

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»

На правах рукописи

**Юй Вэйцзе**

**Формирование периодических орбит космического аппарата с солнечным парусом в окрестности точки либрации L2 системы Земля-Луна**

2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением  
летательных аппаратов

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
д.т.н., доцент  
Старинова Ольга Леонардовна

Самара - 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 ОСНОВЫ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ L2 СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ-ЛУНА.....	10
1.1 Анализ применения солнечного паруса.....	10
1.1.1 Развитие технологии солнечного паруса.....	10
1.1.2 Современные исследования применения солнечного паруса .....	16
1.2 Анализ применения космического аппарата в окрестности точки L2 .....	18
1.2.1 Развитие применение космического аппарата в окрестности точек либрации .....	18
1.2.2 Методы исследования движения космического аппарата в окрестности точек либрации .....	20
1.3 Математические модели движения космического аппарата с солнечным парусом в системе Земля-Луна.....	21
1.3.1 Уравнение светового давления .....	21
1.3.2 Уравнение движения в системе Земля-Луна.....	24
1.3.3 Точки либрации и естественные периодические орбиты .....	27
1.4 Выводы по первой главе.....	31
2 ФОРМИРОВАНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ.....	33
2.1 Резонансные орбиты второго порядка.....	33
2.1.1 Разработка методики формирования резонансных орбит .....	33
2.1.2 Изменение резонансных орбит от параметров ускорения светового давления.....	37
2.2 Цилиндрические орбиты .....	41
2.2.1 Разработка методики формирования цилиндрических орбит .....	42
2.2.2 Анализ изменения цилиндрических орбит под влиянием параметров ускорения от светового давления .....	45
2.3 Выводы по второй главе.....	48
3 ПОДДЕРЖАНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ.....	50
3.1 Разработка методики поддержания искусственных орбит .....	50
3.2 Моделирование поддержания искусственных орбит .....	56
3.3 Выводы по третьей главе.....	58
4 ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ВЫВЕДЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ НА ИСКУССТВЕННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ.....	59
4.1 Разработка алгоритма оптимизации управления.....	59
4.1.1 Оптимизация управления с критерием максимизации точности выведения на орбиты.....	60
4.1.2 Оптимизация управления с критерием минимизации времени перелёта .....	63
4.1.3 Методика решения задачи выведения космического аппарата с солнечным парусом на орбиты .....	64

4.2	Задача выведения космического аппарата с солнечным парусом на резонансные орбиты .....	70
4.2.1	Влияние энергии опорной орбиты на минимальную длительность выведения .....	71
4.2.2	Влияние разницы фазового положения на минимальную длительность выведения .....	79
4.2.3	Влияние начального фазового положения КА на минимальную длительность выведения .....	82
4.3	Задача выведения космического аппарата с солнечным парусом на цилиндрические орбиты .....	86
4.3.1	Влияние энергии опорной орбиты на минимальную длительность выведения .....	87
4.3.2	Влияние разницы фазового положения на минимальную длительность выведения .....	90
4.3.3	Влияние начального фазового положения КА на минимальную длительность выведения .....	94
4.4	Выводы по третьей главе .....	96
5	ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	98
	СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ .....	100
	Список литературы .....	101
	Приложение .....	110

## **ВВЕДЕНИЕ**

В диссертации проводится исследование вопросов формирования, поддержания и осуществления выведения на искусственные периодические орбиты космических аппаратов (КА) с солнечным парусом (СП) лежащие в окрестности точки либрации L2 системы Земля-Луна.

### **Актуальность темы исследования.**

В ближайшем будущем исследование и освоение Луны, особенно её обратной стороны и полярных областей, станет приоритетом космических программ. Для успешного выполнения программ необходимы системы связи и навигации. Естественные орбиты вокруг точки L2 системы Земля-Луна, такие как орбиты Лиссажу, Ляпунова и гало-орбиты, часто выбираются для функционирования таких систем. Однако искусственные периодические орбиты, включая резонансные и цилиндрические орбиты вокруг точки L2, полнее удовлетворяют специфические потребности различных миссий, хотя и требуют постоянного расхода топлива для их поддержания. Использование КА с СП позволяет избежать расхода топлива и продлить срок их функционирования. Путём выбора параметров СП, можно создавать искусственные орбиты с различными геометрическими параметрами, а также осуществлять выведение и поддержание КА на эти орбиты.

Большинство исследований посвящены созданию искусственных орбит КА с СП в системе Солнце-Земля. Это связано с тем, что в системе Земля-Луна относительное положение Солнца постоянно изменяется и не синхронизируется с движением КА на орбите, что усложняет управление траекторией КА с СП, поскольку управляющее ускорение зависит от положения Солнца. Исследователи сталкиваются с такими проблемами, как низкая вычислительная эффективность методик формирования орбит, недостаточная исследованность зависимости характеристик искусственных орбит от проектных параметров СП, низкая робастность и адаптируемость известных алгоритмов поддержания орбит КА с СП. Кроме того, отсутствуют эффективные методики формирования программного управления для выведения КА с СП на искусственные орбиты. Таким образом, можно утверждать, что недостаточно развитая методическая база сдерживает

создание таких систем. Поэтому разработка методик и вычислительных процедур для формирования и поддержания искусственных орбит для КА с СП, а также перелётов на них является актуальной научной задачей.

### **Степень разработанности.**

В окрестностях точек либрации было развёрнуто множество успешно функционирующих КА. Большинство из них находятся в окрестностях точек либрации системы Солнце-Земля. Примеры таких КА включают исследователь комет ISEE-3 (НАСА), солнечная и гелиосферная обсерватория SOHO (НАСА и ЕКА) и космический телескоп James Webb (НАСА, ЕКА и ККА). Китайский спутник-ретранслятор Queqiao 1 является первым и единственным на данный момент КА, который успешно выполняет длительные задачи в окрестности точки L2 системы Земля-Луна. Методика формирования управления для операций КА с традиционными двигателями в окрестностях точек либрации относительно хорошо изучена.

Однако количество успешно завершённых проектов с СП, выполнивших задачи запуска, развёртывания и контролируемого полёта, ограничено. Японский проект IKAROS является первым КА с СП, успешно выполнившим все эти задачи. В последние годы были представлены новые научные достижения в области применения СП для управления полётом КА. В работах J. Simo, H. Baoyin, C.R. McInnes, E. Н. Поляховой, S. Gong, J. Bookless, E. Tresaco, О.Л. Стариновой и J. Heiligers исследованы методы формирования орбит КА с СП [1–10]. Среди них S. Gong, J. Simo, C. R. McInnes и J. Heiligers изучали орбиты в системе Земля-Луна. В работах J. Bookless, A. Farrés, C. Gao, E. Morrow, Z. Lou, J. D. Biggs, C.R. McInnes, C. Circi, S. Firuzi, О.Л. Стариновой и S. Gong исследованы методы поддержания орбит КА с помощью СП с помощью таких алгоритмов управления, как управление с линейно-квадратичным регулятором, адаптивное управление в скользящем режиме и управление с прогнозирующими моделями [14–24]. В работах B. Wie, J. Mu, S. Gong, M. Macdonald, C.R. McInnes и О.Л. Стариновой исследованы методы управления полётом КА с помощью СП, используя принцип максимума Понтрягина, метод продолжения, метод коллокации и метод динамического

программирования [25–30]. Анализ этих исследований показал необходимость разработки более универсальных, адаптивных и эффективных методик и вычислительных процедур формирования, поддержания и управления полётом КА с СП.

**Целью исследования** является разработка методик и вычислительных процедур для формирования, поддержания и осуществления выведения на искусственные периодические орбиты, которые могут быть созданы за счёт светового давления в окрестности точки либрации L2 системы Земля-Луна.

**Объектом исследования** является управляемое движение КА с СП по искусственным периодическим орбитам в окрестности точки либрации L2 системы Земля-Луна.

**Предметом исследования** являются методики и вычислительные процедуры формирования, поддержания и осуществления выведения на искусственные периодические орбиты в окрестности точки либрации L2 системы Земля-Луна КА с СП.

Для достижения поставленной цели требуется решение следующих задач:

1. Разработка математических моделей движения КА в системе Земля-Луна и анализ особенностей его движения в рамках круговой ограниченной задачи трёх тел, характеристик естественных периодических орбит и свойств интеграла Якоби.

2. Разработка методик и вычислительных процедур для формирования искусственных периодических орбит КА с СП в окрестности точки L2 системы Земля-Луна, включая резонансные орбиты, сформированные на базе естественных орбит Ляпунова и гало-орбит, и цилиндрические орбиты, полученные на базе аналитических решений линеаризованных уравнений движения.

3. Анализ зависимости характеристик сформированных искусственных периодических орбит от углов установки паруса, начального относительного положения Солнца и проектных параметров СП.

4. Разработка методики и вычислительной процедуры для поддержания орбит КА с СП, оснащённых устройством регулировки отражательной способности.

5. Разработка методик и вычислительных процедур выведения КА с СП с естественных периодических орбит на искусственные периодические орбиты.

**Методы решения.** Для решения поставленных задач применяются методы небесной механики, методы современной теории управления, методы оптимального управления, методы вычислительной и высшей математики.

**Область исследования** соответствует п. 1 «Разработка и совершенствование математических моделей, используемых для описания движения и управления летательным аппаратом на различных режимах полёта», п. 5 «Создание методов анализа и проектирования траекторий одиночных летательных аппаратов, а также группы ЛА» и п. 17 «Совершенствование методов анализа и оптимизации орбитальных структур спутниковых систем, их обслуживания и эксплуатации» паспорта специальности 2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов.

#### **Научная новизна полученных результатов.**

1. Разработаны методики и вычислительные процедуры формирования искусственных периодических орбит на основе линеаризации динамических уравнений КА с СП в окрестности точки L2 системы Земля-Луна и использования метода множественной стрельбы.

2. Разработаны методика и вычислительная процедура определения управления для поддержания орбит КА с СП на основе адаптивного управления в скользящем режиме с учётом особенностей движения системы Солнце-Земля-Луна.

3. Разработаны методики и вычислительные процедуры оптимизации программы управления выведением КА с СП на искусственные периодические орбиты с использованием естественных периодических орбит в качестве начального приближения.

#### **Теоретическая значимость.**

1. Разработаны методики формирования искусственных периодических орбит КА с СП.

2. Разработана методика поддержания орбит КА с СП с учётом особенностей движения системы Солнце-Земля-Луна.

3. Разработаны методики оптимизации программы управления выведением КА с СП на искусственные периодические орбиты с лучшей сходимостью и устойчивостью в решении задач оптимизации.

#### **Практическая значимость.**

1. Получены зависимости характеристик сформированных искусственных периодических орбит от углов установки паруса, начального относительного положения Солнца и проектных параметров КА с СП.

2. Получены зависимости минимальной длительности перелёта от начальных условий на опорных орбитах, положения целевой точки и начального положения КА.

#### **Положения, выносимые на защиту.**

1. Методики и вычислительные процедуры формирования искусственных периодических орбит КА с СП в окрестности точки либрации L2 системы Земля-Луна, включая резонансные и цилиндрические орбиты.

2. Зависимости характеристик искусственных периодических орбит от углов установки паруса, начального относительного положения Солнца и проектных параметров КА с СП.

3. Методика и вычислительная процедура определения управления для поддержания орбит КА с СП, оснащённых устройством регулировки отражательной способности с учётом особенностей движения системы Солнце-Земля-Луна.

4. Методики и вычислительные процедуры оптимизации программы управления выведением КА с естественных периодических орбит на искусственные периодические орбиты с помощью СП.

5. Результаты анализа зависимости минимальной длительности перелёта от начальных условий на опорных орбитах, положения целевой точки и начального положения КА.

**Апробация результатов.** Основные научные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на 20-й международной конференции «Авиация и космонавтика» (г. Москва, 2021 г), XIII всероссийском съезде по теоретической и

прикладной механике (г. Санкт-Петербург, 2023 г), XLVIII академических чтениях по космонавтике «Королевские чтения» (г. Москва, 2024 г).

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается корректным применением методов небесной механики, математики, классических вычислительных методов, апробированных методов теории оптимального управления и согласованностью полученных результатов с известными результатами по исследованию движения в рамках задачи трёх тел.

**Личный вклад автора.** Все научные результаты и результаты, вынесенные на защиту, получены автором самостоятельно. Автором самостоятельно проведены теоретические исследования и вычислительные эксперименты, подтверждающие основные положения, выводы и рекомендации. Все публикации по работе подготовлены автором самостоятельно или при его определяющем участии.

**Основные публикации.** По теме диссертационной работы опубликовано четыре работы, в том числе две статьи опубликованы в изданиях, входящих в список, рекомендованный ВАК России.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы (84 наименований). Объём работы составляет 110 страниц, содержит 48 рисунков и 10 таблиц.

# 1 ОСНОВЫ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ L2 СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ-ЛУНА

В данной главе рассматриваются основные аспекты движения КА с СП в окрестности точки либрации L2 системы Земля-Луна. Глава состоит из трёх разделов.

В первом разделе проанализированы существующие исследования применения СП для космических полётов. В первом подразделе представлен обзор развития технологий СП, включая ключевые проекты и основные структуры современных СП. Во втором подразделе представлен обзор современных исследований применения СП, включая основные проблемы и методы их решения.

Во втором разделе проанализированы существующие исследования движения КА вблизи точки либрации L2. В первом подразделе представлены обзор развития применения КА вблизи точки L2, включая типичные задачи и ключевые проекты. Во втором подразделе представлен обзор методик исследования движения КА вблизи точки L2.

В третьем разделе исследованы математические модели движения КА с СП в системе Земля-Луна. В первом подразделе создано уравнение воздействия светового давления на СП. Во втором подразделе создано уравнение движения КА в рамках круговой ограниченной модели трех тел. В третьем подразделе проанализированы характеристик точек либрации и представлены методики формирования естественных периодических орбит вблизи точек либрации.

## 1.1 Анализ применения солнечного паруса

СП является инновационной технологией, использующей отражение и поглощение солнечных фотонов для генерации тяги.

### 1.1.1 Развитие технологии солнечного паруса

В 1873 году J. К. Maxwell показал, что свет обладает импульсом и может оказывать давление на объекты [31]. В 1924 году К. Э. Циолковский и Ф. Цандер первыми предложили использовать световое давление для космических полётов [32]. В 1976 году К. Sagan описал основные структуры СП и предложил его

использование для встречи с кометой Галлея [33]. С увеличением интереса к СП, научные исследования и проекты значительно расширились. Среди них выделяются (рисунок 1):

1. IKAROS – первый КА, продемонстрировавший межпланетное путешествие с помощью солнечного света [34]. Запущенный Японским агентством аэрокосмических исследований в мае 2010 года, он разработал технологии контроля отражательной способности для управления тягой и ориентацией.
2. LightSail – проект Американского планетарного общества, оценивающий эффективность СП в управлении траекторией КА вблизи Земли [35–36]. LightSail 1, запущенный в мае 2015 года, не смог развернуться, но LightSail 2, запущенный в июне 2019 года, успешно достиг орбиты и использовал световое давление для управления полётом более трех лет.
3. NEA Scout – наноспутник НАСА, запущенный в сентябре 2022 года для исследования астероидов с помощью СП в солнечной системе [37]. Основной целью было продемонстрировать применение СП в дальних космических миссиях. Однако из-за технических проблем, возникших после запуска, команда проекта не смогла установиться.



а)

б)

в)

Рисунок 1 – Некоторые проекты СП: а) IKAROS; б) развёртывание LightSail 2 на околоземной орбите; в) развёртывание NEA Scout в лаборатории NeXolve

В настоящее время большинство проектов СП направлены на исследование и тестирование технологий. Однако успешных проектов, выполняющих задач запуска, развёртывания и управления полётом, немного из-за низкой тягой СП. Максимальная тяга СП площадью  $100 \text{ м}^2$  составляет менее  $0,9 \text{ мН}$ . Поэтому СП обычно имеют большие, но тонкие паруса, чтобы увеличить силу тяги и уменьшить

массу структуры. Это требует высоких характеристик материалов, ухудшает устойчивость и усложняет управление. Главным преимуществом СП является отсутствие необходимости в топливе, что позволяет теоретически достичь бесконечного удельного импульса. Это делает СП идеальным для межпланетных полётов в солнечной системе, межзвёздных экспедиций и длительных орбитальных миссий.

С развитием космических технологий и материаловедения за последние десятилетия, основные компоненты СП стали более уточнёнными. Они включают:

1. Мембрана – ключевая часть СП, генерирующая световое давление. Обычно мембраны СП изготавливаются из сверхтонких светоотражающих материалов, таких как алюминизированная полиимидная плёнка [38], и обладают высокой прочностью и устойчивостью к космическим условиям. Толщина мембраны обычно не превышает 8 мкм. Типичные конфигурации расположения мембран включают квадратную, дисковую и гироскопическую (рисунок 2). Среди них квадратная конфигурация наиболее распространена из-за простоты конструкции и удобства развёртывания.

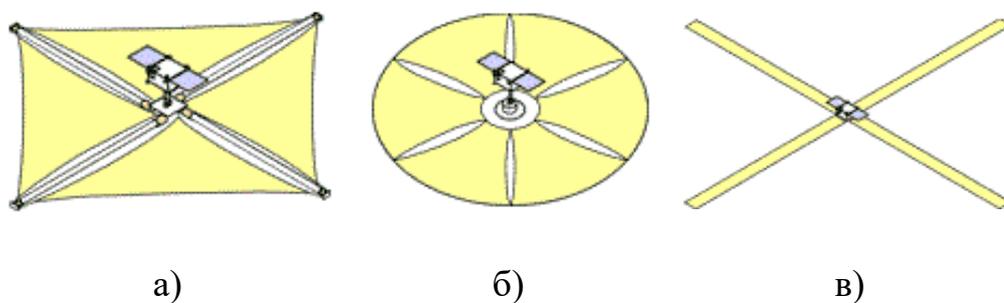


Рисунок 2 – Три типичных конфигурации расположения мембран на СП:

а) квадратная; б) дисковая; в) гироскопическая

2. Механизм развёртывания – система для разворачивания и натяжения мембраны. Существуют два основных механизма [39–40]: механизм с использованием центробежной силы, и механизм с использованием лонжеронов (рисунок 3).

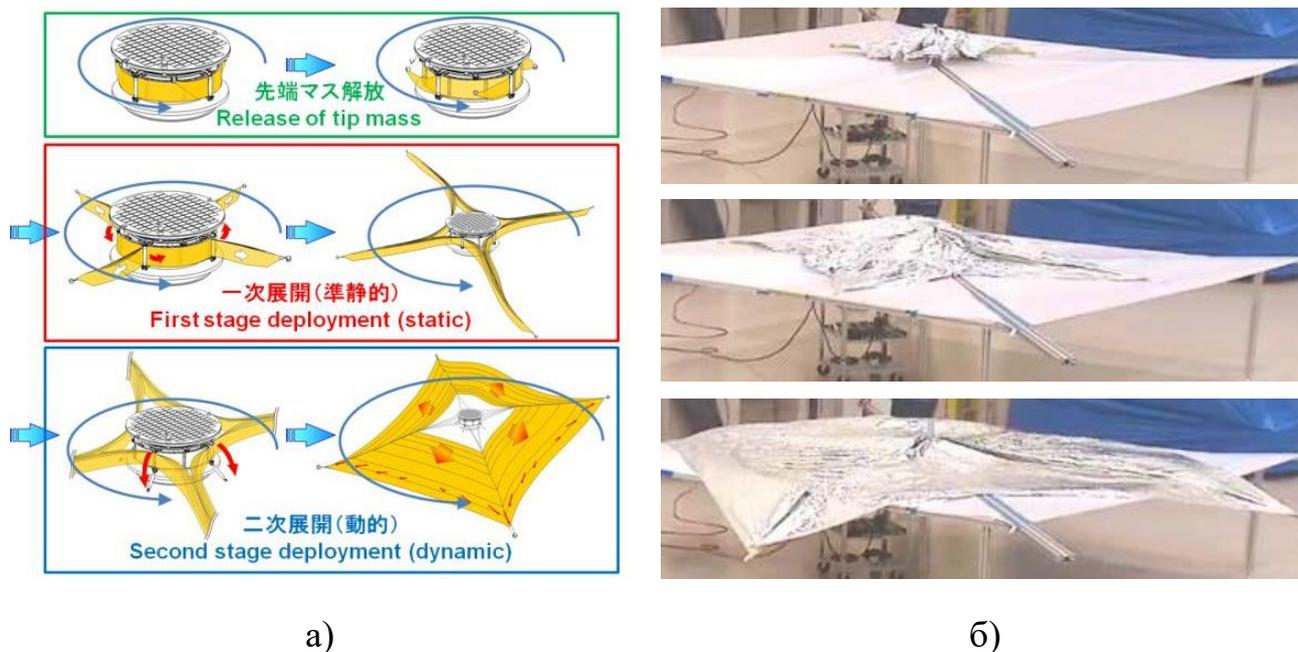
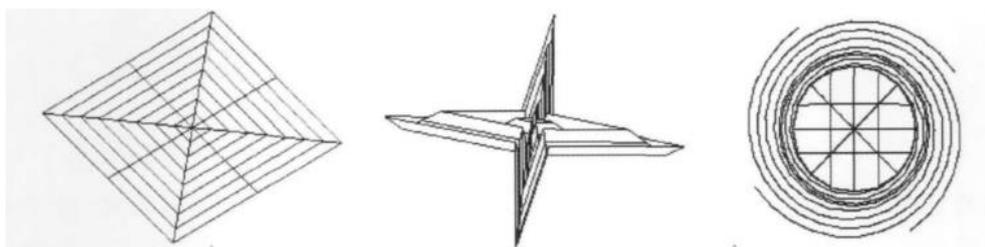


Рисунок 3 – Два основных механизма развёртывания паруса: а) механизма с использованием центробежной силы (IKAROS); б) механизм с использованием лонжеронов (NanoSail-D)

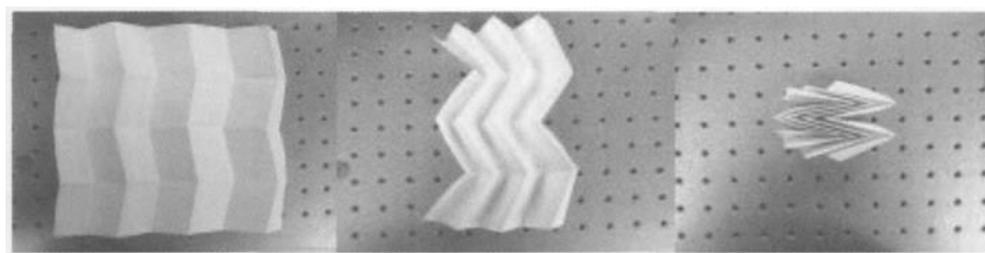
- 1) Механизм с использованием центробежной силы включает массивные концевые блоки и гибкие тросы, уложенные в контейнере перед запуском. При развёртывании контейнер раскручивается и выбрасывает концевые блоки, которые вытягивают тросы. Затем мембрана разворачивается под действием центробежной силы. Этот метод легче, но сложнее в управлении, и может повредить мембрану из-за деформации при движении СП. Динамическое моделирование такого развёртывания представляет сложную задачу.
- 2) Механизм с использованием лонжеронов использует их жёсткость для развёртывания и натяжения мембраны. Существуют два основных типа лонжеронов:
  - і) Скручиваемые лонжероны из деформируемых материалов, например, углеродного волокна, сворачиваются перед запуском и медленно выдвигаются из контейнера при развёртывании. После полного развёртывания их электродвигатель активирует для натяжения мембраны.

ii) Надувные лонжероны, обычно изготовленные из углеродного волокна, надуваются и расширяются при развёртывании, что позволяет развернуть мембрану. После завершения развёртывания они затвердевают, обеспечивая натяжение мембраны даже при утечке воздуха. Надувные лонжероны легче и являются активной областью исследований.

