0 = 5$	$\Delta r_{cp_0} = 36,3$ $\Delta L_{cp_0} = 2720$ $l_0 = 2$
2	$\Delta r_{cp_0} = 1,815$ $\Delta L_{cp_0} = 136$ $l_0 = 15$	$\Delta r_{cp_0} = 18,15$ $\Delta L_{cp_0} = 1360$ $l_0 = 20$	$\Delta r_{cp_0} = 36,3$ $\Delta L_{cp_0} = 2720$ $l_0 = 5$



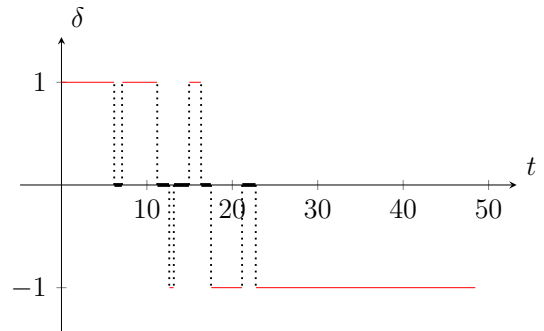
а) траектория векового движения



б) малая полуось эллипса относительного движения



в) оптимальный угол отклонения тяги



г) оптимальная функция включения тяги

Рисунок 4 – Пример траекторий и оптимального управления со свободной и трансверсальной ориентацией тяги

Минимальные затраты моторного времени зависят от величины граничных условий (рис. 3):

$$t_{\text{мот}}^{\min} = \max (|\Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k}|, |l_0 - l_k|). \quad (21)$$

Использование свободной ориентации тяги, в зависимости от граничных условий, позволяет уменьшить затраты моторного времени, по сравнению с трансверсальной тягой (рис. 3):

- при выполнении условия $|l_0 - l_k| \gg |\Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k}|$ на 10 – 15 %;
- при выполнении условия $|l_0 - l_k| \approx |\Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k}|$ на 3 %;
- при выполнении условия $|\Delta r_{cp_0} - \Delta r_{cp_k}| \gg |l_0 - l_k|$ на величину менее 1%.

На основании проведённых исследований предложены параметрические программы управления, удобные при практической реализации, с двумя или тремя включениями тяги в трансверсальном направлении (положительном или отрицательном), разделённые пассивными участками.

В **третьей главе** рассматривается двухкритериальная оптимизация размеров участков $\rho = [t_0, t_1, p_1, t_2, p_2, t_3]^T$ параметрических программ управления по выбранным критериям:

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{опт}} = \arg \min \left[\begin{array}{l} t_{\text{мот}} = \sum t_i \rightarrow \min, \\ t_{\text{общ}} = t_0 + \sum (t_i + p_i) \rightarrow \min \end{array} \middle| \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_k \right]. \quad (22)$$

Здесь $\boldsymbol{\rho}_{\text{опт}}$ – оптимальный вектор размеров участков, t_0 – размер участка ожидания, t_i – размер i – го активного участка (тяга включена), p_i – размер i – го пассивного участка (тяга выключена).

Возможные фазовые траектории векового движения с двумя включениями тяги, представляющие собой параболы на активных участках и прямые на пассивных, показаны на рис. 5.