3. Механизм складывания – установка для хранения и закрепления СП при запуске КА. Конструкция механизма складывания должна быть совместима с механизмом развёртывания. На рисунке 4 показаны различные варианты механизмы складывания. Например, механизм в проекте IKAROS подходит для развёртывания с использованием центробежной силы [41], и механизм Миура-ори — для развёртывания с лонжеронами [42].



а)



б)

Рисунок 4 – Два механизма складывания: а) применённый в IKAROS; б) Miura-ori

4. Механизм управления – система для регулирования величины и направления тяги на СП. Существуют три основных типа (рисунок 5):

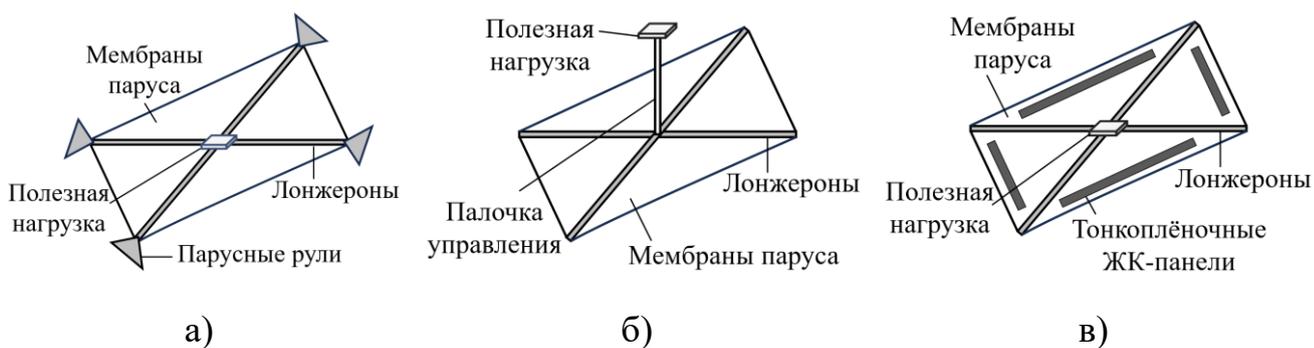


Рисунок 5 – Три механизма управления СП: а) с парусными рулями; б) с устройством регулировки положения полезной нагрузки; в) с устройством регулировки отражательной способности

- 1) Механизм с парусными рулями (рисунок 5 а). Малые паруса на концах основного паруса могут вращаться с помощью электродвигателей. Световое давление на рули создаёт управляющий момент для трёхосной ориентации КА.
- 2) Механизм с устройством регулировки положения полезной нагрузки (рисунок 5 б) [43]. Полезная нагрузка на штанге центральной основы паруса вращается через карданный шарнир с помощью электродвигателя. Смещение центра масс относительно центра светового давления создаёт управляющий момент.
- 3) Механизм с устройством регулировки отражательной способности (рисунок 5 в). На поверхности СП размещены тонкоплёночные ЖК-панели, которые изменяют отражательную способность путём переключения между состояниями поглощения и отражения света. Это изменение распределения светового давления создаёт управляющий момент. Такой механизм не требует перемещения частей, что уменьшает сложность и массу КА, делая его подходящим для малых СП.

После длительных исследований и разработок основные конструкции и компоненты СП достигли зрелого уровня. СП среднего размера (с площадью нескольких сотен квадратных метров), используемые в данной работе, не представляют значительной технической сложности. Характерные параметры типичных СП показаны на таблице 1.1.

Таблица 1.1. Характерные параметры типичных КА с СП

Проекты СП	Ikaros	LightSail-2	Solar Cruiser	Sunjammer	СП в диссертации
Масса КА, кг	310	5	90	32	200 (Рез.); 200 (Цил.)
Площадь СП, м <sup>2</sup>	196	32	1672	1200	477 (Рез.); 3582 (Цил.)
Величина ускорения, мм/с <sup>2</sup>	0,005	0,058	0,169	0,340	0,022 (Рез.); 0,163 (Цил.)

### 1.1.2 Современные исследования применения солнечного паруса

Потенциальные области применения СП охватывают всю солнечную систему, начиная от Солнца и достигая кометных облаков за пределами орбиты Нептуна. СП могут осуществлять дальние экспедиции для доставки грузов или оставаться на станции в пункте назначения. Основное применение СП состоит в межпланетных перелётах [44]–[52], но также существуют новые способы использования, которые рассматриваются в данной работе:

1. Формирование искусственной орбиты. В отличие от естественных орбит обычных КА, которые движутся пассивно, орбиты КА с СП формируются под воздействием светового давления и требуют постоянного управления. Эти орбиты могут быть более эффективными для определённых задач. Bookless J. и McInnes C. изучили создание искусственных точек либрации в системе Солнце-Земля, смещая естественные точки либрации световым давлением на СП []. Изменение параметров и методов управления СП позволяют создать различные искусственные точки либрации, что помогает формировать орбиты по конкретным требованиям. Однако в системе Земля-Луна это усложнено из-за постоянного изменения относительного положения Солнца. McInnes C. и другие исследовали резонансные периодические орбиты СП в окрестности точек либрации системы Земля-Луна, используя естественные орбиты Ляпунова и гало-орбиты в качестве начального приближения. Gong S. и Li J. исследовали гелиоцентрические эллиптические цилиндрические орбиты СП, где СП удерживается под постоянным углом установки к направлению

солнечного света, что позволяет поднимать орбиты на высоты выше радиуса планеты (например, Земли, Меркурия и Марса). Это обеспечивает постоянное наблюдение за полярными областями планет. В диссертации разработана новая методика формирования резонансных орбит СП на основе множественной стрельбы и усовершенствована методика формирования цилиндрической орбиты СП на основе линеаризации уравнения движения в окрестности точки либрации.

2. Поддержание орбиты. СП идеально подходит для коррекции траектории и поддержания орбиты. КА MESSENGER использовал солнечные панели для точной корректировки траектории на пути к Меркурию, изменяя их угол к Солнцу для регулирования силы воздействия солнечного излучения [51]. J. Bookless [52] разработал метод поддержания орбиты с использованием линейно-квадратичного регулятора (LQR) в задаче трех тел модели Хилла. Однако его эффективность ограничена нелинейностью модели. J.D. Woźniak и другие предложили адаптивное управление на основе управления в скользящем режиме для поддержания орбиты Ляпунова КА с малой тягой [53]. Этот метод доказал свою надёжность, адаптивность и стабильность, несмотря на проблемы с высокочастотными колебаниями и чувствительностью. В диссертации используется метод управления в скользящем режиме для поддержания траектории КА с СП на искусственных периодических орбитах с учётом высокой нелинейности модели.
3. Управление перелётом. Управление перелётом сводится к решению задачи оптимизации управления. M. Walmsley и другие применили метод множественной стрельбы для решения задачи управления перелётом КА с СП на орбиты, оставшиеся неподвижными относительно оси вращения Земли [54]. Этот метод обеспечивает быстрые расчёты и оптимизацию с небольшим числом переменных, но требует значительных вычислительных ресурсов и чувствителен к возмущениям в расчётах. M.T. Ozimek и другие рассмотрели метод коллокации для решения задачи управления перелётом КА с СП в системе Земля-Луна [55]. Этот метод естественным образом учитывает

ограничения траектории и граничные условия, а также менее чувствителен к начальным приближениям. В диссертации разработана методика управления перелётом КА с СП на искусственные периодические орбиты с использованием метода коллокации. Основные цели оптимизации включают минимальное время перелёта и максимальную точность выведения на орбиту.

## 1.2 Анализ применения космического аппарата в окрестности точки L2

Точки либрации – это точки в системе из двух массивных тел, в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, не испытывающее воздействия никаких других сил, кроме гравитационных со стороны двух первых тел, может оставаться неподвижным относительно этих тел. В системе Земля-Луна точка либрации L2 находится за Луной на линии Земля-Луна. Уникальное местоположение этой точки привлекли внимание многих исследователей.

### 1.2.1 Применение космических аппаратов в окрестности точек либрации

Освоение Луны станет одной из главных задач космических исследований. Особое внимание привлекают обратная сторона и полярные области Луны. Благодаря постоянному затенению, обратная сторона Луны предлагает среду без электромагнитных помех от Земли, полезную для исследований дальнего космоса [56]. Из-за концентрированного распределения воды в лунных грунтах и льдах полярные области могут быть использованы для создания постоянных баз [57]. США, Россия, Европейский Союз, Япония, Китай, Индия и Южная Корея успешно запустили КА для исследования Луны. Некоторые КА даже совершали посадки на обратной стороне или в полярных регионах Луны, включая американские Lunar Prospector, Lunar Reconnaissance Orbiter, LCROSS, японский Kaguya, китайские Chang'e, индийские Chandrayaan [58–62]. В будущем США планируют проект "Артемида" для отправки астронавтов на южный полюс Луны и создания постоянного база [63]. Китай и Россия объявили о совместном проекте международной лунной исследовательской станции, открытой для всех международных научно-исследовательских проектов [64–65]. Для этих проектов потребуется множество КА для ретрансляционной связи, разведки и навигации.

Орбиты вблизи точки L2 представляются наиболее подходящими для размещения таких КА.

Из-за приливной блокировки Луна всегда обращена к Земле одной стороной. Это создаёт трудности для наблюдения и связи с обратной стороной Луны. Однако, используя КА на орбитах вокруг точки L2, можно решить эту проблему. Такие КА обеспечивают ретрансляцию связи, разведку и навигацию, а также могут использоваться для проектирования переходных траекторий к Луне и дальнему космосу. Уникальные стабильные характеристики этих орбит обеспечивают возможность проведения манёвров с минимальным энергопотреблением, что важно для межпланетной транспортной сети.

Существуют или планируются ряд проектов, ориентированных на использование орбит в окрестности точек либрации:

1. SOHO – КА для наблюдения за Солнцем, разработанный и запущенный НАСА и ЕКА в декабре 1995 года, находится на орбите Лиссажу вокруг точки L1 системы Солнце-Земля [66]. Помимо научного вклада, SOHO является первым КА с трёхосной стабилизацией, использующий реактивные колеса в качестве виртуального гироскопа.
2. James Webb – космический телескоп, разработанный и запущенный НАСА, ЕКА и ККА в декабре 2021 года, находится на гало-орбите вокруг точки L2 системы Солнце-Земля [67]. Эта орбита обеспечивает защиту от воздействия света, тепла и электромагнитных интерференций от Солнца и Земли.
3. Queqiao 1 – спутник-ретранслятор для лунных станций на обратной стороне Луны, разработанный и запущенный китайским национальным космическим агентством в июне 2018 года, является первым КА, успешно работающим на гало-орбите вокруг точки L2 системы Земля-Луна [68].

Технология применения традиционных КА в окрестности точек либрации хорошо изучена. В этих областях существует ряд периодических орбит с уникальными характеристиками, идеально подходящих для ретрансляции связи и исследований космоса. Однако ёмкость таких орбит ограничена. Возможное

решение этой проблемы – увеличение количества орбит вблизи точек либрации с помощью СП, что будет обсуждено далее.

### 1.2.2 Методы исследования движения космического аппарата в окрестности точек либрации

Исследование проблемы гравитационного взаимодействия двух тел началось в 1687 году с работ И. Ньютона по движению Земли, Луны и Солнца, с попыток найти устойчивые долгосрочные решения [69]. В 1767 году Л. Эйлер опубликовал три семейства периодических решений, известных как решения проблемы трёх тел Эйлера [70]. В 1772 году Ж. Лагранж ввёл упрощённую формулировку проблемы трёх тел, известную как модель ограниченной задачи трёх тел. В 1836 году К. Якоби обнаружил единственный инвариантный интеграл в модели ограниченной задачи трёх тел, который получил название интеграл Якоби. В конце 20-го века с развитием компьютерных технологий и численного моделирования учёные проводили глубокие исследования ограниченной задачи трёх тел, которые стали основой для изучения многотелесных проблем, таких как взаимодействие экзопланет, спутников и комет [71–72].

В круговой ограниченной задаче трёх тел есть пять точек либрации. М. Hénon [73] впервые опубликовал серию статей о стабильности и бифуркации плоских периодических решений в окрестности точек либрации. Его работа установила связи между различными семействами периодических орбит. Richardson D.L. использовал ряд Лежандра для разложения динамических уравнений в окрестности коллинеарных точек либрации для поиска аналитических решений орбит Лисажу, гало и Ляпунова [74]. Но этот метод демонстрировал ограничения в точности вдали от точек либрации. Для решения этой проблемы К. Howell [75] разработал метод стрельбы для получения точных численных решений симметричных гало-орбит. Позднее этот метод был распространён на поиск других симметричных орбит С. Zagouras и Р. Kazantzis [76]. V. Markellos и А. Halioulias [77] расширили метод стрельбы для асимметричных орбит и использовали метод Hénon для изучения

стабильности этих орбит. Поскольку орбиты вблизи точек либрации обычно нестабильны, требуется активное управление для их поддержания.

### 1.3 Математические модели движения космического аппарата с солнечным парусом в системе Земля-Луна

Математические модели движения КА с СП в системе Земля-Луна включают уравнение воздействия светового давления на СП и уравнение движения КА в рамках круговой ограниченной задачи трёх тел.

#### 1.3.1 Воздействие светового давления

Фотоны света, встречая объекты на своём пути, вызывают физическое давление, что является явлением, которое можно вывести с помощью уравнений Максвелла, однако легче объяснить это с использованием корпускулярной природы света: фотоны сталкиваются с объектами и передают свой импульс. Режимы взаимодействия объекта с светом, такие как отражение, поглощение и диффузное рассеяние, зависят от оптического свойства, формы и текстуры поверхности этого объекта. Модель СП, представленная в диссертации, не учитывает морщины, тепловую деформацию и структурную вибрацию на поверхности паруса. Поэтому поверхность СП можно рассматривать как плоскую. В данном случае можно рассмотреть только режимы взаимодействия СП со светом, включая поглощение и отражение. При анализе общего воздействия светового давления на СП, режим диффузного отражения может быть рассмотрен как частичное поглощение и отражение света. Взаимодействие СП и падающего света показано на рисунке 6. Среди них  $\mathbf{F}^{\text{отр}}$  и  $\mathbf{F}^{\text{пог}}$  – силы, создаваемые отражённым и поглощённым светом соответственно;  $\mathbf{F}_c$  – результирующая сила  $\mathbf{F}^{\text{отр}}$  и  $\mathbf{F}^{\text{пог}}$ , то есть сила светового давления;  $\mathbf{r}_c$  – вектор направления солнечного света;  $\mathbf{n}$  – вектор нормали СП;  $\phi$  – угол между векторами нормали СП  $\mathbf{n}$  и светового давления  $\mathbf{F}_c$ ;  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  – угол между векторами солнечного света  $\mathbf{r}_c$  и нормали СП  $\mathbf{n}$ .

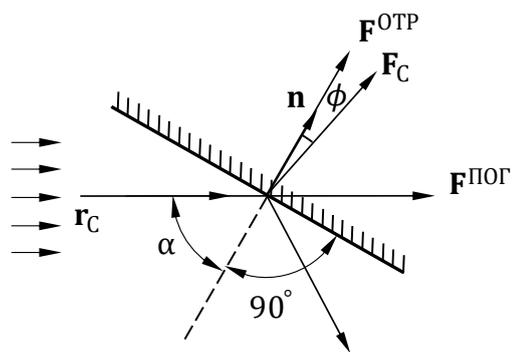


Рисунок 6 – Схема воздействия солнечного света на СП

Величина солнечного давления пропорциональна интенсивности падающего света, который описывается импульс фотона или потока света в единицу времени  $p$ . Согласно соотношению Эйнштейна  $p$  равен:

$$p = \frac{\varepsilon}{c},$$

где  $\varepsilon$  – плотность энергии падающего света, примерно равная  $1353 \text{ Вт/м}^2$  в системе Земля-Луна;  $c$  – скорость света в вакууме.

В режиме отражения фотоны абсолютно упруго сталкиваются с поверхностью паруса. Поэтому угол падения света равен углу отражения света, что делает направление светового давления на парус перпендикулярным его поверхности. Согласно принципу сохранения импульса, световое давление на СП равно

$$\mathbf{F}^{\text{OTR}} = 2pS(\mathbf{r}_c \mathbf{n})^2 \mathbf{n}, \quad (1.1)$$

где  $S$  – площадь поверхности СП, на которую падает свет.

В режиме поглощения фотоны абсолютно неупруго сталкиваются с поверхностью паруса. Поэтому направление светового давления на СП совпадает с направлением падения света. Согласно принципу сохранения импульса, световое давление на СП равно

$$\mathbf{F}^{\text{ПОГ}} = pS(\mathbf{r}_c \mathbf{n}) \mathbf{r}_c. \quad (1.2)$$

Для обычных парусов почти весь падающий свет отражается. Следовательно, согласно уравнению (1.1), уравнение ускорения КА с таким СП можно записать:

$$\mathbf{a}_c = \kappa(\mathbf{r}_c \mathbf{n})^2 \mathbf{n}, \quad (1.3)$$

где  $\kappa = 2p \frac{S}{m}$  – величина номинального ускорения;  $m$  – масса КА. Уравнение (1.3)

описывает ускорение от светового давления, воздействующее на КА с идеальным СП, подходящее для качественного анализа движения и формирования орбиты КА с СП.

Некоторые паруса, как показано на рисунке 5 в), оснащены жидкокристаллическими панелями, которые могут переключаться между белым и черным состояниями для регулировки отражения и поглощения света. Путём настройки отношения ЖК-панелей, находящихся в белом состоянии и в чёрном состоянии, можно регулировать величину светового давления и также создавать крутящий момент для управления ориентацией СП. Согласно уравнениям (1.1) и (1.2), уравнение ускорения КА с таким СП можно записать:

$$\mathbf{a}_c = \kappa \left[ \frac{u}{2} (\mathbf{r}_c \mathbf{n}) \mathbf{r}_c + (1-u) (\mathbf{r}_c \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \right], \quad (1.4)$$

где  $0 \leq u \leq 1$  – коэффициент отражения, равный отношению количества поглощённых фотонов к общему количеству падающих фотонов или отношению площади поглощающего свет к общей площади СП, является одним из переменных управления СП. Уравнение (1.4) описывает управляющее ускорение от СП с контролируемой отражательной способностью, подходящее для точного моделирования движения КА и построения законов управления полётом.

При угле установки СП  $\alpha \neq 0^\circ$  и коэффициент отражения  $u \neq 0$ , направление вектора нормали СП  $\mathbf{n}$  не совпадает с направлением вектора светового давления  $\mathbf{F}_c$ . Изменение угла  $\phi$  между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{F}_c$  от параметров  $\alpha$  и  $u$  показано на рисунке 7.

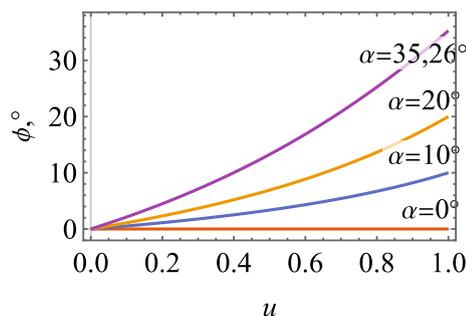


Рисунок 7 – Изменение угла между векторами нормали СП и светового давления  $\phi$  от угла установки СП  $\alpha$  и коэффициента отражения  $u$

### 1.3.2 Уравнения движения в системе Земля-Луна

Для КА с СП величина и направление светового давления зависят от положения Солнца. Поэтому для описания движения Земли, Луны, Солнца и КА используются две системы координат (СК). Первая – геоцентрическая инерциальная СК  $OXYZ$ : начало СК  $O$  находится в центре масс Земли; ось  $OZ$  перпендикулярна плоскости эклиптики; ось  $OX$  направлена на восходящий узел орбиты Луны; ось  $OY$  определяется по правилу правой руки. Вторая – барицентрическая вращающаяся СК  $oxuz$ : начало СК  $o$  находится в центре масс системы Земля-Луна; ось  $ox$  направлена на центр масс Луны; ось  $oz$  совпадает с направлением угловой скорости Луны вокруг Земли; ось  $ou$  определяется по правилу правой руки (рисунок 8). Среди них  $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_3 t$  и  $\theta(t) = \theta_0 + \omega_{\text{Л}} t$  – углы направления солнечного света и положения Луны соответственно;  $\omega_3$  и  $\omega_{\text{Л}}$  – угловые скорости движения Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли соответственно;  $\varphi_0$  и  $\theta_0$  – начальные фазовые углы солнечного света и положения Луны соответственно;  $i \approx 5.145^\circ$  – среднее наклонение орбиты Луны.

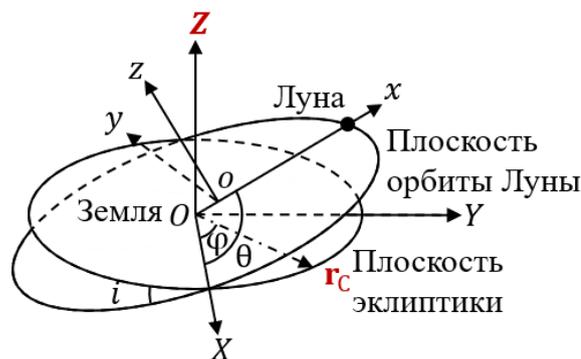


Рисунок 8 – Геоцентрическая инерциальная СК  $OXYZ$  и барицентрическая вращающаяся СК  $oxuz$

Если пренебречь всеми возмущениями, массой КА и рассматривать круговые траектории Земли и Луны вокруг Солнца и Земли соответственно, то движение КА в СК  $oxuz$  можно рассчитывать в рамках круговой ограниченной задачи трёх тел. В этом случае, уравнение движения КА с СП во вращающейся СК имеет вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U(\mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega}_{\text{Л}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\text{СВ}}, \quad (1.5)$$

где  $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r})^2 + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$  – потенциальная энергия КА в СК;  $\mathbf{r}$  – вектор

положения КА;  $\mathbf{a}_{\text{СВ}}$  – ускорение светового давления во вращающейся СК  $oxyz$ ;

$U(\mathbf{r})$  – псевдо-потенциальная функция;  $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $m_1$  – масса первого тела,  $m_2$  –

масса второго тела;  $r_1$ ,  $r_2$  – расстояния от КА до Земли и Луны соответственно;  $\boldsymbol{\omega}_L$

– вектор угловой скорости Луны вокруг Земли  $\boldsymbol{\omega}_L$ . В данной работе жирный

символ – вектор переменной; обычный символ – скаляр переменной. Все величины

в уравнении (1.5) представлены в безразмерном виде. Размерные параметры

времени, массы и длины определяются как  $[T] = \sqrt{\frac{l^3}{G(m_1 + m_2)}} \approx 4,35$  сут,

$[M] = m_1 + m_2 = 6,01 \cdot 10^{24}$  кг,  $[L] = l = 3,84 \cdot 10^8$  м соответственно, где  $G$  –

гравитационная постоянная,  $l$  – расстояние между Землёй и Луной.

В модели круговой ограниченной задачи трёх тел есть единственный инвариантный интеграл – интеграл Якоби:

$$C_J = 2U - v^2 + \mu(1 + \mu), \quad (1.6)$$

где  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Интеграл Якоби представляет собой меру суммарной энергии

системы, включая потенциальную энергию  $U$  и кинетическую энергию  $v^2$ .

Большее значение интеграла Якоби соответствует меньшей суммарной энергии

системы. Если на КА действует только гравитационная сила, то его интеграл Якоби

сохраняется. Интеграл Якоби определяет предельный диапазон положений,

которые может достичь КА, а разница в значениях интегралов Якоби двух

состояний указывает на лёгкость перемещения между ними. Понимание этого

принципа особенно важно для КА с малой тягой, таких как СП.

В инерциальной системе  $OXYZ$  вектор направления солнечного света  $\mathbf{r}_C$

можно выразить как

$$\mathbf{r}_{\text{СИ}} = [\cos \varphi \quad \sin \varphi \quad 0]^T. \quad (1.7)$$

Матрица преобразования координат  $\mathbf{r}_{\text{СИ}}$  в СК  $oxyz$  равна

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Во вращающейся СК  $oxyz$  вектор направления солнечного света  $\mathbf{r}_{CB}$  равен

$$\mathbf{r}_{CB} = \mathbf{A}\mathbf{r}_{CI}. \quad (1.9)$$

Для описания направления нормали СП используется СК  $o_c x_c y_c z_c$ : ось  $o_c x_c$  совпадает с вектором направления солнечного света  $\mathbf{r}_c$  (рисунок 8); ось  $o_c z_c$  совпадает с осью  $OZ$  инерциальной СК  $OXYZ$ ; ось  $o_c y_c$  определяется по правилу правой руки (рисунок 9). Среди них  $\gamma$  – угол поворота вектора  $\mathbf{n}_c$  вокруг вектора  $\mathbf{r}_c$ . Поскольку преобразование координат не меняет угол между векторами, угол  $\alpha$  на рисунке 9 такой же, как на рисунке 6.

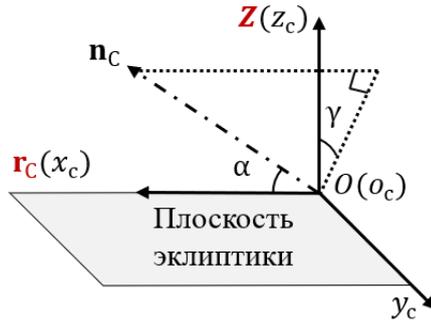


Рисунок 9 – СК относительно солнечного света  $o_c x_c y_c z_c$

Вектор направления нормали к поверхности СП в системе  $o_c x_c y_c z_c$  определяется относительно направления солнечного света  $\mathbf{r}_c$  углами установки  $\alpha$  и  $\gamma$ :

$$\mathbf{n}_c = [\cos\alpha \quad \sin\alpha \sin\gamma \quad \sin\alpha \cos\gamma]^T, \quad (1.10)$$

Матрица преобразования векторов с СК  $o_c x_c y_c z_c$  в СК  $OXYZ$  равна

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Тогда во вращающейся СК  $oxyz$  вектор направления нормали к поверхности СП равен

$$\mathbf{n}_{CB} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{n}_C. \quad (1.12)$$

### 1.3.3 Точки либрации и естественные периодические орбиты

Точки либрации являются положениями равновесия в модели круговой ограниченной задачи трех тел. При отсутствии внешних сил КА может остаться в этих точках. Пусть в уравнении (1.5)  $\mathbf{a}_{CB} = 0$ , и перепишем его в скалярной форме:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = U_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = U_y, \quad \ddot{z} = U_z, \quad (1.13)$$

где  $U_x$ ,  $U_y$  и  $U_z$  – частные производные  $U(\mathbf{r})$  в направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. В соответствии с условиями равновесия все производные равны нулю:

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0, \quad \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0.$$

В результате

$$U_x = U_y = U_z = 0, \\ x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} = y \left( 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = z \left( \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0. \quad (1.14)$$

Во-первых, поскольку  $\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} > 0$ , для всех точек либрации  $z = 0$ .

Во-вторых,  $r_1 = r_2 = 1$  является решением уравнения (1.14). Это означает, что существуют две точки либрации, расположенные в третьих вершинах двух равносторонних треугольников в плоскости  $z = 0$ , причём общим основанием этих треугольников является линия, соединяющая центры двух главных тел. Эти точки называются треугольными точками либрации и обозначаются как L4 и L5. Точки L4 и L5 в системе Земля-Луна являются стабильными.

В-третьих, численный расчёт выявляет три коллинеарные точки либрации, расположены на линии между двумя главными телами. Они называются коллинеарными точками либрации и обозначаются как L1, L2 и L3. Точки L1, L2 и

L3 являются седловыми точками в трёхмерном пространстве, и неустойчивы в направлениях  $x$  и  $y$ , но устойчивы в направлении  $z$ .

Положения 5 точек либрации системы Земля-Луна показаны на рисунке 10.

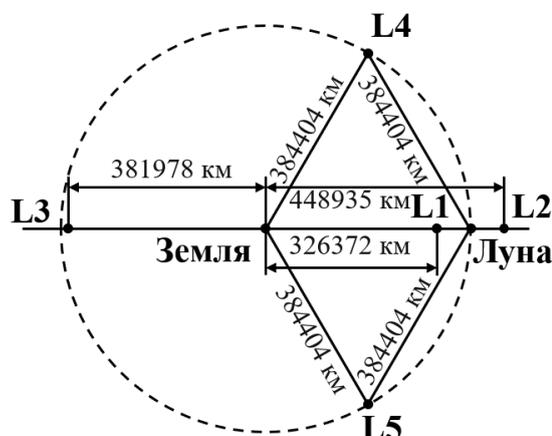


Рисунок 10 – Положения 5 точек либрации системы Земля-Луна

В окрестности точек либрации существует множество естественных периодических орбит, на которых КА может двигаться длительное время. Приближенные аналитические решения гало-орбит вблизи коллинеарных точек либрации L1, L2 и L3 можно получить с использованием метода аппроксимации уравнения движения (1.5) с помощью рядов Лежандра:

$$\begin{aligned} x &= a_{21}A_x^2 + a_{22}A_z^2 - A_x \cos \tau_1 + (a_{23}A_x^2 - a_{24}A_z^2) \cos 2\tau_1 + (a_{31}A_x^3 - a_{32}A_x A_z^2) \cos 3\tau_1 \\ y &= kA_x \sin \tau_1 + (b_{21}A_x^2 - b_{22}A_z^2) \sin 2\tau_1 + (b_{31}A_x^3 - b_{32}A_x A_z^2) \sin 3\tau_1 \\ z &= \delta_n A_z \cos \tau_1 + \delta_n d_{21} A_x A_z (\cos 2\tau_1 - 3) \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $A_z$  – характеристическая амплитуда орбит в направлениях  $z$ ;  $\delta_n$  – коэффициент для определения южного и северного семейства орбит;  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $d_{ij}$ ,  $k$ ,  $\tau_1$  – известные величины из приложения I.

Аналитические решения не обеспечивают достаточную точность прогнозирования траектории КА. Для точного прогнозирования траектории используется метод дифференциальной коррекции. Преобразуем уравнение (1.13) следующим образом:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 2\dot{y} + U_x \\ -2\dot{x} + U_y \\ U_z \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

где  $\mathbf{X} = [x \ y \ z \ v_x \ v_y \ v_z]^T$  – вектор состояния КА.

Матрица перехода состояния  $\Phi(t, t_0)$  описывает соотношение преобразования между вариацией вектора состояния в разные моменты времени:

$$\delta\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0)\delta\mathbf{X}(t_0). \quad (1.17)$$

Взяв первую производную уравнения (1.17) по времени, получим

$$\dot{\Phi}(t, t_0)\delta\mathbf{X}(t_0) = \delta\dot{\mathbf{X}}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}^T} \delta\mathbf{X}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}^T} \Phi(t, t_0)\delta\mathbf{X}(t_0).$$

Из-за произвольности вариации  $\delta\mathbf{X}(t_0)$ , матрицу перехода состояния  $\Phi(t, t_0)$  можно найти путём интегрирования следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}^T} \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}_6. \quad (1.18)$$

Пусть вектор состояния в момент  $t_0$  равен  $\mathbf{X}_0$ , а в момент  $t_f$  равен  $\mathbf{X}_f$ . Видно, что  $\mathbf{X}_f$  зависит только от  $\mathbf{X}_0$  и  $t_f$ . Поэтому уравнение перехода состояний может быть представлено следующим образом

$$\delta\mathbf{X}_f = \Phi\delta\mathbf{X}_0 + \dot{\mathbf{X}}_f\delta t_f. \quad (1.19)$$

Некоторые естественные периодические орбиты в окрестности точек либрации обладают симметрией, например гало-орбиты и орбиты Ляпунова в окрестности точки L2. Для формирования гало-орбит, предположим, что вектор состояния КА аналитического решения в уравнении (1.15) в начальный момент равен

$$\mathbf{X}_0 = [x_0 \ 0 \ z_0 \ 0 \ v_{y0} \ 0]^T.$$

Подставляем начальный вектор (1.18) в уравнение (1.16) и интегрируем, пока КА не пересекает плоскость  $y = 0$ , затем его вектор состояния становится:

$$\mathbf{X}_f = [x_f \quad 0 \quad z_f \quad v_{xf} \quad v_{yf} \quad v_{zf}]^T.$$

Величина  $z_0$  фиксируются как характерное значение данной орбиты. Чтобы сделать  $\mathbf{X}_f$  удовлетворять условию симметрии, согласно уравнению (1.19), итерационная формула для вычисления векторов состояния движения определяется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta v_{y0} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \Phi_{41} & \Phi_{45} \\ \Phi_{61} & \Phi_{65} \end{bmatrix} - \frac{1}{v_{yf}} \begin{bmatrix} \dot{v}_{xf} \\ \dot{v}_{zf} \end{bmatrix} [\Phi_{21} \quad \Phi_{25}] \right)^{-1} \begin{bmatrix} v_{xf} \\ v_{zf} \end{bmatrix},$$

где  $\Phi_{ij}$  – член матрицы перехода состояния  $\Phi$  на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца. Условие завершения итерации является  $v_{xf} = v_{zf} = 0$ . Применяя метод численного продолжения и постепенно изменяя характерное значение  $z_0$ , можно получить другие гало-орбиты.

При  $A_z = 0$  в уравнении (1.15) получается аналитическое решение орбиты Ляпунова. Вектор состояния КА аналитического решения в начальный момент равен

$$\mathbf{X}_0 = [x_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad v_{y0} \quad 0]^T.$$

Вектор состояния при пересечении плоскости  $y = 0$  равен

$$\mathbf{X}_f = [x_f \quad 0 \quad 0 \quad v_{xf} \quad v_{yf} \quad 0]^T.$$

С использованием метода дифференциальной коррекции итерационная формула для вычисления векторов состояния орбит Ляпунова определяется следующим образом:

$$\delta v_{y0} = \left( \Phi_{45} - \frac{1}{v_{yf}} \dot{v}_{xf} \Phi_{25} \right)^{-1} v_{xf}.$$

Применяя метод численного продолжения и постепенно изменяя характерное значение  $x_0$ , можно получить другие орбиты Ляпунова.

На рисунке 11 показаны естественные периодические орбиты Ляпунова и гало в окрестности точки L2 системы Земля-Луна. Эти орбиты обладают уникальными пространственными и фазовыми свойствами, что делает их пригодными для различных задач. В диссертации на их основе сформированы разнообразные искусственные периодические орбиты.

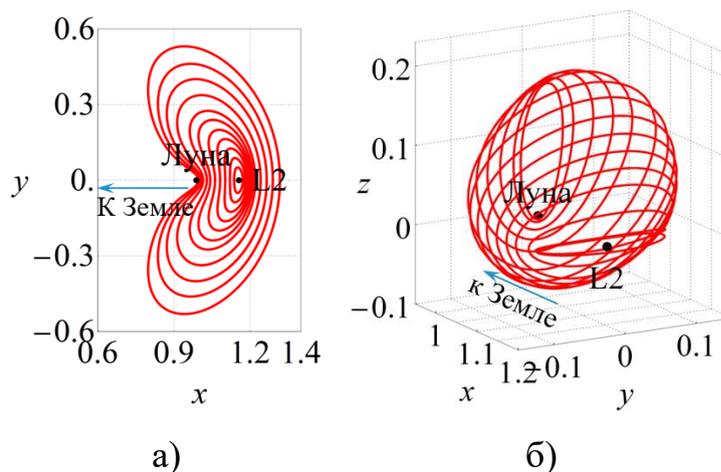


Рисунок 11 – Естественные периодические орбиты в окрестности точки L2 системы Земля-Луна: а) семейство орбит Ляпунова; б) семейство гало-орбит

#### 1.4 Выводы по первой главе

В данной главе рассматриваются основные аспекты движения КА с СП в окрестности точки либрации L2 системы Земля-Луна, и сделаны следующие выводы:

1. Анализ истории и текущего состояния технологии СП выявил ограничения по их конструктивным характеристикам и производительности.
2. Анализ современных исследований в области СП выявил основные проблемы и предложил методики их решения для применения искусственных периодических орбит КА с СП.
3. Представлены два уравнения движения СП: одно для идеальных отражающих СП, другое для СП с управляемой отражательной способностью.

4. Проанализированы исследования движения КА под гравитацией двух небесных тел, и представлено уравнение движения КА в круговой ограниченной модели трёх тел в системе Земля-Луна.
5. Введены понятия точек либрации и методик формирования естественных периодических орбит в их окрестности.

## 2 ФОРМИРОВАНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

В данной главе рассматривается формирование искусственных орбит в окрестности точки L2 системы Земля-Луна, включающие резонансные орбиты второго порядка и цилиндрические орбиты. Глава состоит из двух разделов.

В первом разделе разработана методика формирования резонансных орбит второго порядка КА с СП с использованием метода множественной стрельбы и получена зависимость характеристик этих орбит от углов установки паруса, начального относительного положения Солнца и проектных параметров КА с СП.

Во втором разделе разработана методика формирования цилиндрических орбит на основе линеаризации динамических уравнений КА с СП в окрестности точки L2 и рассмотрены характеристики квазипериодических и периодических цилиндрических орбит.

### 2.1 Резонансные орбиты второго порядка

Резонансные орбиты представляют собой тип орбит, длительность  $n$  оборотов по которым равна периоду движения Солнца вокруг системы Земля-Луна. Они называются резонансными орбитами  $n$ -го порядка. Резонансные орбиты, сформированные с применением СП, имеют регулируемые формы и положения орбит при фиксированных периодах обращения, и могут лучше соответствовать требованиям для размещения определённых КА по сравнению с естественными периодическими орбитами.

#### 2.1.1 Разработка методики формирования резонансных орбит

Для формирования резонансных орбит можно применить следующую методику: решить двухточечную краевую задачу с целью замыкания траектории полёта КА за период  $T_C$ , используя естественные орбиты, период которых равен  $T_C / n$  в качестве начальных приближений, где  $T_C = 29,53$  сут. – период движения Солнца вокруг системы Земля-Луна.

В окрестности точки L2 чаще всего рассматриваются естественные орбиты Ляпунова и гало-орбиты. На рисунке 12 показаны изображения зависимостей периодов движения по этим орбитам в зависимости от характеристических размеров для орбит Ляпунова и гало-орбит. Точки на рисунке соответствуют орбитам на рисунке 11. Для орбит Ляпунова таким характеристическим размером является  $x_M$  – максимальное отклонение орбитального положения КА по оси  $x$ , а для гало-орбит  $z_M$  – максимальное значение орбитального положения КА по оси  $z$ .

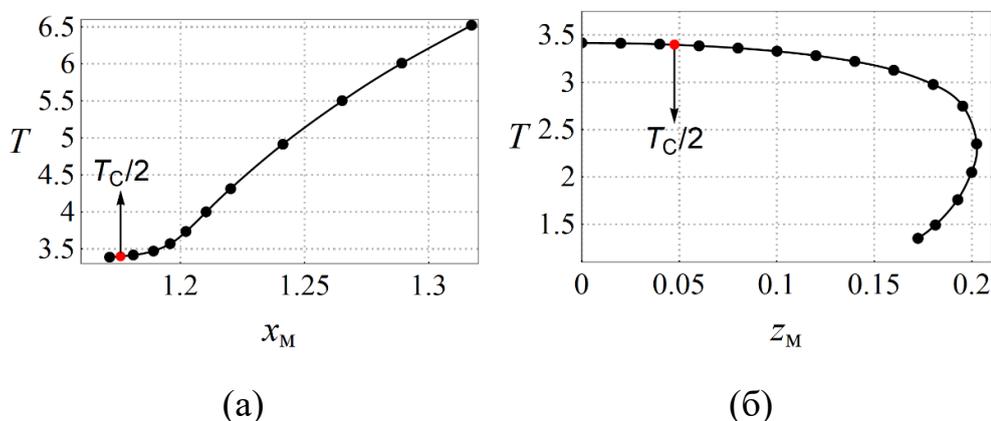


Рисунок 12 – Зависимости периодов  $T$  от характеристических размеров для орбит Ляпунова (а) и для гало-орбит (б)

Из рисунка 12 видно, что наиболее подходящими орбитами для начальных приближений являются орбиты Ляпунова и гало-орбиты с периодом  $T_C/2$ . Соответствующие сформированные орбиты являются резонансными орбитами 2-го порядка.

Эффективным методом решения двухточечной краевой задачи с целью замыкания траектории является метод множественной стрельбы, основанный на матрице перехода состояний и методе дифференциальной коррекции. Метод множественной стрельбы заключается в разбиении интервала, в котором производится поиск решения, на несколько более мелких интервалов. Далее решается начальная задача на каждом из этих меньших интервалов, после чего налагаются дополнительные условия совмещения для формирования решения на всем интервале. Этот метод существенно лучше работает с нелинейными

системами и обеспечивает стабильность численного решения по сравнению с методом одиночной дифференциальной коррекции.

Как упоминалось ранее, для проведения анализа изменений резонансных орбит с переменными управления СП, предположим, что СП имеет идеально отражающую поверхность. Следовательно, вектор ускорения, действующий на КА с СП, описывается уравнением (1.3). Учитывая асинхронность угловой скорости Земли вокруг Солнца  $\omega_3$  и угловой скорости Луны вокруг Земли  $\omega_L$ , целесообразно пренебречь наклоном орбиты Луны  $i$ , чтобы обеспечить периодичность движения Солнца во вращающейся СК  $oxyz$ . Согласно уравнениям (1.7)–(1.9), после замены наклона  $i$  на ноль,  $\mathbf{r}_{CB}$  равен

$$\mathbf{r}_{CB} = [\cos(\varphi - \theta) \quad \sin(\varphi - \theta) \quad 0]^T = [\cos\lambda \quad \sin\lambda \quad 0]^T, \quad (2.1)$$

где  $\lambda(t) = \lambda_0 - \omega_C t$ ,  $\omega_C = \omega_L - \omega_3$  – угловая скорость вращения Солнца вокруг системы Земля-Луна во вращающейся СК.