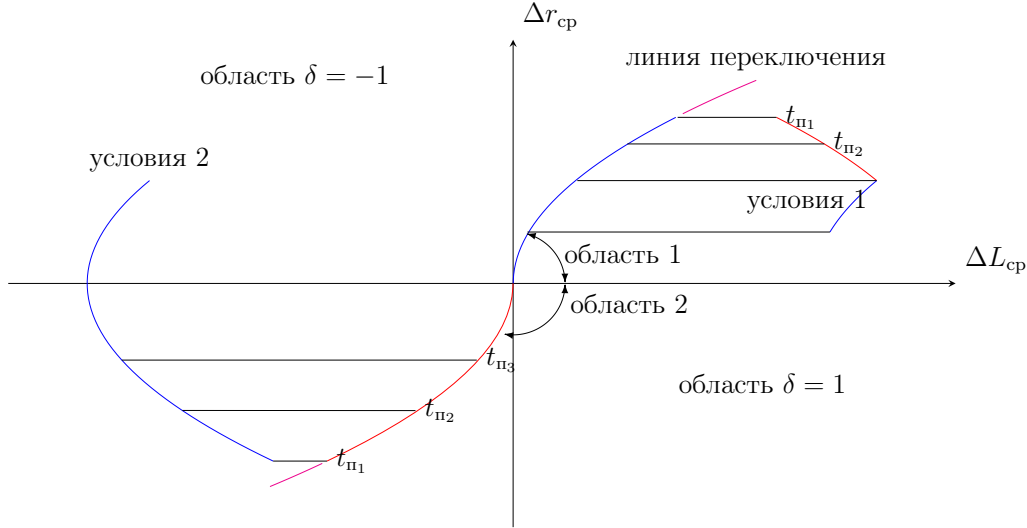


Рисунок 5 – Возможные фазовые траектории с двумя включениями тяги

Для анализа областей постоянства знака тяги и областей применения программ с одинаковым и разным знаком тяги, для случая попадания в начало координат, выделены области:

- если начальная точка находится правее линии переключения (условия 1 на рис. 5), то знак тяги на первом активном участке положительный (область $\delta = 1$), допускается применение программ как с разным, так и с одинаковым знаком тяги;
- если начальная точка находится левее линии переключения (условия 2 на рис. 5), то знак тяги на первом активном участке отрицательный (область $\delta = -1$), допускаются только программы с разным знаком тяги.

Для структуры управления с двумя включениями тяги разного знака, без учёта граничного условия для малой полуоси эллипса относительного движения, определены размеры активных участков как функции граничных условий (6) для вековых составляющих и размеров пассивных участков:

$$\begin{aligned} t_1 &= -\Delta r_{\text{ср}0} \delta - \frac{t_{\text{п}}}{2} + \sqrt{\frac{t_{\text{п}}^2}{4} - \delta (\Delta r_{\text{ср}0} t_0 - \mathbf{L})} + \mathbf{R}, \\ t_2 &= -\Delta r_{\text{ср}к} \delta - \frac{t_{\text{п}}}{2} + \sqrt{\frac{t_{\text{п}}^2}{4} - \delta (\Delta r_{\text{ср}0} t_0 - \mathbf{L})} + \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $t_{\text{п}}$ – размер пассивного участка, δ – определяет знак тяги на первом активном участке (см. (11)).

Определена граница множества оптимальных по Парето решений задачи:

$$t_{\text{общ}}(t_{\text{мот}}) = \frac{4(\mathbf{R} + \delta \mathbf{L}) + t_{\text{мот}}(t_{\text{мот}} + 2t_0) - (\Delta r_{\text{ср}0} + \Delta r_{\text{ср}к})^2 - 2\delta t_0 (\Delta r_{\text{ср}0} - \Delta r_{\text{ср}к})}{2(t_{\text{мот}} + \delta (\Delta r_{\text{ср}0} + \Delta r_{\text{ср}к}))} \quad (24)$$

Определены минимальные и максимальные значения критериев задачи (22) для рас-

смаатриваемой структуры управления:

$$\begin{aligned}
\max(t_{\text{мот}}) &= 2\sqrt{\mathbf{R} + \delta(\mathbf{L} - \Delta r_{\text{cp0}} t_0)} + \delta(\Delta r_{\text{cp0}} + \Delta r_{\text{cpк}}), \\
\min(t_{\text{мот}}) &= |\Delta r_{\text{cp0}} - \Delta r_{\text{cpк}}|, \\
\max(t_{\text{общ}}) &= \frac{(\Delta r_{\text{cp0}} + \Delta r_{\text{cpк}})^2 + 2\mathbf{L}}{2\Delta r_{\text{cp0}}}, \\
\min(t_{\text{общ}}) &= 2\sqrt{\mathbf{R} + \delta(\mathbf{L} - \Delta r_{\text{cp0}} t_0)} - \delta(\Delta r_{\text{cp0}} + \Delta r_{\text{cpк}}) + t_0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Удовлетворение граничного условия для **малой полуоси эллипса относительного движения** обеспечивается путём подбора размера участка ожидания и пассивного участка из уравнения:

$$l_{\text{к}}^2 = l_0^2 + 2\delta l_0 \sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(\varphi_0 + t_{\text{общ}} + \arctg \frac{B}{A}\right) + A^2 + B^2. \tag{26}$$

Здесь A и B - многочлены, полученные взятием интегралов в уравнениях периодического движения системы (третье и четвёртое уравнения системы (4)).