Для исследования изменения резонансных орбит под влиянием изменений переменных управления СП, пусть в СК  $oxyz$  вектор направления нормали к поверхности СП  $\mathbf{n}_{CB}$  задаётся углами установки  $\alpha$  и  $\beta$  с соотношением:

$$\mathbf{n}_{CB} = [\cos\beta \cos\alpha \quad \sin\beta \cos\alpha \quad \sin\alpha]^T. \quad (2.2)$$

Поскольку направление нормали СП относительно направления солнечного света фиксировано, угол  $\alpha$  постоянный, а угол  $\beta$  определяется как

$$\beta = \lambda + \beta', \quad (2.3)$$

где  $\beta'$  – постоянная величина. Подставив уравнения (2.1)–(2.3) в уравнение (1.3), получим выражение для вектора ускорения тяги  $\mathbf{a}_{CB}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{CB} &= \kappa \cos^2(\lambda + \beta' - \lambda) \cos^2 \alpha [\cos(\lambda + \beta') \cos \alpha \quad \sin(\lambda + \beta') \cos \alpha \quad \sin \alpha]^T, \\ &= \kappa' \cos^2 \alpha [\cos(\lambda'_0 - \omega_C t) \cos \alpha \quad \sin(\lambda'_0 - \omega_C t) \cos \alpha \quad \sin \alpha]^T, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\kappa' = \kappa \cos^2 \beta'$ ,  $\lambda'_0 = \lambda_0 + \beta'$ . Из уравнения (2.4) видно, что влияние угла  $\beta'$  на вектор ускорения  $\mathbf{a}_{CB}$  может быть рассмотрено как эквивалентное влияние

величины  $\kappa$  и угла  $\lambda_0$ . Таким образом, можем установить  $\beta' = 0$ , и уравнение (2.4) преобразуется к виду

$$\mathbf{a}_{\text{СВ}} = \kappa \cos^2 \alpha \begin{bmatrix} \cos(\lambda_0 - \omega_c t) \cos \alpha & \sin(\lambda_0 - \omega_c t) \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}^T. \quad (2.5)$$

Это означает, что нам нужно анализировать только влияние  $\lambda_0$ ,  $\kappa$  и  $\alpha$  на резонансные орбиты.

Преобразуем уравнение движения (1.5) к следующему виду:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{a}_{\text{СВ}}).$$

Из уравнения (2.5) видно, что при формировании и движении по заданной орбите с заданными параметрами управления  $\lambda_0$ ,  $\kappa$  и  $\alpha$ , ускорение  $\mathbf{a}_{\text{СВ}}$  зависит только от времени  $t$ . Поэтому для постоянной величины  $\Delta t$  вариация вектора состояния  $\mathbf{X}$  равна

$$\delta \mathbf{X}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{\Phi}(t_0 + \Delta t, t_0) \delta \mathbf{X}(t_0).$$

Величина матрицы перехода состояния  $\mathbf{\Phi}$  можно найти путём интегрирования дифференциального уравнения (1.18). В методе множественной стрельбы, на орбитах начального приближения выбираются времена  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  ( $t_n - t_0 = T_C$ ), и обозначаются соответствующие векторы состояния движения как  $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ . Затем, для каждой пары моментов времени  $t_k$  и  $t_{k+1}$ , при ограничении дифференциального уравнения вычисляются векторы состояния движения в момент  $t_{k+1} - \psi(\mathbf{X}_k)$ , и соответствующие матрицы перехода состояния  $\mathbf{\Phi}_k$ . Наконец, вычисляются векторы состояния, удовлетворяющие граничными условиями  $\psi(\mathbf{X}_k) = \mathbf{X}_{k+1}$ , для всех моментов. В результате все сегментированные траектории соединяются встык, и образуется непрерывная траектория, подчиняющаяся ограничениям дифференциального уравнения. Итерационная формула вычисления векторов состояния движения имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{j+1} - \mathbf{X}_1^j \\ \mathbf{X}_2^{j+1} - \mathbf{X}_2^j \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^{j+1} - \mathbf{X}_n^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2 & -\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Phi_{n-1} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_2^j - \psi(\mathbf{X}_1^j) \\ \mathbf{X}_3^j - \psi(\mathbf{X}_2^j) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^j - \psi(\mathbf{X}_{n-1}^j) \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{X}_k^j$  – вектор состояния  $k$ -ой точки в  $j$ -ом цикле итерации;  $\psi(\mathbf{X}_k^j)$  – вектор состояния после интервала времени с  $\mathbf{X}_k^j$ ;  $\Phi_k$  – это матрица перехода состояний из точки  $k$  в точку  $k+1$ . Итерируя эту формулу, можно за несколько приближений, можно получить точное численное определение резонансной орбиты КА с СП.

### 2.1.2 Изменение резонансных орбит от параметров ускорения светового давления

В результате расчётов получены два семейства резонансных орбит второго порядка на базе орбит Ляпунова и гало-орбит с периодом  $T_C / 2$  отличающиеся различными наборами переменных управления (начальное положение Солнца  $\lambda_0$ , величина номинального ускорения  $k$  и угол установки СП  $\alpha$ ). Резонансные орбиты, сформированные на основе орбит Ляпунова, называются Ляпунов-конформными орбитами, а орбиты, сформированные на основе гало-орбит, называются гало-конформными орбитами.

Сравнительный анализ этих орбит дал следующие результаты.

1) Конфигурации орбит при разных углах начального положения Солнца  $\lambda_0$ .

В ходе экспериментов было определено, что в диапазоне  $\lambda_0 = 0^\circ \dots 360^\circ$  могут быть сформированы только две конфигурации резонансных орбит. Они соответствуют  $\lambda_0 = 0^\circ$  или  $180^\circ$ , и  $\lambda_0 = 90^\circ$  или  $270^\circ$ . На рисунке 13 представлены Ляпунов-конформные орбиты (рисунки (а) и (в)) и гало-конформные орбиты (рисунки (б) и (г)) для этих значений  $\lambda_0$ . На рисунке 13 (а) и (б),  $\lambda = 0^\circ$  в точке (1) и  $\lambda = 180^\circ$  в точке (2). На рисунке 13 (в) и (г),  $\lambda = 90^\circ$  в точке (1) и  $\lambda = 270^\circ$  в точке (2). Чёрные линии соответствуют естественным орбитам Ляпунова или гало-орбитам с периодом  $T_C / 2$ . Синие и красные линии соответствуют первому и второму витку орбит.

Полученные результаты показывают, что влияние начальных фаз положения Солнца  $\lambda_0$  делит резонансные орбиты 2-го порядка на две группы с разными конфигурациями. Резонансные орбиты первой конфигурации ( $\lambda_0 = 0^\circ$  или  $180^\circ$ ) имеют два витка орбиты, симметричные друг другу относительно плоскости  $y = 0$ . Резонансные орбиты второй конфигурации ( $\lambda_0 = 90^\circ$  или  $270^\circ$ ) имеют один большой и один маленький витки, симметричные относительно плоскости  $y = 0$ .

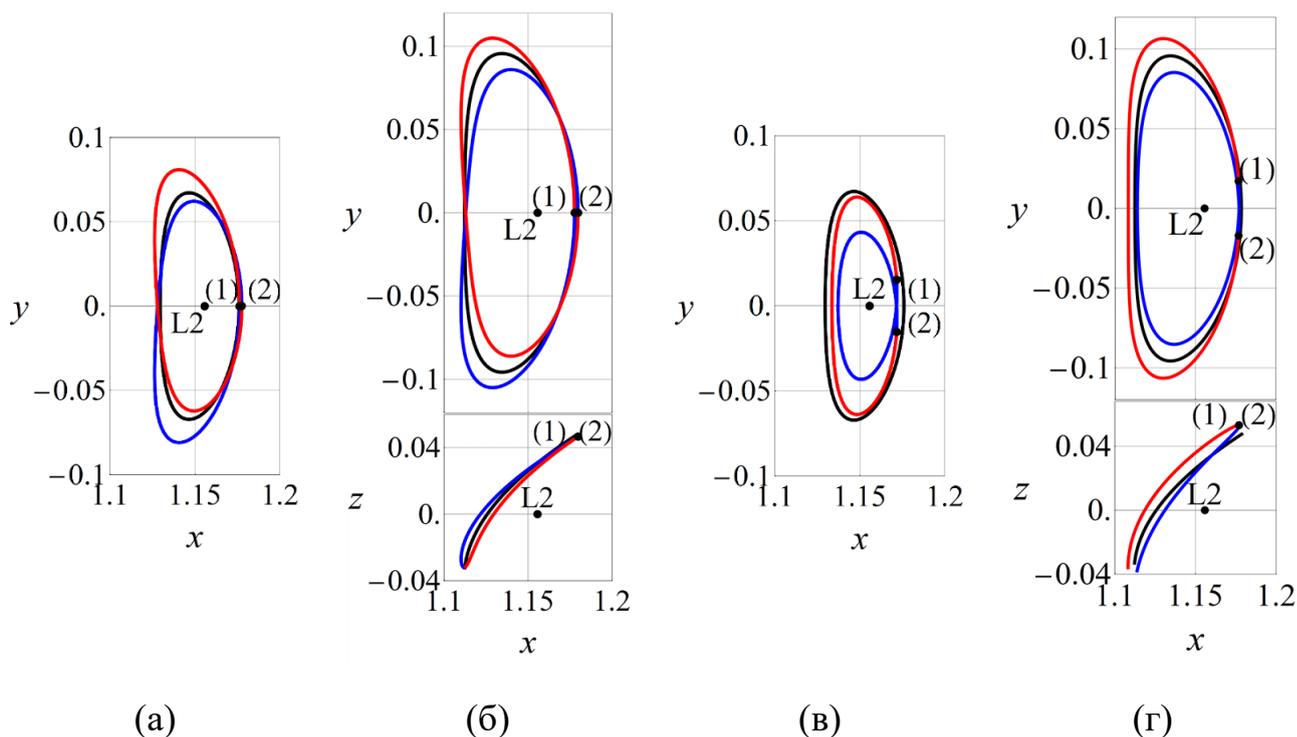


Рисунок 13 – Резонансные орбиты 2-го порядка ( $\kappa = 0,02$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ) при разных углах начального положения Солнца  $\lambda_0$

## 2) Влияние величины номинального ускорения $\kappa$ .

На рисунке 14 представлены резонансные орбиты 2-го порядка при разных величинах номинального ускорения  $\kappa$ . На рисунке 14 и рисунке 15 траектории показанные на (а) и (б) соответствуют Ляпунов-конформным и гало-конформным резонансным орбитам первой конфигурации, и (в) и (г) соответствуют Ляпунов-конформным и гало-конформным резонансным орбитам второй конфигурации. Чёрные линии соответствуют естественной орбите с  $\kappa = 0$ . Красные линии –  $\kappa = 0,008$ ; синие линия –  $\kappa = 0,016$ .

На рисунке 15 представлены зависимости максимальных смещений положения резонансных орбит  $\Delta y$  в направлении  $y$  относительно естественных периодических орбит от величин номинального ускорения  $\kappa$ . На каждом изображении верхняя линия соответствует максимальному смещению внешнего витка (или полувитка) орбит, и нижняя линия соответствует максимальному смещению внутреннего витка (или полувитка) орбит.

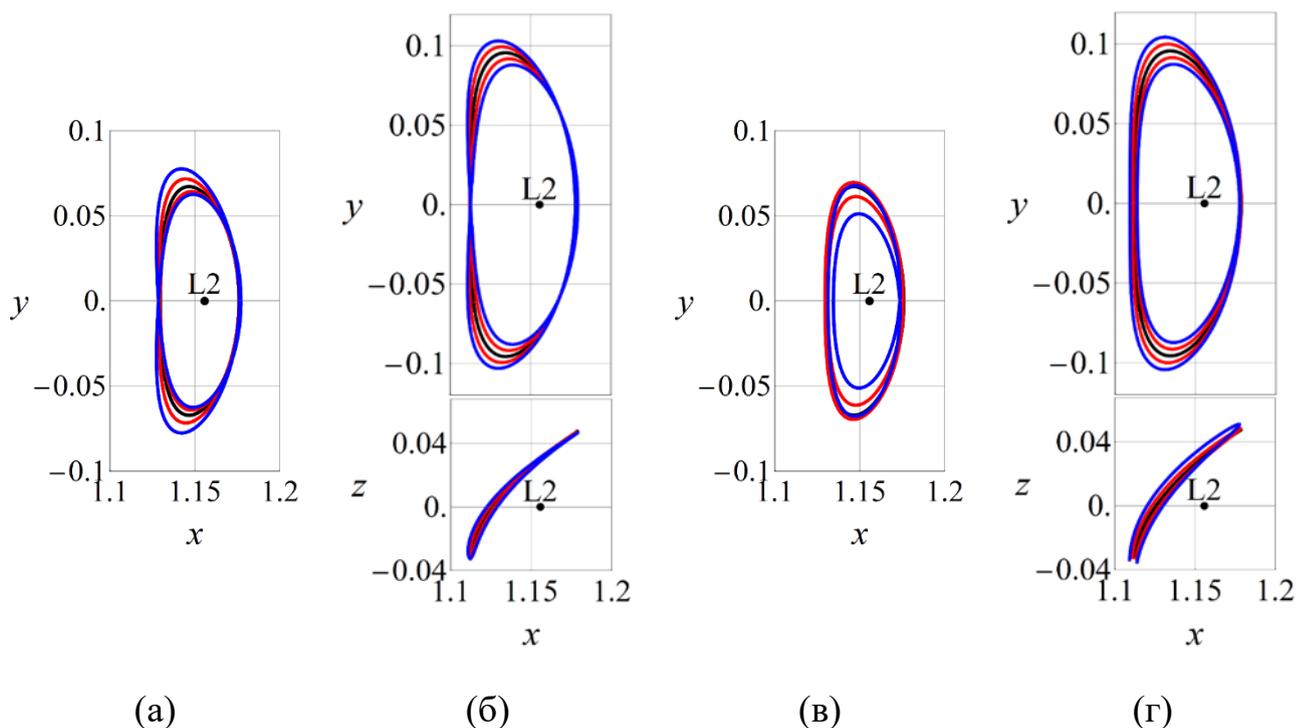
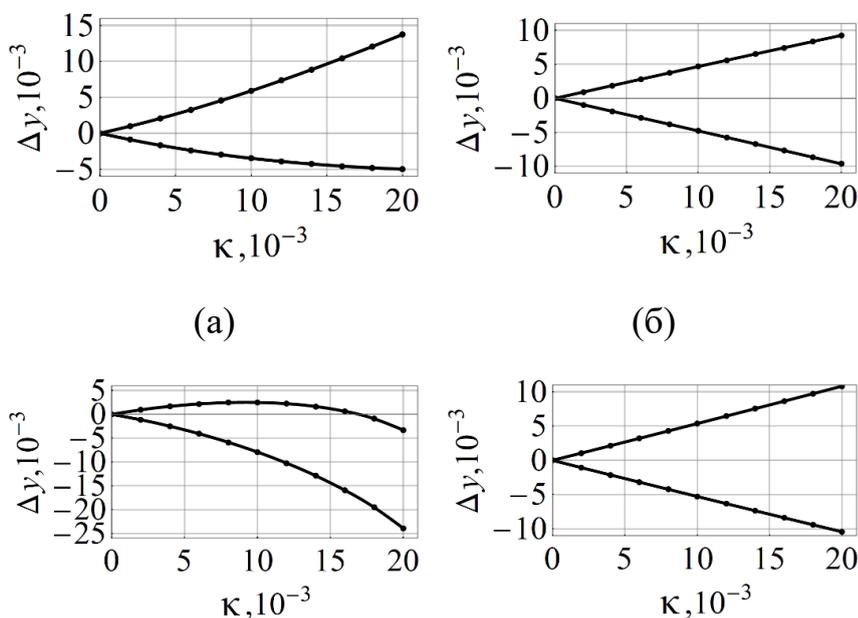


Рисунок 14 – Резонансные орбиты 2-го порядка при разных величинах номинального ускорения  $\kappa$  ( $\alpha = 0^\circ$ )



(в)

(г)

Рисунок 15 – Зависимости максимальных смещений положения резонансных орбит  $\Delta u$  в направлении  $y$  относительно естественных периодических орбит от величины номинального ускорения  $k$

Полученные результаты показывают, что влияние величины номинального ускорения  $k$  определяет смещение резонансных орбит относительно естественных периодических орбит. Максимальное смещение Ляпунов-конформных орбит изменяется нелинейно с увеличением величины номинального ускорения  $k$ . Особенно не монотонно изменяется смещение больших витков Ляпунов-конформных орбит второй конфигурации. Максимальное смещение гало-конформных орбит изменяется примерно линейно с увеличением величины номинального ускорения  $k$ .

3) Влияние угла установки паруса  $\alpha$ .

На рисунке 16 представлены резонансные орбиты 2-го порядка при разных  $\alpha$ . Чёрные линии соответствуют значению  $\alpha = 0^\circ$ ; синие линии – отрицательным отклонениям паруса  $\alpha = -15^\circ, -35,26^\circ$  и  $-45^\circ$ ; красные линии – положительным  $\alpha = 15^\circ, 35,26^\circ$  и  $45^\circ$ .

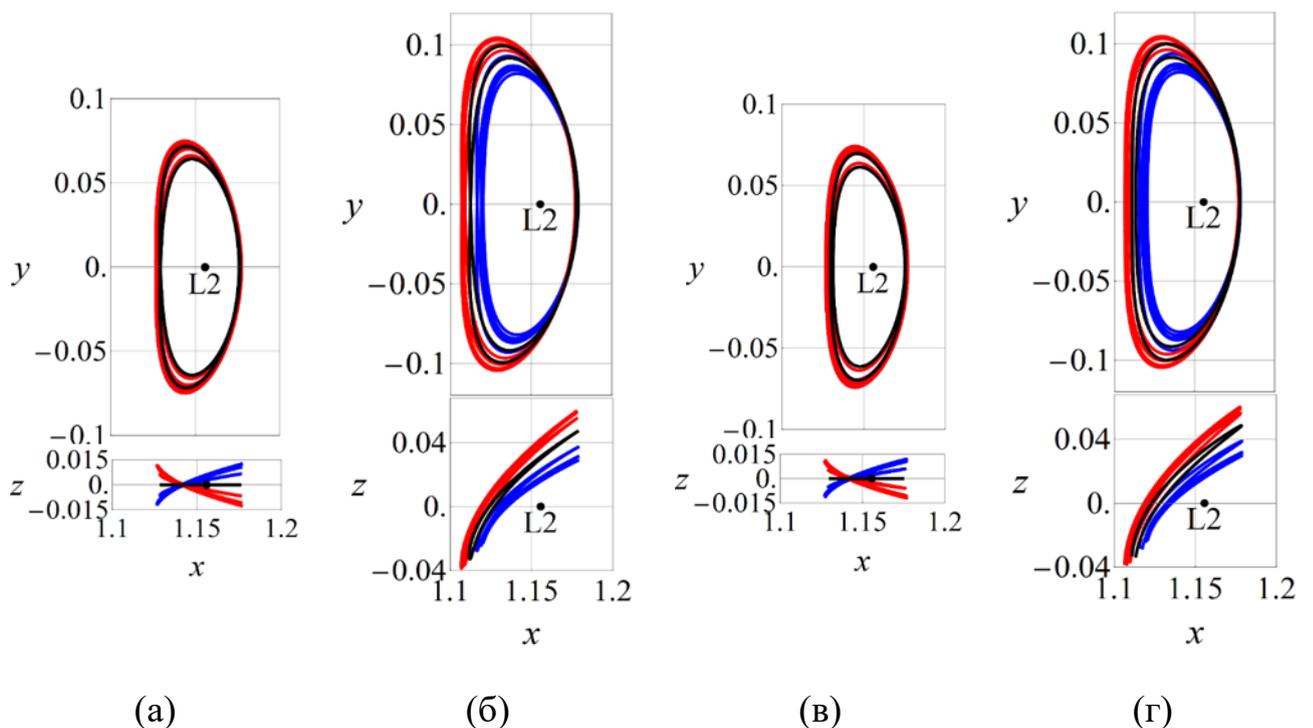


Рисунок 16 – Резонансные орбиты 2-го порядка при разных углах наклона  $\alpha$   
( $\kappa = 0,008$ )

На рисунке 17 представлены зависимости максимальных смещений положения резонансных орбит  $\Delta z$  в направлении  $z$  относительно естественных периодических орбит от угла установки паруса  $\alpha$ . Красные линии представляют смещение самых высоких точек орбит, а синие линии представляют смещение самых нижних точек орбит. Следует отметить, что орбиты первой и второй конфигурации имеют полностью перекрывающиеся зависимости максимальных смещений. На рисунке 17 (а) и (б) показаны изображения для Ляпунов-конформных орбит и гало-конформных орбит соответственно.

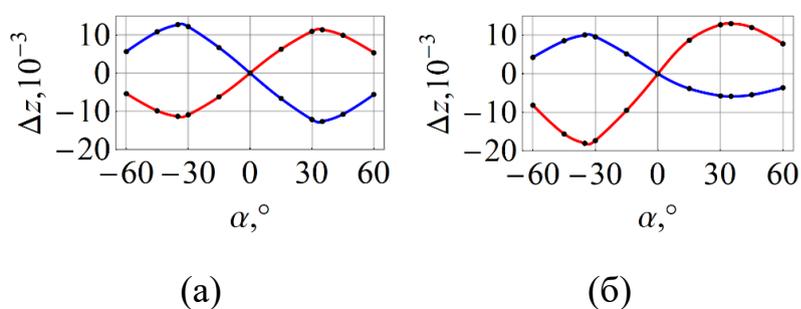


Рисунок 17 – Зависимости максимальных смещений положения резонансных орбит  $\Delta z$  в направлении  $z$  относительно естественных периодических орбит от угла наклона  $\alpha$

Полученные результаты показывают, что влияние угла установки паруса  $\alpha$  главным образом определяет смещение резонансных орбит относительно естественных периодических орбит в направлении оси  $z$ . Ляпунов-конформные орбиты и гало-конформные орбиты и первой и второй конфигураций имеют одинаковые тенденции изменения максимальных смещений. Для всех орбит максимальные смещения получают экстремальные значения при  $\alpha = \pm 35,26^\circ$ .