Уравнение (26) является ограничением оптимизационной задачи (22). Если размер пассивного участка кратен

$$t_{\text{п}} = \pi - \frac{t_1 + t_2}{2},$$

то достигается предельное приращение малой полуоси эллипса относительного движения:

$$\max(|l_0 - l_{\text{к}}|) = 2 \left| \sin \frac{t_1}{2} + \sin \frac{t_2}{2} \right|_{t_1=t_2=180^\circ} = 4. \tag{27}$$

Двухкритериальная задача сведена к минимизации функции (26) по параметрам t_0 и $t_{\text{п}}$. Перебор $t_{\text{п}}$ приводит к получению серии решений задачи, из которой выбираются оптимальные по Парето.

Для программ управления с тремя включениями тяги одного знака получены размеры активных участков:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{3(\Delta r_{\text{cp0}}^2 - \Delta r_{\text{cpк}}^2) + \delta[4(\Delta L_{\text{cp0}} - \Delta L_{\text{cpк}}) - 6\Delta r_{\text{cp0}}(t_0 + p_1 + p_2)] - 6t_2 p_2}{6(p_1 + p_2)}, \\
t_2 &= \frac{3(\Delta r_{\text{cpк}}^2 - \Delta r_{\text{cp0}}^2) + \delta[6(\Delta r_{\text{cp0}} t_0 + \Delta r_{\text{cpк}}(p_1 + p_2)) - 4(\Delta L_{\text{cp0}} - \Delta L_{\text{cpк}})] - 6t_2 p_1}{6(p_1 + p_2)}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Подстановка размеров активных участков (28) в критерий (22) позволяет записать:

$$\begin{aligned}
t_{\text{мот}} &= t_1 + t_2 = \text{const} = |\Delta r_{\text{cp0}} - \Delta r_{\text{cpк}}|, \\
t_{\text{общ}} &= t_0 + t_1 + p_1 + t_2 + p_2 + t_3 = (t_0 + p_1 + p_2) + |\Delta r_{\text{cp0}} - \Delta r_{\text{cpк}}|.
\end{aligned} \tag{29}$$

Как следует из (29), критерий задачи моторное время зависит только от граничного условия для Δr_{cp} , критерий задачи общее время непрерывно увеличивается. Двухкритериальная задача вырождена до однокритериальной, заключающейся в минимизации функции (26) по параметрам t_0 , p_1 и p_2 , которые должны быть минимальными.

Предельное приращение малой полуоси эллипса относительного движения составляет:

$$\begin{aligned}
\max(|l_0 - l_{\text{к}}|) &= (10 - 4 \cos(t_1) + 4 \cos(t_1 + t_2) - 8 \cos(t_2) + \\
&\quad + 4 \cos(t_2 + t_3) - 4 \cos(t_3) - 2 \cos(t_1 + t_2 + t_3))^{0,5} \Big|_{t_1=t_2=t_3=180^\circ} = 6.
\end{aligned}$$

Разработан алгоритм двухкритериальной оптимизации параметрических программ управления с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальной направлении по критериям минимум моторного и общего времени, интегрированный в программную оболочку.

Выполнен расчёт параметрических программ управления с двумя и тремя включениями тяги для граничных условий 1Б и 1В по табл. 1 (рис. 6). Как следует из рис. 6, полученные программы с разным знаком тяги на активных участках близки к оптималь-

ным, а для программ с одинаковым знаком тяги разница критериев задачи может быть существенна.