Результаты моделирования показывают, что путём выбора переменных управления (начальное положение Солнца, величина номинального ускорения и угол установки СП) можно создавать разнообразные орбиты, удовлетворяющие заданным требованиям по их расположению.

## 2.2 Цилиндрические орбиты

Хотя резонансная орбита может быть отклонена от естественной периодической орбиты путём изменения определённых переменных управления СП, КА, двигающийся по резонансной орбите, всё равно периодически пересекает плоскость орбиты Земля-Луна. Однако в некоторых миссиях, орбиты, которые полностью левитируют над или под плоскостью орбиты Земля-Луна, могут принести значительную пользу. Такие орбиты называются цилиндрическими орбитами. Например, гелиоцентрическим цилиндрическим орбитам можно использовать для наблюдения за полярными областью и магнитными полюсами Солнца. Цилиндрическим орбитам Меркурия можно использовать для раннего предупреждения о солнечных плазменных бурях. А цилиндрическим орбитам под южным полюсом Луны можно обеспечивать прямой обзор на эти области, и эффективно выполняют такие задачи, как наблюдение и реле связи (рисунок 18).

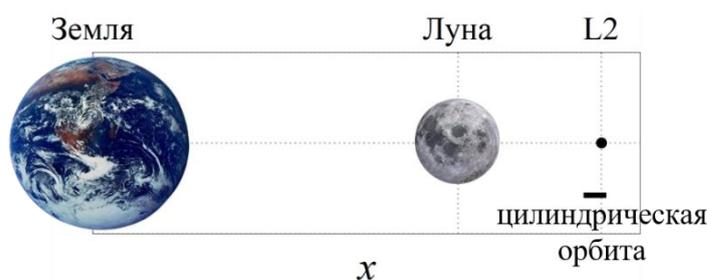


Рисунок 18 – Расположение Земли, Луны и цилиндрической орбиты

### 2.2.1 Разработка методики формирования цилиндрических орбит

Формирование цилиндрической орбиты основано на нахождении аналитических решений линеаризованных уравнений движения (1.5) вблизи точки либрации. Обозначив  $\delta \mathbf{r} = [\xi \quad \eta \quad \eta]^T$  – малое отклонение от точки либрации L2, получаем линеаризованное уравнение движения:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= U_{xx}\xi + a_x \\ \dot{\eta} + 2\dot{\xi} &= U_{yy}\eta + a_y, \\ \ddot{\zeta} &= -U_{zz}\zeta + a_z \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{a}_{\text{CB}} = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T$  – компоненты ускорения светового давления. Обнаружено, что если  $\cos i$  заменить на 1, можно исключить произведения  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\sin \varphi$  и

$\cos \varphi$ . в выражениях  $\mathbf{r}_{CB}$  (1.9) и  $\mathbf{n}_{CB}$  (1.12). После замены векторы  $\mathbf{r}_{CB}$  и  $\mathbf{n}_{CB}$  примут следующий вид:

$$\mathbf{r}_{CB} = [\cos \lambda \quad \sin \lambda \quad -\sin i \sin \varphi]^T,$$

$$\mathbf{n}_{CB} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \lambda - \sin \alpha \sin \lambda \sin \gamma + \sin \theta \sin i \sin \alpha \cos \gamma \\ \cos \alpha \sin \lambda + \sin \alpha \cos \lambda \sin \gamma + \cos \theta \sin i \sin \alpha \cos \gamma \\ \sin i (-\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi \sin \gamma) + \sin \alpha \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Подставив уравнение (2.7) в уравнение (1.3), вектор ускорения  $\mathbf{a}_{CB}$  равен

$$\begin{cases} a_x = \kappa \cos^2 \alpha (\cos \alpha \cos \lambda - \sin \alpha \sin \gamma \sin \lambda + \sin i \sin \alpha \cos \gamma \sin \theta) \\ a_y = \kappa \cos^2 \alpha (\cos \alpha \sin \lambda + \sin \alpha \sin \gamma \cos \lambda + \sin i \sin \alpha \cos \gamma \cos \theta) \\ a_z = \kappa \cos^2 \alpha [\sin i (-\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \sin \gamma \cos \varphi) + \sin \alpha \cos \gamma] \end{cases}. \quad (2.8)$$

При формировании цилиндрических орбит предположим, что переменные управления СП, включая коэффициент отражения  $u$ , и углы установки  $\alpha$  и  $\gamma$  относительно направления солнечного света фиксированы. В данном случае уравнения в (2.6) содержат только члены первого порядка от тригонометрических функций переменных  $\lambda$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ . Согласно гармоническому анализу, частное решение для цилиндрических орбит получается в виде:

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi_0 \cos \lambda + \xi_1 \sin \lambda + \xi_2 \sin \theta \\ \eta(t) = \eta_0 \sin \lambda + \eta_1 \cos \lambda + \eta_2 \cos \theta \\ \zeta(t) = \zeta_0 + \zeta_1 \sin \varphi + \zeta_2 \cos \varphi \end{cases}. \quad (2.9)$$

Подставив уравнения (2.8) и (2.9) в уравнение (2.6), получаем следующие уравнения:

$$\xi_0 = \frac{(\omega_C^2 + 2\omega_C + U_{yy}) \kappa \cos^3 \alpha}{-U_{xx} U_{yy} - (U_{xx} + U_{yy} - 4) \omega_C^2 - \omega_C^4},$$

$$\xi_1 = -\frac{(\omega_C^2 + 2\omega_C + U_{yy}) \kappa \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \gamma}{-U_{xx} U_{yy} - (U_{xx} + U_{yy} - 4) \omega_C^2 - \omega_C^4}, \quad (2.10)$$

$$\xi_2 = \frac{(\omega_M^2 + 2\omega_M + U_{yy}) \kappa \cos^2 \alpha \sin \alpha \cos \gamma \sin i}{-U_{xx} U_{yy} - (U_{xx} + U_{yy} - 4) \omega_M^2 - \omega_M^4},$$

$$\eta_0 = -\frac{(\omega_C^2 + 2\omega_C + U_{xx})\kappa \cos^3 \alpha}{-U_{xx}U_{yy} - (U_{xx} + U_{yy} - 4)\omega_C^2 - \omega_C^4},$$

$$\eta_{11} = -\frac{(\omega_C^2 + 2\omega_C + U_{xx})\kappa \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \gamma}{-U_{xx}U_{yy} - (U_{xx} + U_{yy} - 4)\omega_C^2 - \omega_C^4},$$

$$\eta_2 = \frac{(\omega_M^2 + 2\omega_M + U_{xx})\kappa \cos^2 \alpha \sin \alpha \cos \gamma \sin i}{-U_{xx}U_{yy} - (U_{xx} + U_{yy} - 4)\omega_M^2 - \omega_M^4},$$

$$\zeta_0 = -\frac{\kappa \cos^2 \alpha \sin \alpha \cos \gamma}{U_{zz}},$$

$$\zeta_1 = \frac{\kappa \cos^3 \alpha \sin i}{\omega_3^2 + U_{zz}},$$

$$\zeta_2 = -\frac{\kappa \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \gamma \sin i}{\omega_3^2 + U_{zz}}.$$

Учитывая, что решения для цилиндрических орбит получены на основе линеаризации уравнений движения и приближенной замены угла наклона  $i$ , существует определённая погрешность в аналитических решениях орбит (2.9). Пусть вектор координаты КА при движении по цилиндрической орбите равен  $\mathbf{r}_0(t) = [\xi(t) \quad \eta(t) \quad \zeta(t)]^T$ . В соответствии с уравнением (1.5), ускорение силы тяги, требуемое для поддержания КА по этой орбите в СК  $oxuz$ , определяется как:

$$\mathbf{a}_{\text{ТВ}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_0 - \nabla U(\mathbf{r}_0).$$

Пусть переменные управления СП равны  $\alpha = \alpha_0$  и  $\gamma = \gamma_0$ . В соответствии с уравнением (1.3), обозначим ускорение, действующее на СП, как  $\mathbf{a}_{C0}$ . Таким образом, разница

$$\Delta \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{\text{ТВ}} - \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{a}_{C0} \quad (2.11)$$

описывает погрешность в аналитических решениях орбит, то есть ускорение возмущения. Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  описываются уравнениями (1.8) и (1.11).

Согласно результатам расчёта, данная погрешность в основном проявляется в компоненте направления  $x$  и может быть уменьшена путём введения корректировки  $\xi_C$  в уравнения (2.10):

$$\xi(t) = \xi_0 \cos \lambda + \xi_1 \sin \lambda + \xi_2 \sin \theta + \xi_C. \quad (2.12)$$

Введение  $\xi_C$  не исключает полностью погрешность  $\Delta \mathbf{a}_B$ , однако может уменьшить её максимальное значение и заставить интеграл  $|\Delta \mathbf{a}_B|$  на протяжении длительного периода стремиться к нулю. Длительный период можно принять равным  $12T_C$ . Следовательно, значение  $\xi_C$  определяется следующим уравнением:

$$\xi_C = \xi_C \left| \int_{t_0}^{t_0+12T_C} |\Delta \mathbf{a}_B| dt = \min \int_{t_0}^{t_0+12T_C} |\Delta \mathbf{a}_B| dt. \quad (2.13) \right.$$

На основании уравнений (2.9), (2.10), (2.12) и (2.13) возможно получить аналитические решения для различных цилиндрических орбит путём выбора переменных управления СП (величина номинального ускорения  $\kappa$  и углы установки  $\alpha$  и  $\gamma$ ) в уравнениях (2.10).

### 2.2.2 Анализ изменения цилиндрических орбит под влиянием параметров ускорения от светового давления

При проведении расчётов было обнаружено, что значение  $\xi_C$  крайне мало и зависит от множества переменных. Поэтому для упрощения  $\xi_C$  рассматривается как константа при анализе изменения цилиндрических орбит. В соответствии с уравнениями (2.9), (2.10) и (2.12), аналитическое решение цилиндрической орбиты можно также записать как:

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi'_0 \cos(\lambda + p) + \xi_2 \sin \theta + \xi_C \\ \eta(t) = \eta'_0 \sin(\lambda + p) + \eta_2 \cos \theta \\ \zeta(t) = \zeta_0 + \zeta'_1 \sin(\varphi - p) \end{cases}, \quad (2.14)$$

где

$$\tan p = \tan \alpha \sin \gamma, \quad \xi'_0 = \xi_0 \sqrt{1 + \tan^2 p}, \quad \eta'_0 = \eta_0 \sqrt{1 + \tan^2 p}.$$

Из уравнений (2.10) видно, что цилиндрические орбиты определены величиной номинального ускорения  $\kappa$  и углами установки СП  $\alpha$  и  $\gamma$ . Учитывая, что  $\sin i \approx 0$  является малой величиной, цилиндрическая орбита в основном

определяется  $\xi'_0$ ,  $\eta'_0$  и  $\zeta_0$ , однако на её также незначительно влияют  $\xi_2$ ,  $\eta_2$ ,  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ . Сравнительный анализ уравнений (2.9) и (2.14) дал следующие результаты.

1. Движения по цилиндрической орбите в направлениях  $x$  и  $y$  представляют собой суперпозицию двух периодических движений с угловыми скоростями Солнца вокруг системы Земля-Луна  $\omega_c$  и Луны вокруг Земли  $\omega_l$ . А движение в направлении  $z$  представляет собой периодическое с угловой скоростью Земли вокруг Солнца  $\omega_3$ . В результате цилиндрическая орбита приобретает приблизительно цилиндрическую форму.
2. Все амплитудные параметры цилиндрической орбиты пропорциональны величине номинального ускорения  $k$ .
3. Величины углов  $\alpha$  и  $\gamma$  влияют как на амплитудные параметры, так и на фазовый угол цилиндрических орбит. И условием для получения экстремального значения  $\zeta_0$  является:

$$\gamma_0 = 180^\circ \text{ или } 0^\circ, \alpha_0 \approx 35,26^\circ.$$

Как было отмечено ранее, в некоторых миссиях, орбиты, которые полностью левитируют над или под плоскостью орбиты Земля-Луна, могут принести значительную пользу. В данной работе нашей целью является формирование цилиндрических орбит под южным полюсом Луны для выполнения задач, как наблюдение и релейная связь между южным полюсом и Землёй. Следовательно, для определённой величины номинального ускорения  $k$  необходимо выбирать переменные управления СП  $\alpha$  и  $\gamma$  таким образом, чтобы максимизировать высоту смещения орбиты. Для цилиндрических орбит, проходящих под южным полюсом Луны, максимальная высота смещения соответствует значениям угла:

$$\gamma_0 = 180^\circ, \alpha_0 \approx 35,26^\circ. \quad (2.15)$$

Таким образом, аналитическое решение цилиндрической орбиты в окрестности точки L2 имеет вид:

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi_0 \cos \lambda + \xi_2 \sin \theta + \xi_C \\ \eta(t) = \eta_0 \sin \lambda + \eta_2 \cos \theta \\ \zeta(t) = \zeta_0 + \zeta_1 \sin \varphi \end{cases} .$$

Движение по данной орбите представляет собой совокупность двух колебательных движений с существенно различными амплитудами. Такая орбита называется квазипериодической цилиндрической орбитой.

Если заменить  $\sin i$  на 0, значения  $\xi_2$ ,  $\eta_2$  и  $\zeta_1$  в уравнении (2.10) также будут равны 0. Таким образом, аналитическое решение цилиндрической орбиты в окрестности точки L2 будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi_0 \cos \lambda + \xi_C \\ \eta(t) = \eta_0 \sin \lambda \\ \zeta(t) = \zeta_0 \end{cases} .$$

Траектория по данной орбите представляет собой плоский эллипс, подвешенный на фиксированной высоте. Такая орбита называется периодической цилиндрической орбитой.

Определим, что расстояние от ближайшей точки на цилиндрической орбите до плоскости  $хоу$  называется высотой смещения орбиты, обозначаемой как  $H^*$ . Согласно уравнениям (2.10) и (2.15), высоты смещения квазипериодической и периодической цилиндрических орбит  $H_K^*$  и  $H_\Pi^*$  составляют:

$$H_K^* = |\zeta_0| - |\zeta_1| = 0,105\kappa, \quad H_\Pi^* = |\zeta_0| = 0,121\kappa. \quad (2.16)$$

Согласно уравнению (2.16), при одинаковой величине номинального ускорения  $\kappa$  высота смещения периодической орбиты  $H_\Pi^*$  оказывается приблизительно на 14,6% выше, чем высота смещения квазипериодической орбиты  $H_K^*$ .

В таблице 2.1 приведены переменные управления СП и параметры соответствующих квазипериодической периодической цилиндрических орбиты. На рисунке 19 изображены графики соответствующих квазипериодической и периодической орбит. Стоит отметить, что расстояние в направлении  $y$

уменьшается пропорционально. Потому что амплитуда цилиндрических орбит в направлении  $y$  значительно превышает амплитуды в направлениях  $x$  и  $z$ .

Полученные результаты показывают, что при использовании переменных управления СП из таблицы 2.1 высоты смещения квазипериодической и периодической цилиндрических орбит превышают радиус Луны (1737,10 км). Таким образом, КА, двигающийся по этим орбитам, может обеспечить непрерывное прямое наблюдение на южный полюс Луны. Сравнивая обе орбиты, можно отметить, что положение КА на периодической орбите легче определить, что полезно для проектирования и выполнения миссий КА. Однако ускорение возмущения на квазипериодической орбите ниже, что выгодно для поддержания орбиты.

Таблица 2.1. Переменные управления СП и параметры соответствующих квазипериодической и периодической цилиндрических орбиты

Орбита	$\kappa$	$\alpha_0, ^\circ$	$\gamma_0, ^\circ$	$\xi_C, 10^{-4}$	$H^*, \text{ км}$
Квазипериодическая	0,06	35,26	180	-9,44	2429,14
Периодическая				-9,96	2782,66

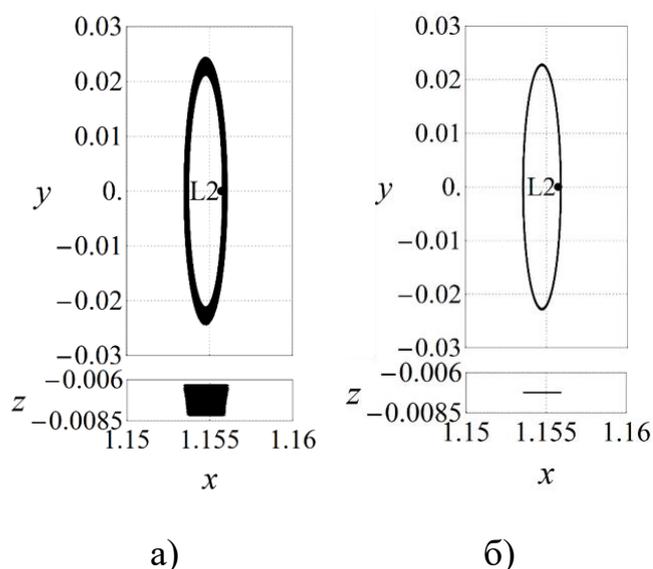


Рисунок 19 – Цилиндрические орбиты: а) квазипериодическая; б) периодическая

### 2.3 Выводы по второй главе

В данной главе рассматривается формирование искусственных орбит КА с СП в окрестности точки L2 системы Земля-Луна и получены следующие выводы:

1. Разработан метод формирования Ляпунов-конформных и гало-конформных резонансных орбит второго порядка в окрестности точки L2 на основе метода множественной стрельбы для решения двухточечной краевой задачи.
2. Проанализировано изменение геометрических характеристик резонансных орбит под влиянием изменений переменных управления СП.
3. Разработан метод формирования цилиндрической орбиты в окрестности точки L2 системы Земля-Луна на основе нахождения аналитических решений линеаризованных уравнений движения вблизи точки либрации.
4. Проанализированы изменения геометрические характеристики цилиндрических орбит под влиянием параметров ускорения от светового давления.

### 3 ПОДДЕРЖАНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

В данной главе рассматривается поддержание искусственных орбит КА с помощью управления СП. Глава состоит из двух разделов.

В первом разделе разработана методика поддержания искусственных орбит КА с использованием метода управления в скользящем режиме.

Во втором разделе показаны результаты моделирования поддержания орбит.

#### 3.1 Разработка методики поддержания искусственных орбит

В связи с приближенной заменой угла наклона лунной орбиты  $i$  и линеаризации уравнения движения при формировании искусственной периодической орбиты возникает разница между действительным ускорением, испытываемым КА, и ускорением, необходимым для движения по орбите, то есть ускорением возмущения  $\Delta \mathbf{a}$ . Это приводит к отклонению КА от сформированной орбиты. Естественные периодические орбиты позволяют КА летать автономно, поэтому для них  $\Delta \mathbf{a} = 0$ . Поскольку отклонение искусственных периодических орбит от естественных периодических орбит пропорционально величине номинального ускорения  $\kappa$ ,  $\Delta \mathbf{a}$  зависит от номинального ускорения  $\kappa$ . Было выявлено, что величина  $\Delta \mathbf{a}$  также пропорциональна величине  $\kappa$ .

Формула ускорения возмущения в СК  $oxyz$   $\Delta \mathbf{a}_B$  уже была дана в уравнении (2.11). Однако более ценным является его величина в СК  $o_c x_c y_c z_c$   $\Delta \mathbf{a}_C$ , поскольку она непосредственно связано с поддержанием и управлением СП на орбите. Обозначим номинальное ускорение возмущения в СК  $o_c x_c y_c z_c$  как

$$\Delta \bar{\mathbf{a}}_C = \Delta \mathbf{a}_C / \kappa = \begin{bmatrix} \Delta a_{Cx} & \Delta a_{Cy} & \Delta a_{Cz} \end{bmatrix}^T. \quad (3.1)$$

На рисунке 20 показаны изменений во времени компоненты номинального ускорения возмущения  $\Delta \bar{\mathbf{a}}_C$  при движении КА на резонансных и цилиндрических орбитах. В ходе моделирования было выявлено, что для резонансной орбиты изменение номинального ускорения возмущения не зависит от того, является ли она Ляпунов-конформной или гало-конформной орбитой, и не зависит от величин

начального положения Солнца  $\lambda_0$ , а лишь зависит от величины угла установки паруса  $\alpha$ . Поэтому на рисунке 20 а) и б) показаны только изменения номинального ускорения возмущения для гало-конформных резонансных орбит первой конфигурации ( $\lambda_0 = 0^\circ$ ) с величиной номинального ускорения  $\kappa = 0,008$  и углами установки паруса  $\alpha=0^\circ$  и  $\alpha=35,26^\circ$ . А для цилиндрической орбиты изменение номинального ускорения возмущения ещё зависит от того, является ли она квазипериодической или периодической орбитой. Поэтому на рисунке 20 в) и г) показаны изменения номинального ускорения возмущения квазипериодической и периодической орбит с переменными управления СП, показанными в таблице 2.1.

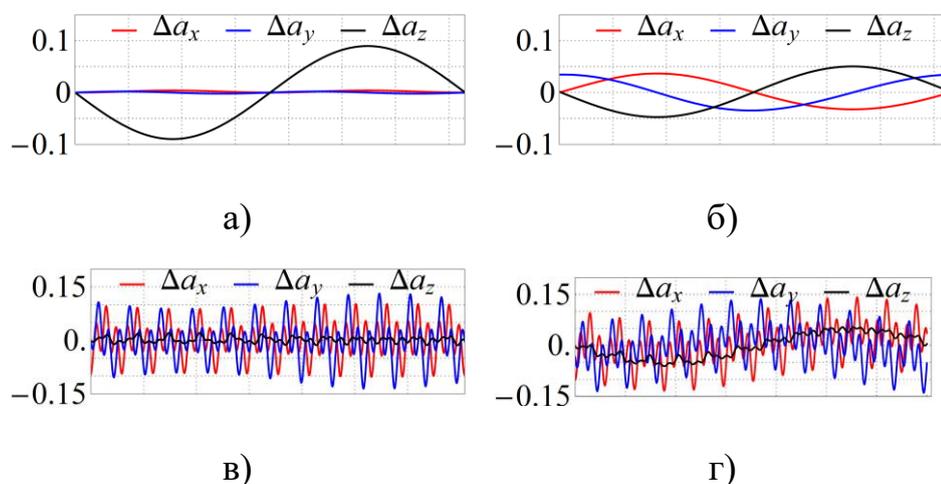


Рисунок 20 – Изменения номинального ускорения возмущения искусственных орбит

Конкретные данные диапазонов изменения компонентов номинального ускорения возмущения представлены в таблице 3.1. Чем больше диапазоны изменения ускорения возмущения, тем более сложно поддерживать орбиты.

Таблица 3.1. Диапазоны изменения компонентов номинального ускорения возмущения  $\Delta a_{Cx}$ ,  $\Delta a_{Cy}$  и  $\Delta a_{Cz}$  для искусственных орбит на рисунке 20

Орбита	Рез., $\alpha=0^\circ$	Рез., $\alpha=35,26^\circ$	Квазипер.	Пер.
$\Delta a_{Cx}$	$[-0,004;0,004]$	$[-0,037;0,037]$	$[-0,101;0,101]$	$[-0,136;0,136]$
$\Delta a_{Cy}$	$[-0,004;0,004]$	$[-0,037;0,037]$	$[-0,131;0,131]$	$[-0,136;0,136]$
$\Delta a_{Cz}$	$[-0,090;0,090]$	$[-0,047;0,047]$	$[-0,018;0,018]$	$[-0,054;0,054]$

Сравнительный анализ изменений ускорения возмущения искусственных орбит дал следующие выводы.

1. Из-за пренебрежения углом наклона  $i$ , изменение ускорения возмущения по резонансным орбитам представляет собой периодическое с угловой скоростью Земли вокруг Солнца  $\omega_3$ . А из-за пренебрежения углом наклона  $i$  и линеаризации уравнения движения, изменение ускорения возмущения по цилиндрическим орбитам представляет собой суперпозицию трёх периодических изменений с угловыми скоростями Земли вокруг Солнца  $\omega_3$ , Солнца вокруг системы Земля-Луна  $\omega_c$  и Луны вокруг Земли  $\omega_l$ .

2. Диапазоны изменения компонентов номинального ускорения возмущения  $\Delta \bar{a}_c$  резонансной орбиты с углом установки паруса  $\alpha=0^\circ$  больше, чем у резонансной орбиты с  $\alpha=35,26^\circ$ . А диапазоны изменения компонентов  $\Delta \bar{a}_c$  периодической цилиндрической орбиты больше, чем у квазипериодической цилиндрической орбиты.

Для поддержания движения КА на орбите необходимо внедрить механизмы компенсации ускорения возмущения. Световое давление на СП может использоваться в качестве управляющей силы для поддержания орбиты. Однако управление световым давлением характеризуется сильной нелинейностью и подвержено возмущениям. Для того в данной работе разработана методика поддержания орбиты на основе адаптивного управления в скользящем режиме.

Управление в скользящем режиме представляет собой метод нелинейного управления, который изменяет динамику нелинейной системы путём подачи прерывистого управляющего сигнала, который заставляет систему скользить вдоль разреза нормального поведения системы. Закон управления в скользящем режиме по состоянию не является непрерывной функцией времени; вместо этого он может переключаться с одной непрерывной структуры на другую в зависимости от текущего положения в пространстве состояний. Следовательно, управление в скользящем режиме является методом управления переменной структурой. Множество управляющих структур спроектировано таким образом, что траектории

всегда направлены к соседней области с другой структурой управления, и поэтому конечная траектория не существует полностью в пределах одной структуры управления. Вместо этого траектория скользит по границам структур управления. Движение системы в процессе скольжения по этим границам называется режимом скольжения, а геометрическое пространство, образованное границами, называется скользящей поверхностью. В контексте современной теории управления любую систему с переменной структурой, такую как система под управлением в скользящем режиме, можно рассматривать как частный случай гибридной динамической системы, так как система не только проходит через непрерывное пространство состояний, но также переходит через различные дискретные режимы управления.

В задаче поддержания орбиты требуется приложить управляющую силу к КА, чтобы состояние движения КА приближаться к состоянию движения на опорной орбите. Поэтому скользящая поверхность определяется следующим образом:

$$\mathbf{S} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 + \mathbf{\Gamma}(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_0),$$

где  $\mathbf{\Gamma}$  – положительно определённая матрица весов отклонения скорости относительно отклонения положения;  $\mathbf{r}$  – вектор положения КА;  $\mathbf{r}_0$  – вектор положения на опорной орбите.

Согласно принципу управления в скользящем режиме, необходимо создать закон управления с целью, чтобы значение скользящей поверхности  $\mathbf{S}$  стремиться к нулю. Для этого функция Ляпунова определяется в следующем виде:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{S}.$$

Для обеспечения устойчивости системы необходимо построить закон управления в скользящем режиме таким образом, чтобы вектор управляющего ускорения от светового давления в системе  $\mathbf{a}_{\text{ув}}$  равен:

$$\mathbf{a}_{\text{ув}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \nabla U(\mathbf{r}) - \mathbf{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S} + \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_0), \quad (3.2)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – положительно определённая матрица скорости сходимости. Согласно уравнению (1.5), производная функции Ляпунова оказывается равной

$$\dot{V} = \mathbf{S}^T \left[ \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{a}_{\text{yB}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \nabla U(\mathbf{r}) - \ddot{\mathbf{r}}_0) \right] = -\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{S} < 0.$$

Таким образом, функция Ляпунова является положительной, а её производная отрицательной. Это указывает на то, что система является асимптотически устойчивой. Поэтому закон управления может поддерживать движение КА на искусственной орбите.

Для установления зависимости вектора ускорения от переменных управления СП требуется выполнить преобразование  $\mathbf{a}_{\text{yB}}$  в СК  $oxyz$  в СК  $o_Cx_Cy_Cz_C$ . В соответствии с уравнением (1.12) формула для такого преобразования выглядит следующим образом:

$$\mathbf{a}_{\text{yC}} = (\mathbf{AB})^{-1} \mathbf{a}_{\text{yB}}. \quad (3.3)$$

Когда КА движется по орбите,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ . В этом случае, вектор управляющего ускорения равен:

$$\mathbf{a}_{\text{yC}} = \mathbf{a}_0 + \Delta \mathbf{a}_C,$$

где  $\mathbf{a}_0$  – ускорение, когда переменные управления СП равны начальным значениям.

Для реализации величины вектора управляющего ускорения  $\mathbf{a}_{\text{yC}}$ , определённого в уравнениях (3.2) и (3.3), в качестве переменных управления следует выбрать углы установки паруса  $\alpha$  и  $\gamma$ , а также коэффициент отражения  $u$ , чтобы система была полностью управляемой. В данном случае вектор ускорения от светового давления определяется уравнением (1.4) и выражается в СК  $o_Cx_Cy_Cz_C$  следующим образом:

$$\mathbf{a}_C = \kappa \begin{bmatrix} u \cos \alpha / 2 + (1-u) \cos^3 \alpha \\ (1-u) \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \gamma \\ (1-u) \cos^2 \alpha \sin \alpha \cos \gamma \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

и обозначим

$$\bar{\mathbf{a}}_C = \mathbf{a}_C / \kappa = \begin{bmatrix} a_{Cx} & a_{Cy} & a_{Cz} \end{bmatrix}^T.$$

Диапазон значения  $\mathbf{a}_C$  описывает способность поддержания орбиты КА с помощью управления СП. На рисунке 21 рисунке 3 представлено изображение

распределении значения  $\bar{\mathbf{a}}_C$  при всех значениях трех переменных управления  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $u$ . Среди них угол  $\gamma$  обеспечивает аксиальную симметрию распределения  $\bar{\mathbf{a}}_C$ . Поэтому на рисунке 21 представлено только поперечное сечение пространственного распределения  $\bar{\mathbf{a}}_C$ .

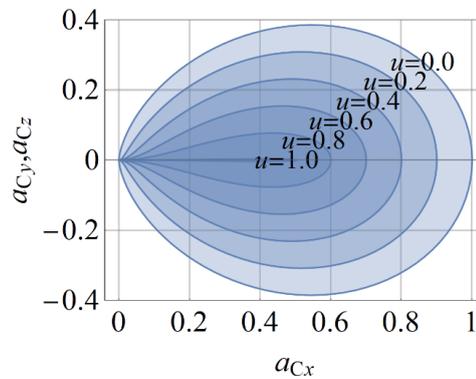


Рисунок 21 – Распределение значения  $\bar{\mathbf{a}}_C$  при всех значениях переменных управления  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $u$

Для определённой искусственной периодической орбиты КА с СП начальные значения переменных  $\alpha_0$  и  $\gamma_0$  фиксированы. Таким образом, для определения начального значения ускорения от светового давления  $\mathbf{a}_0$  при движении КА по орбите нужно лишь определить значение переменной  $u_0$ . Критерием эффективности разработанного закона управления, отвечающего требованиям поддержания орбиты, является условие, что значение  $\mathbf{a}_0 + \Delta\mathbf{a}_C$  присутствует в распределении внутри допустимого диапазона  $\mathbf{a}_C$  во всех направлениях. Учитывая избыточность, необходимую для обеспечения определённого уровня управления, согласно таблице 3.1 и рисунку 21 для разных искусственных периодических орбит набор возможных значений  $u_0$  показан в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Набор начальных значений  $u_0$  для разных искусственных периодических орбит

Типа орбит	Рез., $\alpha=0^\circ$	Рез., $\alpha=35,26^\circ$	Квазипер.	Пер.
$u_0$	0,05	0,15	0,1	0,2

Согласно уравнению (3.4) при поддержании орбит изменение величин переменных уравнения СП  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $u$  можно определить следующим уравнениям:

$$\alpha = \alpha \left| (2 \cos^2 \alpha - 1) \sqrt{a_{Cy}^2 + a_{Cz}^2} + \cos^2 \alpha \sin \alpha - 2a_{Cx} \cos \alpha \sin \alpha = 0, \right.$$

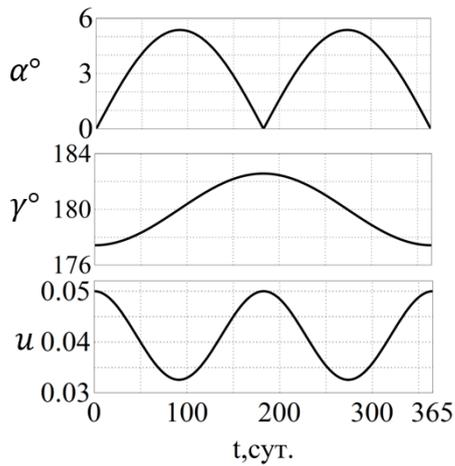
$$\left. \gamma = \tan^{-1} \frac{a_{Cy}}{a_{Cz}}, u = 1 - \frac{\sqrt{a_{Cy}^2 + a_{Cz}^2}}{\cos^2 \alpha \sin \alpha}. \right. \quad (3.5)$$

### 3.2 Моделирование поддержания искусственных орбит

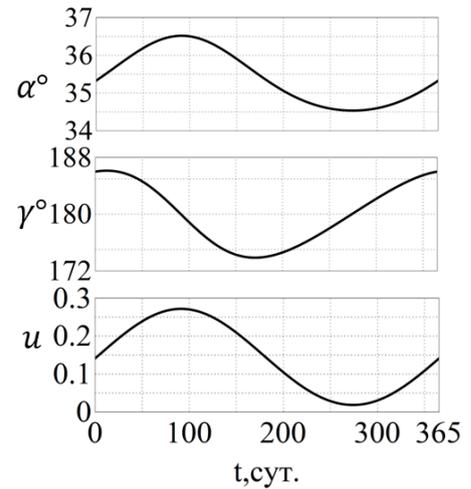
В ходе управления КА с СП в соответствии с управляющим законом, полученным в уравнении (3.5), изменения переменных управления СП отображены на рисунке 22.

Сравнительный анализ изменений переменных управления СП в процессе поддержания искусственных орбит дал следующие выводы.

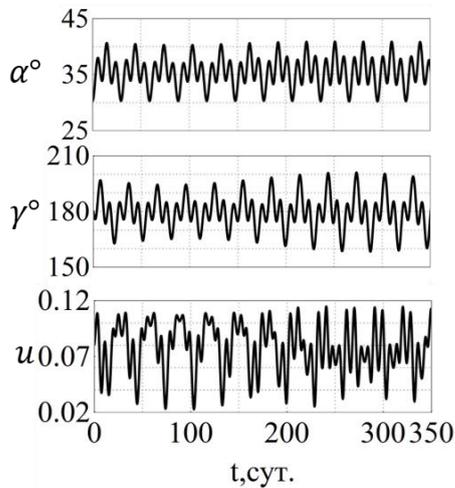
1. Изменения переменных управления СП с целью компенсации ускорения возмущения ограничены в пределах допустимого диапазона конструкции. Это подчёркивает эффективность разработанного закона управления в скользящем режиме и метода определения начального значения переменной  $u_0$  с помощью анализа распределения  $\bar{\mathbf{a}}_C$ .
2. Для резонансных орбит при увеличении величины угла установки паруса от  $\alpha = 0^\circ$  до  $\alpha = 35,26^\circ$  диапазон изменения коэффициента отражения  $u$  значительно расширяется. Это указывает на то, что с увеличением угла  $\alpha$  возрастают требования к системе регулировки отражательной способности СП, что может негативно сказаться на работоспособности СП.
3. На квазипериодической цилиндрической орбите диапазон изменений переменных управления СП  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $u$  существенно меньше, чем на периодической цилиндрической орбите. Это указывает на то, что квазипериодическая орбита представляет собой более предпочтительный выбор по сравнению с периодической орбитой с точки зрения сложности поддержания орбиты.



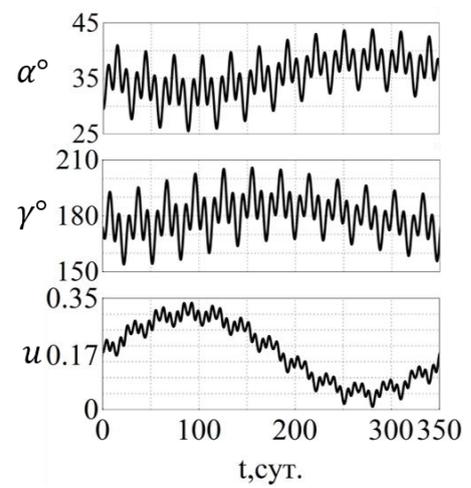
а)



б)



в)



г)

Рисунок 22 – Изменения переменных управления СП в процессе поддержания орбит КА: а) для резонансной орбиты с углом установки  $\alpha_0 = 0^\circ$ ; б) для резонансной орбиты с углом установки  $\alpha_0 = 35,26^\circ$ ; в) для квазипериодической цилиндрической орбиты; г) для периодической цилиндрической орбиты

### 3.3 Выводы по третьей главе

В данной главе поддержание искусственных орбит КА с помощью управления СП и получены следующие выводы:

1. Разработаны метод поддержания орбит КА с СП на основе управления в скользящем режиме и метод определения начального значения переменной.
2. Проведено моделирование управления СП при поддержании орбит.

## 4 ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ВЫВЕДЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ НА ИСКУССТВЕННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ

В данной главе рассматриваются управление выведением КА с естественных орбиты гало или Ляпунова на искусственные орбиты с помощью управления СП. Глава состоит из трёх основных разделов.

В первом разделе разработаны методики и вычислительные процедуры оптимизации управления выведением КА с СП на искусственные резонансные и цилиндрические орбиты. В первом и втором подразделах поставлены задачи оптимизации с критериями максимизации точности выведения на орбиты (мак-ТВ) и с критериями минимизации времени перелёта (мин-ВП). Во третьем подразделе разработаны методики решения задачи об оптимальном быстродействии выведения КА с СП на орбиты с использованием решения задачи об мак-ТВ в качестве начального приближения.

Во второй разделе проведены моделирования выведения КА с СП на резонансные орбиты, проанализированы влияния начальных условий на минимальную длительность выведения, и получены оптимальные начальные условия для оптимального быстродействия и минимальное время полёта.

В третьей разделе проведены моделирования выведения КА с СП на цилиндрические орбиты, и проанализированы влияния начальных условий на минимальную длительность выведения, и получены оптимальные начальные условия для оптимального быстродействия и минимальное время полёта.

### 4.1 Разработка алгоритма оптимизации управления

После формирования искусственных орбит КА с СП возникла необходимость разработки задачи выведения на эти орбиты. Эта задача представляет собой двухточечную краевую задачу, которая заключается в поиск решения уравнения СП, соответствующего целям оптимизации, с учётом граничных условий и динамических уравнений.

Для традиционных КА, использующих химические ракеты и ионные двигатели, основными целями оптимизации являются минимизация времени перелёта, расхода топлива или импульса. В отличие от них, КА с СП учитывают расход топлива или импульс, так как КА с СП могут получить практически неограниченный импульс от светового давления в пределах солнечной системы. В большинстве случаев целью оптимизации управления СП для перелёта КА является минимизация времени перелёта. Однако, у КА с СП низкая тяговооруженность: она значительно меньше, чем у КА с химическими ракетами или ионными двигателями. Поэтому время перелёта для КА с СП значительно больше. Например, минимальное время для покидания из гравитационного поля Земли с геостационарной орбиты с помощью СП с современной уровнем технологий, составляет около восьми месяцев [78]. Из-за длительного времени перелёта и особенностей движения КА с СП, таких как высокая нелинейность, множество влияющих факторов и сложные траектории, сложно найти подходящее начальное приближение для задачи с целью минимизации времени перелёта. Однако задачу с целью максимизации точности выведения на орбиту можно решить с простого начального приближения. Поэтому в диссертации решение задачи о максимальной точности используется как начальное приближение для задачи об оптимальном быстродействии.

#### 4.1.1 Оптимизация управления с критерием максимизации точности выведения на орбиты

В отличие от оптимизации управления с критерием мин-ВП, преимущество оптимизации управления с критерием мак-ТВ заключается в возможности связать короткий пассивный полёт на естественной орбите с длительным управляемым полётом с помощью итерации.

СП, используемый в оптимизации управления, имеет устройство с регулируемой отражательной способностью, и его динамическая модель описывается уравнением (1.4). Вместе с уравнением (1.5) это приводит к следующему уравнению движения для КА с СП:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{a}, t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + \mathbf{a}_{\text{CB}}(\mathbf{a}, t) \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r}), \mathbf{h}(\mathbf{v}) = -2\boldsymbol{\omega}_{\text{Л}} \times \mathbf{v}, \mathbf{a}_{\text{CB}}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{a}_c(\mathbf{a}).$$

где  $\mathbf{X}$  – вектор состояния движения КА;  $\mathbf{a} = [\alpha \ \gamma \ u]^T$  – вектор управляющих переменных СП;  $\mathbf{a}_c(\mathbf{a})$  – ускорение от светового давления, описанное в СК  $o_C x_C y_C z_C$ , выражение которого представлено в уравнении (3.4);  $\mathbf{A}(t)$  и  $\mathbf{B}(t)$  – матрицы преобразования координат показанные в уравнениях (1.8) и (1.11).

Положение целевой точки на искусственных орбитах зависит от положения Солнца и времени начала движения. Следовательно, задача выведения КА с СП на искусственные орбиты включает в себя и задачу фазирования. С изменением времени перелёта меняется и положение целевой точки на искусственной орбите. Таким образом, целевая функция задачи оптимизации управления с критерием макс-ТВ определяется следующим образом:

$$J_{\text{макс-ТВ}} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{D} \left[ \mathbf{X}(t_f) - \mathbf{X}_f(t_f) \right] \right)^2,$$

где  $\mathbf{X}_f(t)$  – вектор состояния движения целевой точки на искусственной орбите;  $\mathbf{D}$  – диагональная матрица, используемая для учёта весов различных компонентов состояния движения;  $t_f$  – конечный момент времени. В данной работе значение выбрано  $\mathbf{D} = \text{diag}(3700, 3700, 3700, 1, 1, 1)$ , чтобы отклонение положения на 1 м имеет такой же вес, как и отклонение скорости на 1 см/с в безразмерной форме, и отклонения в направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$  имеют одинаковые веса.

Согласно принципу максимума Понтрягина, можем определить соответствующий гамильтониан и дифференциальные уравнения сопряжённых переменных следующим образом:

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}_v^T \left[ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + \mathbf{a}_{\text{CB}}(\mathbf{a}, t) \right],$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = -\frac{\partial \mathbf{g}^T(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \boldsymbol{\lambda}_v, \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\boldsymbol{\lambda}_r - \frac{\partial \mathbf{h}^T(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \boldsymbol{\lambda}_v.$$

где  $\lambda_r$  и  $\lambda_v$  – векторы сопряжённых переменных соответствующие векторы перемещения  $\mathbf{r}$  и скорости  $\mathbf{v}$ . Следовательно, решение задачи оптимизации управления с критерием мак-ТВ эквивалентно решению следующего дифференциального уравнения:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\lambda}_r \\ \dot{\lambda}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + \mathbf{a}_{\text{CB}}(\mathbf{a}, t) \\ -\frac{\partial \mathbf{g}^T(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \lambda_v \\ -\lambda_r - \frac{\partial \mathbf{h}^T(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \lambda_v \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Здесь фиксируем конечный момент времени  $t_f$  для получения закона оптимального управления СП. Следовательно, задача оптимизации с критерием мак-ТВ имеет свободные граничные условия, фиксированное время и целевую функцию конечного значения. Таким образом, её граничные условия могут быть записаны как:

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \begin{bmatrix} \lambda_r(t_f) \\ \lambda_v(t_f) \end{bmatrix}^T = \mathbf{D} [\mathbf{X}(t_f) - \mathbf{X}_f(t_f)]. \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{X}_0$  – вектор состояния движения КА в начальный момент  $t_0$ .