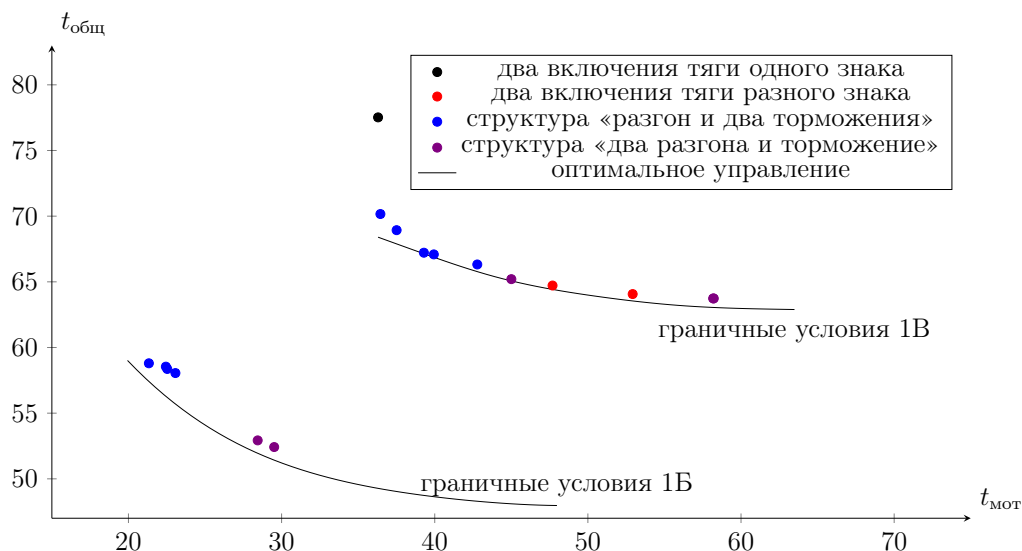


Рисунок 6 – Множества Парето для граничных условий 1Б и 1В по табл. 1

В **четвёртой** главе решена задача приведения КА в точку стояния геостационарной орбиты в двухкритериальной постановке. Получены серии не улучшаемых по Парето решений задачи.

Расчёт выполнен на безразмерной модели (3), а результаты представлены для маневрирующего КА, имеющего ускорение от тяги $5 \cdot 10^{-5}$ м/с², угловая скорость на опорной геостационарной орбите $\lambda = 7,29 \cdot 10^{-5}$ рад/с, параметр $K = 18,8$ км.

Задача приведения КА в точку стояния решена для двух вариантов граничных условий, показанных в табл. 2 или 3.

Таблица 2 – Начальные условия движения КА

Вариант начальных условий	Большая полуось, км	Эксцентриситет	Угол истинной аномалии, град	Аргумент широты, град
«малое отклонение»	42164,16	10^{-4}	0	4
«большое отклонение»	42464,16	$2 \cdot 10^{-3}$	0	20

Таблица 3 – Начальные условия относительного движения

Вариант начальных условий	Δr_{cp}	ΔL_{cp}	l_0	φ_0
«малое отклонение»	0 км (0)	2943 км (156,52)	4,21 км (0,22)	0
«большое отклонение»	300 км (15,99)	14807 км (787,41)	43,06 км (2,29)	0

Для граничных условий «малое отклонение» найдено 134 решения, из которых только 28 эффективны по Парето. Для граничных условий «большое отклонение» найдено 98 решений задачи, 14 из которых эффективны по Парето.

Выполнен расчёт траекторий относительного движения с оптимальным по Парето управлением на исходной нелинейной модели (1) с учётом влияния второй зональной гармоники гравитационного поля Земли. В табл. 4 показаны методические ошибки (параметры относительного движения в конечный момент времени), обусловленные линеаризацией уравнений движения, в табл. 5 показаны методические ошибки, обусловленные не учётом

возмущений.

Таблица 4 – Методические ошибки, обусловленные линеаризацией уравнений движения

Вариант начальных условий	Δr_{cp}	ΔL_{cp}	l
«малое отклонение»	1 .. 10 м	0,4 .. 4 км	0,2 .. 2 км
«большое отклонение»	2 .. 2,4 км	90 .. 100 км	2 .. 12 км

Таблица 5 – Методические ошибки, обусловленные не учётом возмущений

Вариант начальных условий	Δr_{cp}	ΔL_{cp}	l
«малое отклонение»	менее 0,1 м	0,2 .. 0,4 км	менее 1 м
«большое отклонение»	менее 1 м	0,4 .. 0,8 км	1 .. 10 м

Как следует из табл. 4, методическая ошибка, обусловленная линеаризацией уравнений движения при больших начальных удалениях КА от точки стояния может быть значительной. Для её устранения решена краевая задача уточнения размеров активных и пассивных участков на модели (1), что позволило свести методическую ошибку к нулю, а критерии задачи изменились несущественно – на величину менее 1 – 2% от полученных на линейной модели (3).

Как следует из табл. 5, для выбранных граничных условий, влияние второй зональной гармоник гравитационного поля Земли незначительно.

На рис. 7 показан пример зависимости параметров движения маневрирующего КА от времени – разности фокальных параметров орбит Δp и радиус-вектор Δr КА1 и КА2, эксцентриситет e орбиты КА2 и его отклонение от точки стояния λ .