Согласно уравнению (4.1), условие получения экстремального значения Гамильтониана  $H^*$  эквивалентно условию получения экстремального значения следующего уравнения  $\mathbf{a}^*$

$$\lambda_v^T \mathbf{a}_{\text{CB}}(\mathbf{a}^*, t) = \lambda_v^T \mathbf{A}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{a}_c(\mathbf{a}^*) = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{a}_c(\mathbf{a}^*),$$

где

$$\boldsymbol{\eta}^T = \lambda_v^T \mathbf{A}(t) \mathbf{B}(t) = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3]^T.$$

С учётом уравнения (3.4), формулы определения компонентов  $\mathbf{a}^* = [\alpha^* \quad \gamma^* \quad u^*]^T$  предоставляет собой следующие

$$\gamma^* = \tan^{-1} \frac{\eta_2}{\eta_3}, u^* = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2} \text{sign}(S) + \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2},$$

$$\alpha^* = \alpha \left| \min \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{a}_C(\alpha, \gamma^*, u^*), \right. \quad (4.4)$$

$$S = \frac{\eta_1}{2} \cos \alpha - \cos^2 \alpha (\eta_1 \cos \alpha + \eta_2 \sin \alpha \sin \gamma^* + \eta_3 \sin \alpha \cos \gamma^*).$$

где  $u_{\max}$  и  $u_{\min}$  – максимальное и минимальное значения коэффициента отражения соответственно. В данной работе значение выбрано  $u_{\min} = 0$ , то есть поверхность паруса достигает состояния зеркального отражения. Значение  $u_{\max}$  выбирается исходя из максимального значения  $u$  при поддержании орбиты. Согласно с результатом, показанным на рисунке 22, можно выбрать  $u_{\max} = 0,06$  для резонансной орбиты с параметром  $\alpha_0 = 0^\circ$ ;  $u_{\max} = 0,35$  для резонансной орбиты с параметром  $\alpha_0 = 35,26^\circ$ ;  $u_{\max} = 0,15$  для квазипериодической цилиндрической орбиты;  $u_{\max} = 0,4$  для квазипериодической цилиндрической орбиты.

#### 4.1.2 Оптимизация управления с критерием минимизации времени перелёта

Решение задачи оптимизации управления с критерием мин-ВП является конечной целью миссии по выведению КА с СП на искусственные орбиты. После получения решения задачи оптимизации управления с критерием мак-ТВ она можно быть легко решена, используя решение с критерием мак-ТВ в качестве начального приближения. Дифференциальные уравнения в этой задаче аналогично уравнению (4.1). А её целевая функция определяется следующим образом:

$$J_{\text{мин-ВП}} = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt.$$

Согласно принципу максимума Понтрягина, можем определить соответствующий гамильтониан и дифференциальные уравнения сопряжённых переменных следующим образом:

$$H = \lambda_r^T \mathbf{v} + \lambda_v^T [\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + \mathbf{a}_{\text{CB}}(\boldsymbol{\alpha}, t)] + 1,$$

$$\dot{\lambda}_r = -\frac{\partial \mathbf{g}^T(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \lambda_v, \quad \dot{\lambda}_v = -\lambda_r - \frac{\partial \mathbf{h}^T(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \lambda_v.$$

Следовательно, решение задачи оптимизации управления с критерием мак-ВП эквивалентно решению следующего дифференциального уравнения:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\lambda}_r \\ \dot{\lambda}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + \mathbf{a}_{\text{CB}}(\boldsymbol{\alpha}, t) \\ -\frac{\partial \mathbf{g}^T(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \lambda_v \\ -\lambda_r - \frac{\partial \mathbf{h}^T(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \lambda_v \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

При решении задач оптимизации управления с критерием мин-ВП конечный момент времени  $t_f$  изменяется. Поскольку положение КА с СП на его орбите изменяется во времени, задача оптимизации с критерием мин-ВП имеет ограниченные граничные условия, свободное время и целевую функцию интегрального значения, поэтому её граничные условия и условия трансверсальности могут быть записаны как:

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \quad \mathbf{X}(t_f) = \mathbf{X}_f(t_f),$$

$$H(t_f) = -\lambda_r^T(t_f) \dot{\mathbf{r}}_f(t_f) + \lambda_v^T(t_f) \dot{\mathbf{v}}_f(t_f). \quad (4.6)$$

Условие получения экстремального значения Гамильтониана  $H^*$  те же, что и в формулах (4.4).

#### 4.1.3 Методика решения задачи выведения космического аппарата с солнечным парусом на орбиты

В данной работе для решения двух вышеуказанных задачи оптимизации разработаны методики, сочетающие метод коллокации и метод численного продолжения. Особенность методик заключается в том, что не требуется высокая точность в начальном приближении, что делает методики подходящими для решения сложных нелинейных систем с небольшим числом известных условий.

##### 1. Метод коллокации

По сравнению с традиционным дифференциальным методом, метод коллокации обладает преимуществами высокой точности вычислений и стабильности при решении нелинейных задач оптимизации. Метод коллокации в математике представляет собой численный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и интегральных уравнений [79]. Его суть заключается в выборе конечномерного пространства возможных решений (как правило, полиномов определённой степени) и точек в области, называемых точками коллокации. Затем выбирается решение, которое удовлетворяет уравнению в этих точках. Основной принцип метода коллокации заключается в следующем.

Предположим, что система описывается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \\ \Psi[\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_f)] &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Нужно решить его на интервале времени  $[t_0, t_0 + c_k h]$ . Выбирается  $c_k$  из  $0 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_n \leq 1$ .

Соответствующий полиномиальный метод коллокации аппроксимирует решение  $\mathbf{y}$  с помощью полинома  $\mathbf{p}$  степени  $n$ , который удовлетворяет начальному условию  $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{y}_0$  и дифференциальному уравнению  $\dot{\mathbf{p}}(t_k) = \mathbf{f}(t_k, \mathbf{p}(t_k))$  во всех точках коллокации  $t_k = t_0 + c_k h$ , где  $k = 1, \dots, n$ . Это обеспечивает  $n + 1$  условий, что соответствует  $n + 1$  параметрам, необходимым для определения полинома данной степени  $n$ .

Все эти методы коллокации, по существу, являются неявными методами Рунге-Кутты. Коэффициенты  $c_k$  в таблице Батчера метода Рунге-Кутты служат точками коллокации. Однако следует отметить, что не все неявные методы Рунге-Кутты являются методами коллокации [80].

MATLAB теперь включает программу для решения двухточечной краевой задачи, известную как `bvp4c` [81] [82]. Эта функция обеспечивает быструю настройку и численное решение двухточечной краевой задачи. Функция `bvp4c`

реализована как конечно-разностный код, использующий трёхэтапную формулу Лобатто Ша. Метод этой функции основан на формуле коллокации, а используемый полином коллокации обеспечивает C1-непрерывное решение с точностью четвертого порядка равномерно в интеграле  $[t_0, t_1]$ . При выборе сетки и контроле погрешности учитывается остаток непрерывного решения.

Функция `bvp4c` выполняет интегрирование системы дифференциальных уравнений, описываемой формулой (4.7), где  $\mathbf{y}$  включает переменные состояния, переменные сопряжённые и переменные управления.

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)]^T. \quad (4.8)$$

Функция `bvp4c` способна также работать с неизвестными параметрами в дифференциальных уравнениях. Например, если  $\mathbf{q}$  является вектором неизвестных параметров, то задача может быть сформулирована следующим видом:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{q}), \quad \Psi[\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_f), \mathbf{q}] = 0. \quad (4.9)$$

В контексте задачи оптимизации управления СП для перелёта КА классическим примером неизвестного параметра может быть конечный момент времени  $t_f$ .

## 2. Метод численного продолжения

Метод численного продолжения широко применяется в изучении хаотических динамических систем и других систем, относящихся к области теории катастроф [83], [84]. Их использование обусловлено тем, что различные нелинейные динамические системы проявляют детерминированное и предсказуемое поведение в определённом диапазоне параметров, включённых в уравнения системы. Однако при достижении определённого значения параметра система начинает проявлять хаотическое поведение. В связи с этим возникает необходимость отслеживания параметра, чтобы определить моменты, когда система начинает вести себя непредсказуемо, и выяснить, что именно делает систему неустойчивой. Исследование с использованием этих методов позволило обнаружить устойчивые

многообразия и бифуркации к инвариантным торам в случае ограниченной задачи трех тел в ньютоновской гравитации.

В методе численного продолжения на вход подаются параметризованное нелинейное уравнение системы, и также начальное решение  $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$  и  $F(\mathbf{X}_0, \lambda_0) = 0$ . Затем генерируется набор точек на компоненте решения  $\Gamma(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$ . Для конкретного значения параметра  $\lambda_0$  отображение многократно применяется к начальному приближению  $\mathbf{X}_0$ . Если метод сходится и непротиворечив, то в пределе итерация приближается к решению  $F(\mathbf{X}, \lambda) = 0$ . Решение при одном значении параметра  $\lambda$  используется как начальное приближение для решения при другом значении параметра  $\lambda + \Delta\lambda$ . При достаточно малом шаге итерации  $\Delta\lambda$ , применённой к начальному приближению, она должна сходиться.

Одним из преимуществ метода продолжения является его способность использовать метод решения задачи в виде "черного ящика". Все, что требуется, это предоставить начальное решение. Было выполнено множество работ в области крупномасштабного продолжения, применяющих более сложные алгоритмы к "черным ящикам" решателей.

В алгоритме численного продолжения для решения задачи оптимизации управления СП для выведения КА на искусственные орбиты применены следующие этапы:

1) Установка начального приближения.

На начальной орбите (естественной орбите) выбираются времена  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_f$ , и обозначаются соответствующие векторы состояния движения как  $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_f$ .

2) Расчёт траектории с методом численного продолжения (ЧП) по величине номинального ускорения  $k$ .

Так как в начальный момент КА находится на естественной орбит, то соответствующее номинальное ускорение  $k=0$ . Чтобы плавно перейти от траектории пассивного движения к траектории активного движения с конечным

номинальным ускорением  $\kappa_{\max}$ , номинальное ускорение  $\kappa$  в процессе продолжения задаётся следующим образом:

$$\kappa = e\kappa_{\max},$$

где  $e$  постепенно увеличивается от 0 до 1 в процессе продолжения.

На данном этапе проводится решение задачи оптимизации с критерием макс-ТВ, описанной уравнениями (4.2), (4.3) и (4.4), при фиксированном конечном времени  $t_f$  с помощью метода коллокации. В процессе численного продолжения номинального ускорения  $\kappa$  решение, полученное на предыдущем шаге итерации, используется в качестве нового начального приближения для следующего шага расчёта. Когда  $e = 1$ , данная этапа расчёта завершается. Окончательная траектория КА, полученная на этом этапе, является траекторией, на которой вектор состояния в конечный момент  $\mathbf{X}(t_f)$  наиболее близок к вектору состояния на целевой орбите  $\mathbf{X}_f(t_f)$ .

3) Расчёт траектории с методом ЧП по конечному времени перелёта  $t_f$ .

В ходе реального расчёта было установлено, что если значение конечного момента  $t_f$ , выбранное на предыдущем этапе, превышает требуемое конечное время, то полученная траектория перелёта КА становится хаотичной. Для предотвращения подобной ситуации обычно выбирать относительно небольшое значение  $t_f$  на предыдущем этапе. Следовательно, в конце предыдущего этапа  $J_{\text{мак-ТВ}} \gg 0$ . Для дальнейшего приближения  $J_{\text{мак-ТВ}}$  к нулю, а именно для приближения  $\mathbf{X}(t_f)$  к  $\mathbf{X}_f(t_f)$ , требуется использовать метод численного продолжения для постепенного увеличения  $t_f$  на этом этапе расчёта.

$$t_f = t_f + \Delta t, \quad (4.10)$$

где  $\Delta t$  – размер шага в методе численного продолжения, который может изменяться в зависимости от требуемой точности и скорости вычислений.

На данном этапе проводится решение задачи оптимизации с критерием макс-ТВ при увеличении времени  $t_f$  с помощью метода коллокации. В процессе ЧП

конечного момента времени  $t_f$  решение, полученное на предыдущем шаге итерации, используется в качестве нового начального приближения для следующего шага расчёта. Когда значение целевой функции становится достаточно малым  $J_{\text{мак-ТВ}} < \varepsilon$ , данная этапа расчёта завершается.

4) Расчёт траектории задачи оптимизации управления с критерием мин-ВП.

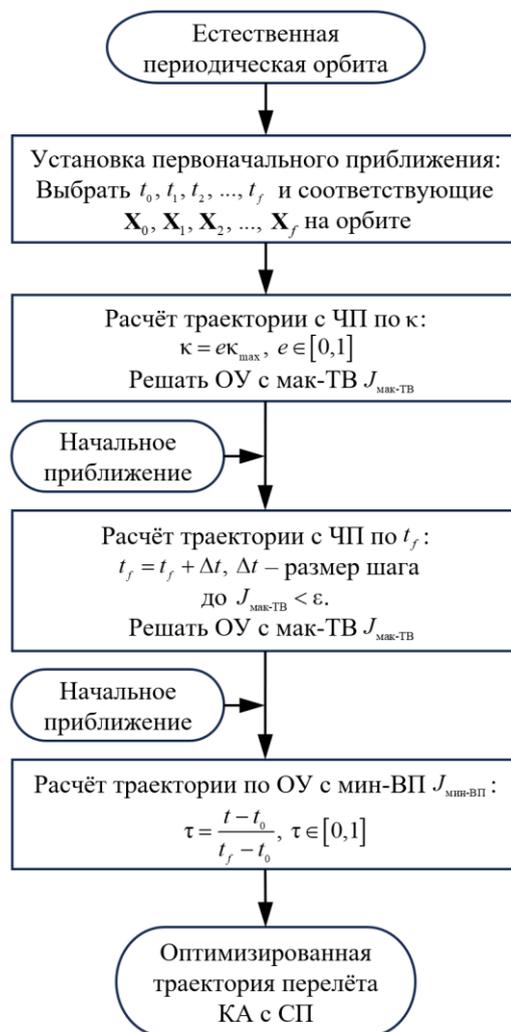


Рисунок 23 – Блок-схема алгоритма для решения задачи оптимизации управления (ОУ) СП для перелёта КА на искусственную орбиту

В ходе реального расчёта было установлено, что невозможно получить решение задачи оптимизации управления с критерием мин-ВП путём увеличения времени  $t_f$  в предыдущем шаге. На самом деле, в определённом широком диапазоне значений  $t_f$  метод продолжения позволяет достичь остаточного малого значения  $J_{\text{мак-ТВ}}$ . Поэтому на данном этапе решение, полученное в предыдущей этапе используется в качестве начального приближения для решения задачи

оптимизации управления с критерием мин-ВП, описанной уравнениями (4.5), (4.6) и (4.4). Поскольку в задаче оптимизации управления с критерием мин-ВП конечный момент времени  $t_f$  является переменной, параметр времени перелёта в дифференциальных уравнениях и граничных условиях необходимо преобразовать на переменную  $\tau$ , чтобы адаптироваться к требованиям решателя функций bvp4c:

$$\tau = \frac{t - t_0}{t_f - t_0} \in [0, 1].$$

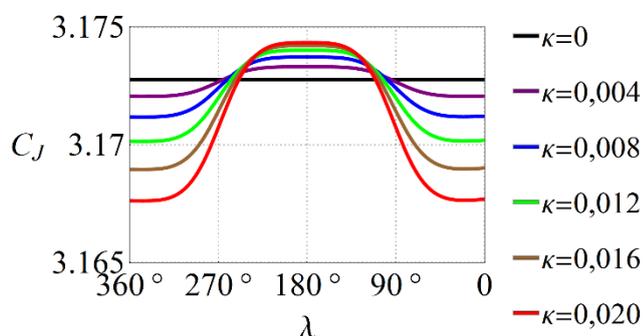
Блок-схема алгоритма ЧП, описанного этапами от 1) до 4) представлена на рисунке 23.

#### 4.2 Задача выведения космического аппарата с солнечным парусом на резонансные орбиты

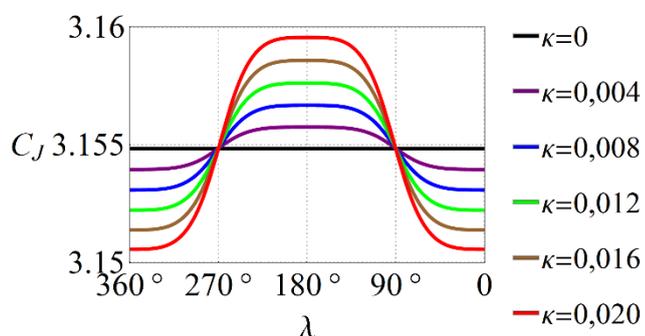
В данном разделе произведён анализ оптимизации управления выведением КА с СП на резонансные орбиты 2-го порядка. Основное внимание уделено изменениям управляющих переменных СП от времени и влияющими параметрами на минимальную длительность выведения КА. В данной работе начальные положения КА находятся на естественных периодических орбитах, включая орбиты Ляпунова и гало-орбиты вблизи точки либрации L2 системы Земля-Луна. С одной стороны, данные орбиты близки к резонансным орбитам и имеют аналогичные конфигурации, и с другой стороны, они обеспечивают низкоэнергетические перелёты из окрестностей Земли в точку либрации L2 через инвариантные многообразия. А искусственные периодические орбиты, сформированные под воздействием светового давления, включая резонансные орбиты и цилиндрические орбиты, не имеют инвариантных многообразий. Таким образом, естественные периодические орбиты могут использоваться в качестве опорных орбит для перелёта на искусственные периодические орбиты. Исследования в данном разделе направлены на выбор нескольких ключевых факторов, влияющих на оптимизации управление выведением, включая энергия опорной орбиты, разница фазового положения между КА и целевой точкой, и начальное фазовое положение КА на опорной орбите.

#### 4.2.1 Влияние энергии опорной орбиты на минимальную длительность выведения

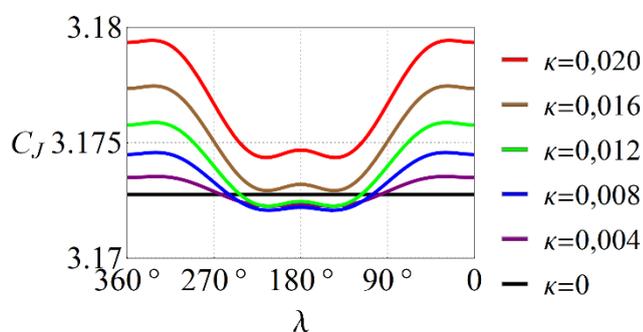
Энергия состояния КА и орбиты определяется значением интеграла Якоби, выраженного в уравнении (1.6). На рисунке 24 показаны изменения интеграла Якоби  $C_J$  с фазовым углом Солнца  $\lambda$  для резонансных орбит второго порядка с различными величинами номинального ускорения  $\kappa$  и постоянной величиной угла установки паруса  $\alpha=0^\circ$ . Определение фазового угла  $\lambda$  уже дано в уравнении (2.1). Он представляет собой угол в плоскости  $z=0$ . На рисунке 25 показаны изменения интеграла Якоби  $C_J$  с фазовым углом Солнца  $\lambda$  для резонансных орбит второго порядка с постоянной величиной номинального ускорения  $\kappa=0,008$  и различными величинами угла установки паруса  $\alpha$ . Как и в подразделе 2.1.2, рисунки (а) и (б) соответствуют Ляпунов-конформным и гало-конформным орбитам первой конфигурации, и (в) и (г) соответствуют Ляпунов-конформным и гало-конформным орбитам второй конфигурации.



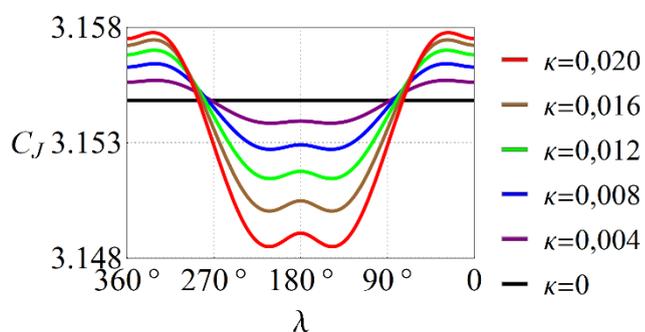
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 24 – Изменения интеграла Якоби  $C_J$  с фазовым углом Солнца  $\lambda$  для резонансных орбит второго порядка с различными величинами номинального ускорения  $k$  и постоянной величиной угла установки паруса  $\alpha=0^\circ$

Полученные результаты показывают, что

1. Диапазон изменения интеграла Якоби резонансных орбит расширяется с увеличением величины номинального ускорения  $k$ .

2. Интеграл Якоби резонансных орбит первой конфигурации достигает минимального значения около  $\lambda=0^\circ$  и максимального значения около  $\lambda=180^\circ$ . Интеграл Якоби  $C_J$  резонансных орбит второй конфигурации достигает минимального значения около  $\lambda=180^\circ$  и максимального значения около  $\lambda=0^\circ$ .

3. Среднее значение интеграла Якоби  $C_J$  уменьшается с увеличением величины номинального ускорения  $k$  для Ляпунов-конформных орбит первой конфигурации и гало-конформных орбит второй конфигурации, увеличивается для Ляпунов-конформных орбит второй конфигурации, и остаётся постоянным для гало-конформных орбит первой конфигурации.