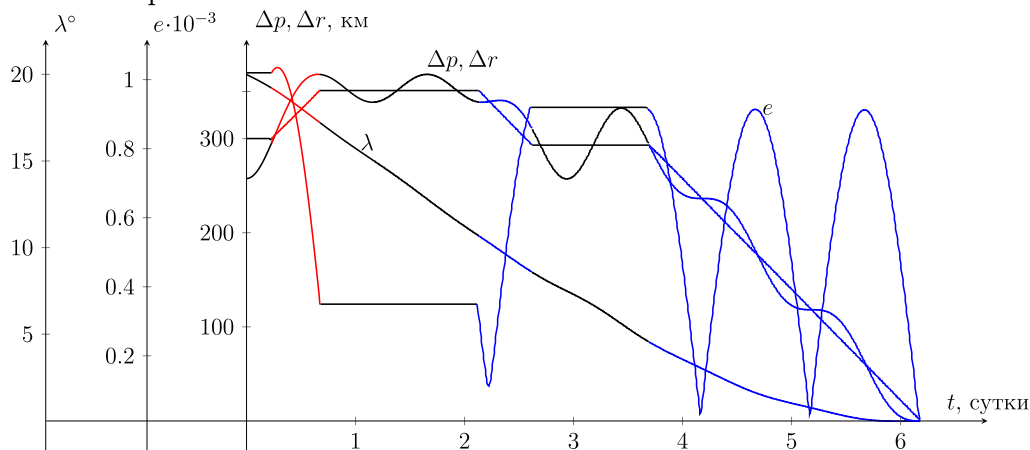


Рисунок 7 – Зависимость орбитальных параметров КА от времени программа с тремя включениями тяги

В **заключении** сформулированы основные выводы по диссертации.

1. Построена модель относительного движения, инвариантная к проектным характеристикам маневрирующего КА и параметрам опорной орбиты, которая позволяет получить универсальные решения задачи построения номинального управления, зависящее только от безразмерных граничных условий перелёта.
2. Исследованы оптимальные программы номинального управления относительным движением. Рассмотрен как случай свободной ориентации тяги, так и трансверсальной. Получены оптимальные программы управления относительным движением по критерию минимума затрат моторного времени при фиксированных граничных условиях и изменяемом в некотором пределе общем времени перелёта. Сравнение результатов расчёта программ управления при трансверсальной и свободной ориентации вектора тяги показал, что введение ограничений на направление тяги ухудшает критерии задачи на величину порядка 1 – 10%.
3. Исследованы параметрические программы управления относительным движением с двумя и тремя включениями тяги в трансверсальном направлении. Параметрами программ управления являются размеры участков постоянства тяги (активных и пассив-

ных), для размеров активных участков получены аналитические соотношения. Получены области граничных условий для периодического движения, допускающие применение параметрических программ управления – максимальное его изменение составляет 4 и 6 для программ с двумя и тремя включениями тяги соответственно. Разработаны алгоритмы двухкритериальной оптимизации параметрических программ управления в критериях минимум моторного и общего времени.

4. Решена задача приведения КА в точку стояния геостационарной орбиты в двухкритериальной постановке. Показана эффективность двухкритериального подхода к оптимизации траекторий относительного движения, которая заключается в построении исчерпывающего множества решений задачи при фиксированных граничных условиях.

Основное **содержание работы опубликовано** в изданиях, входящих в **Перечень рецензируемых научных изданий**, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук:

1. Ишков С. А., **Филиппов Г. А.**, Храмов А. А. Номинальная программа управления сближением космического аппарата – сборщика мусора с электроракетным двигателем малой тяги на геостационарной орбите // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18. № 4(46). С. 1215-1222.
2. Ишков С.А., **Филиппов Г.А.**, Фадеенков П.В. Оптимальные программы управления по быстрдействию в задаче сближения с малой трансверсальной тягой // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2018. Т. 17. № 4. С. 67-80.
3. **Филиппов Г.А.** Итерационная процедура выбора программы управления сближением с малой тягой в задаче утилизации космического мусора на геостационарной орбите // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2017. Т. 16, № 3. С. 125-137.

в изданиях, индексируемых в базах Scopus/WebOfScience

1. Ishkov S. A., **Filippov G. A.**, Fadeenkov P. V. Nominal control program in problem of far rendezvous at geostationary orbit with low transversal thrust // AIP Conference Proceedings. 2018. № 2046.
2. Ishkov S. A., **Filippov G. A.**, Khramov A. A. Autonomous Control Program for Special Spacecraft Debris Collector Rendezvous Transfer with Fragment of Space Debris with Low-thrust // Procedia Engineering. 2017. Vol. 185. С. 388-395.
3. Ishkov S. A., **Filippov G. A.**, Kremenetskaja M. E., Frolov I. V. Ballistic analyze of spacecraft inspector motion, equipped with electric thruster, above International Space Station // AIP Conference Proceedings. 2018. № 2046.
4. Ishkov S. A., Khramov A. A., **Filippov G. A.** Formation algorithms of sequential control for spacecraft rendezvous with low-thrust // AIP Conference Proceedings. 2018. № 2046.