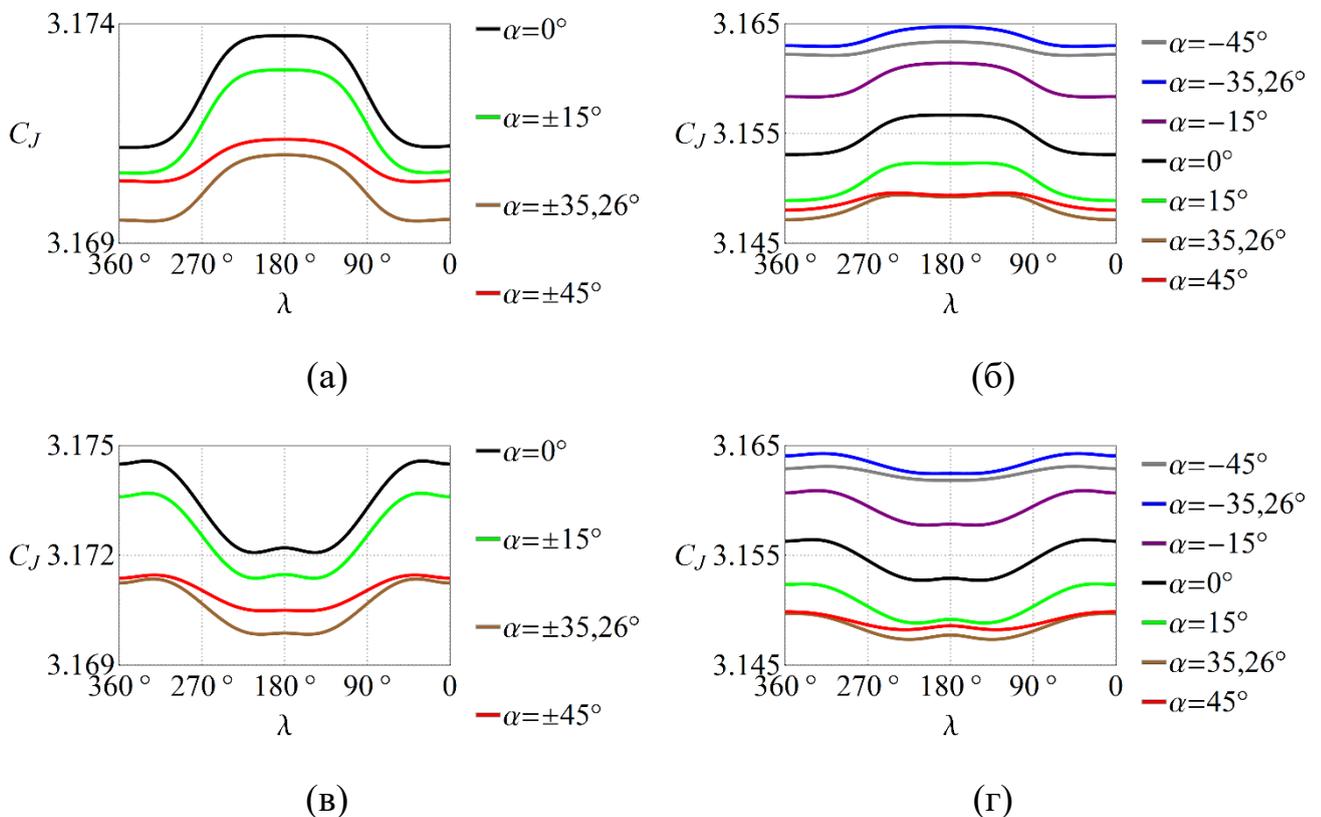


Рисунок 25 – Изменения интеграла Якоби  $C_J$  с фазовым углом Солнца  $\lambda$  для резонансных орбит второго порядка с постоянной величиной номинального ускорения  $\kappa=0,008$  и различными величинами угла установки паруса  $\alpha$

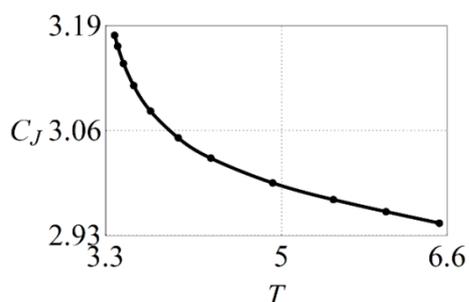
Полученные результаты показывают, что

1. Интегралы Якоби для Ляпунов-конформных орбит с углами установки  $\alpha$  и  $-\alpha$  оказываются равными. Интегралы Якоби для гало-конформных орбит с углами установки  $\alpha$  и с  $-\alpha$  оказываются симметричными относительно интеграла Якоби  $C_J$  орбиты с углом установки  $\alpha=0^\circ$ .

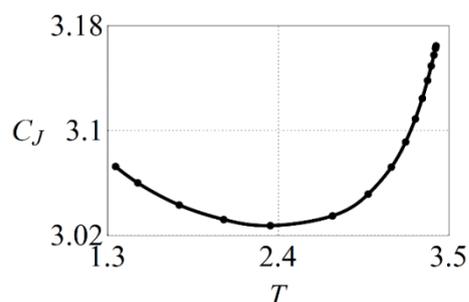
2. Максимальное отличие интеграла Якоби резонансных орбит с различными величинами угла установки  $\alpha$  от интеграла Якоби  $C_J$  орбиты с  $\alpha=0^\circ$  достигается при  $\alpha=35,26^\circ$ .

3. При увеличении абсолютного значения угла установки  $\alpha$  диапазон изменения интеграла Якоби резонансной орбиты уменьшается.

Как видно из рисунка 24, из-за отсутствия негравитационных сил интеграл Якоби остаётся постоянным для естественных периодических орбит ( $\kappa=0$ ). На рисунке 26 представлено изменения интеграла Якоби  $C_J$  с периодом орбиты  $T$  для орбит Ляпунова и гало-орбит вблизи точки L2 системы Земля-Луна. Среди них рисунок (а) соответствует орбитам Ляпунова, а рисунок (б) соответствует гало-орбитам.



(а)



(б)

Рисунок 26 – Изменения интеграла Якоби  $C_J$  с периодом орбит  $T$  для орбит Ляпунова и гало-орбит вблизи точки L2 системы Земля-Луна

Из рисунка 26 видно, что интеграл Якоби  $C_J$  орбит Ляпунова уменьшается с увеличением периода орбиты  $T$ , а интеграл Якоби гало-орбит сначала

уменьшается потом увеличивается с увеличением периода орбиты  $T$ . В диапазоне 3,14...3,18 рассматриваемых резонансных орбит 2-го порядка, изображённых на рисунке 24 и рисунке 25, интеграл Якоби  $C_J$  орбит Ляпунова уменьшается со скоростью  $\frac{\Delta C_J}{\Delta T} \approx -0,2535$ , а интеграл Якоби  $C_J$  гало-орбит увеличивается со скоростью около  $\frac{\Delta C_J}{\Delta T} \approx 0,5070$ .

Для выбора опорной орбиты сначала надо определить диапазон изменения интеграла Якоби целевой резонансной орбиты по рисунку 24 или рисунку 25, затем найти орбиту Ляпунова или гало с определённой разностью интеграла Якоби относительно целевой орбиты по рисунку 26.

В задаче фазирования для описания фаз КА и целевой точкой вводится фазовый угол  $\vartheta$ . Угол  $\vartheta$  определяется аналогично фазовому углу Солнца  $\lambda$ , но исходная точка становится точкой L2. Его можно определить по следующей формуле

$$\sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \vartheta = \frac{x - x_{L2}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

где  $x_{L2}$  – координат точки L2 по направлению  $ox$  в СК  $oxyz$ . Причина выбора точки L2 в качестве исходной точки заключается в том, что для резонансных орбит и естественных периодических орбит, точка L2 служит как точкой механического равновесия, так и геометрическим центром. она является геометрическим центром.

В результате выведения КА с СП на искусственные орбиты интеграл Якоби  $C_J$  и фазовый угол  $\vartheta$  КА совпадают с теми у целевой точки на искусственных орбитах. Таким образом, путём анализа изменений интегралов Якоби  $C_J$  и фазовых углов  $\vartheta$  КА и целевой точки можно получить характеристики процесса выведения.

Разница в значениях  $C_J$  двух орбит определяет различие в энергии между орбитами и, в случае схожих форм двух орбит (например, естественных орбит и конформных резонансных орбит), определяет близость двух орбит по положению. Для анализа влияния интеграла Якоби  $C_J$  опорной орбиты на оптимизацию

управления выведением на резонансную орбиту проведены моделирования перелёты с использованием гало-конформной резонансной орбиты первой конфигурации с  $\kappa=0,008$  и  $\alpha=0^\circ$  в качестве целевой орбиты, и гало-орбит с различными интегралами Якоби  $C_J$  в качестве опорных орбит. Пусть в начальный момент фазовые углы целевой точки и положения КА на опорной орбите равны  $\vartheta = 0^\circ$ .

В таблице 4.1 показаны параметры опорных орбит, целевой орбиты, КА и целевой точки. Поскольку положение КА с СП на искусственной периодической орбите зависит от положения Солнца, после определения начального фазового угла целевой точки  $\vartheta_0$  определяется также начальный фазовый угол Солнца  $\lambda_0$ . Максимальное ускорение от светового давления для КА с СП определяется таким же, как номинальное ускорение резонансной орбиты  $\kappa$ . На рисунке 27...рисунке 29 представлены результаты моделирований оптимизации управления выведением с использованием гало-орбит с интегралами  $C_J = 3,14519$ ,  $C_J = 3,15484$  и  $C_J = 3,16447$  соответственно в качестве опорных орбит. На изображениях (а) на рисунке 27...рисунке 29 показаны целевые орбиты, опорные орбиты и перелётные траектории КА с СП. Среди них синие линии представляют целевые орбиты (Цел. орб.), а синие точки – начальные положения точки на них; красные линии – опорные орбиты (Опор. орб.), а красные точки – начальные положения КА на них; чёрные линии – перелётные траектории (Пер. трк), а чёрные точки – конечные положения КА на них. На изображениях (б) на рисунке 27...рисунке 29 показаны изменения параметров управления СП во времени, включая углы установки СП  $\alpha$  и  $\gamma$ , и коэффициент отражения  $u$ . На изображениях (в) на рисунке 27...рисунке 29 показаны изменения интегралов Якоби орбит и КА во времени. На изображениях (г) на рисунке 27...рисунке 29 показаны изменения фазовых углов орбит и КА во времени. На рисунке 30 показана зависимость времени перелёта  $t_{\Pi}$  от значения интеграла Якоби опорных орбит  $C_J$ .

Таблица 4.1. Параметры опорных гало-орбит, целевой гало-конформной резонансной орбиты первой конфигурации, КА и целевой точки

Орбиты	$C_J$	$\kappa$	$\alpha$	$\vartheta_0$
Опорные	3,14519, 3,15167, 3,15325, 3,15484, 3,15643, 3,15801, 3,16447	—	—	$0^\circ$
Целевая	3,15323...3,15645 (3,15484 среднее)	0,008	$0^\circ$	$0^\circ$

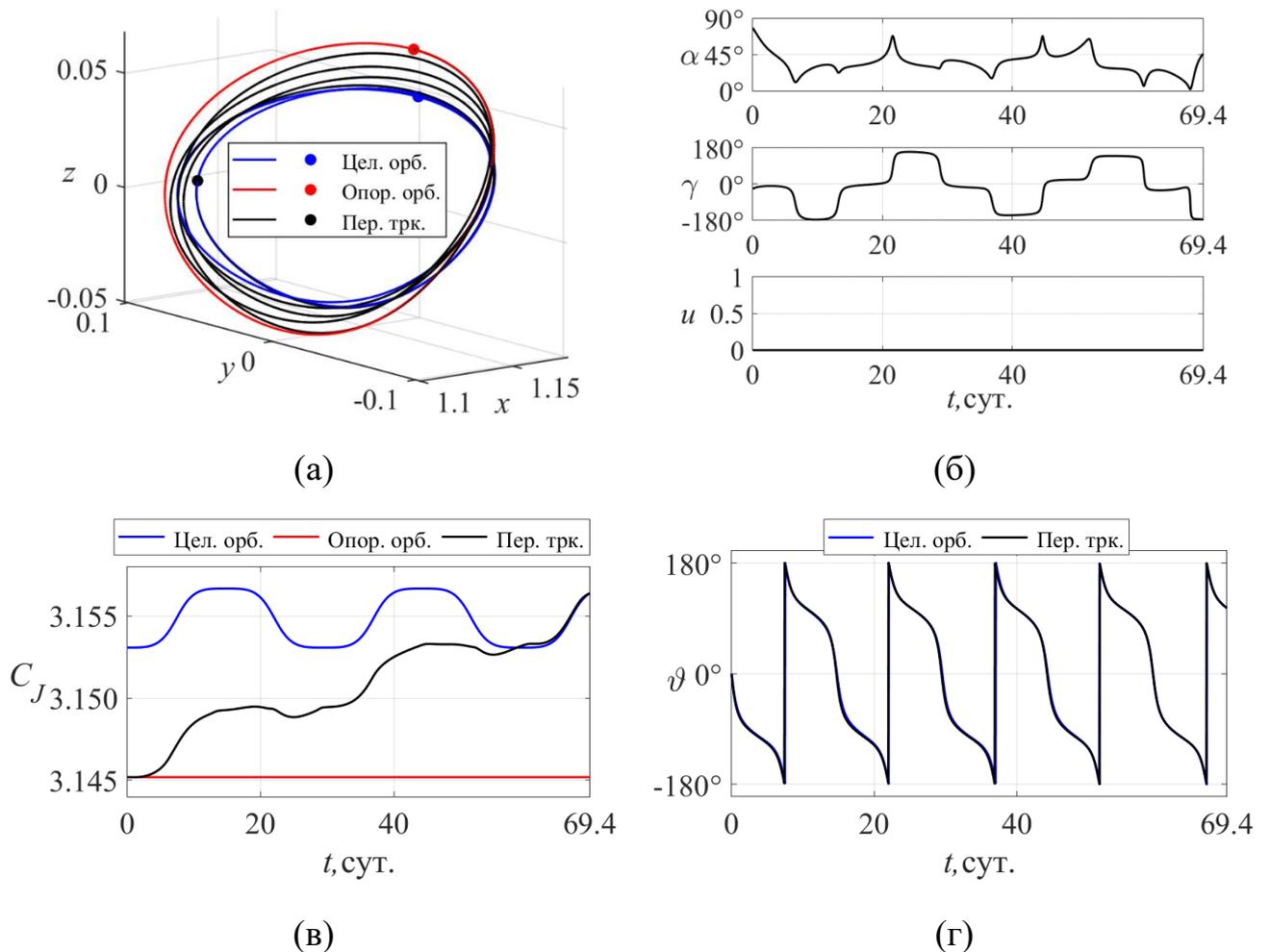
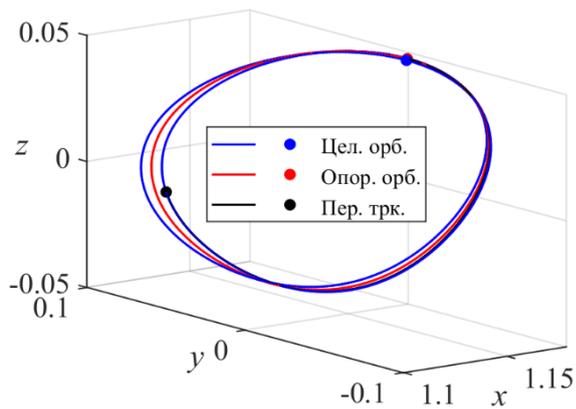
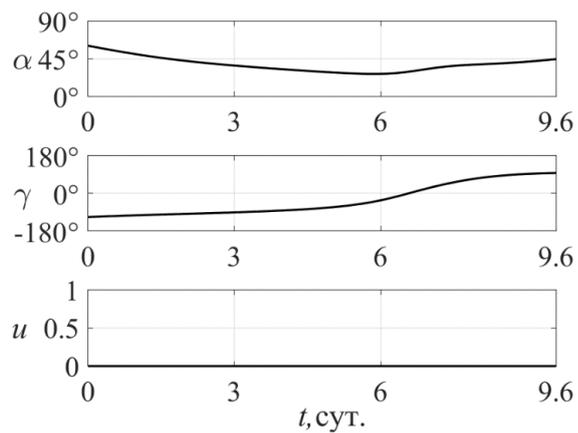


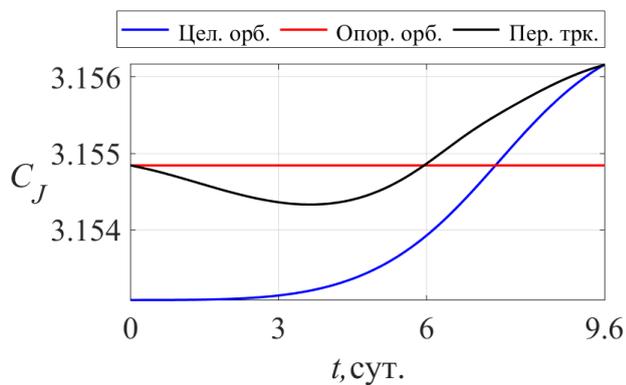
Рисунок 27 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП с гало-орбиты ( $C_J = 3,14519$ ) на гало-конформную резонансную орбиту первой конфигурации ( $\kappa = 0,008$ ,  $\alpha = 0^\circ$ )



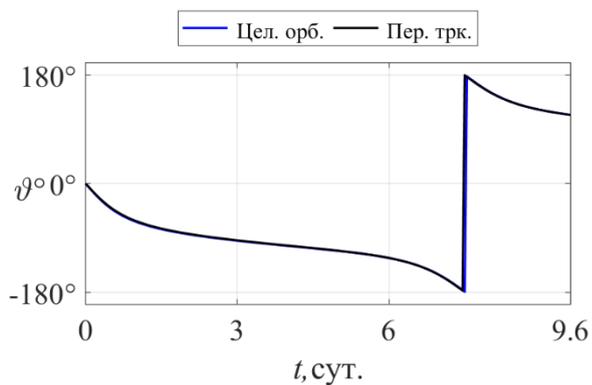
(а)



(б)

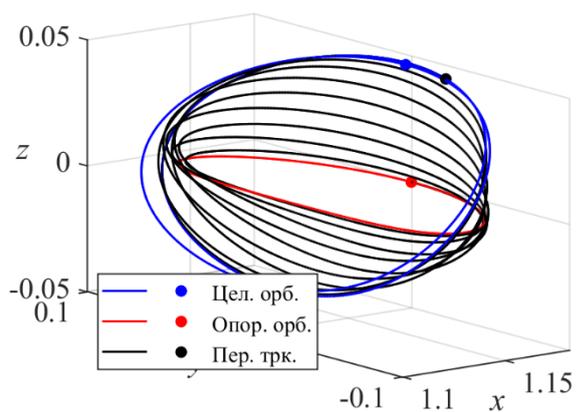


(в)

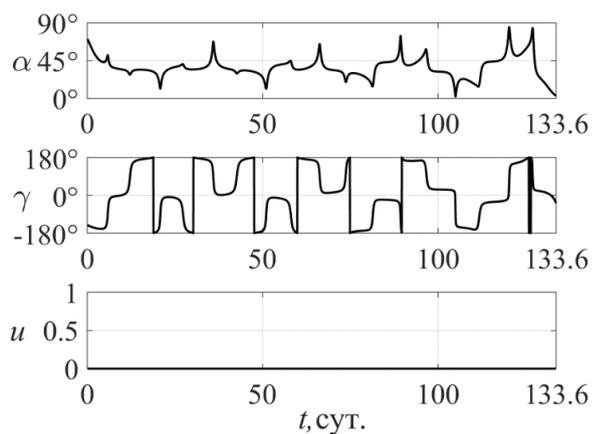


(г)

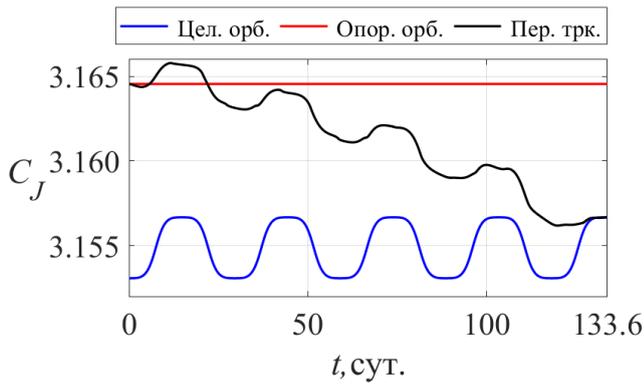
Рисунок 28 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП с гало-орбиты ( $C_J = 3,15484$ ) на гало-конформную резонансную орбиту первой конфигурации ( $\kappa = 0,008$ ,  $\alpha = 0^\circ$ )



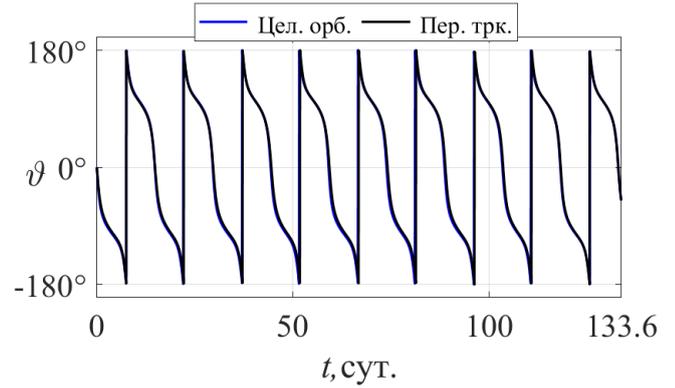
(а)



(б)



(B)



(Г)

Рисунок 29 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП с гало-орбиты ( $C_J = 3,16447$ ) на гало-конформную резонансную орбиту первой конфигурации ( $\kappa = 0,008$ ,  $\alpha = 0^\circ$ )

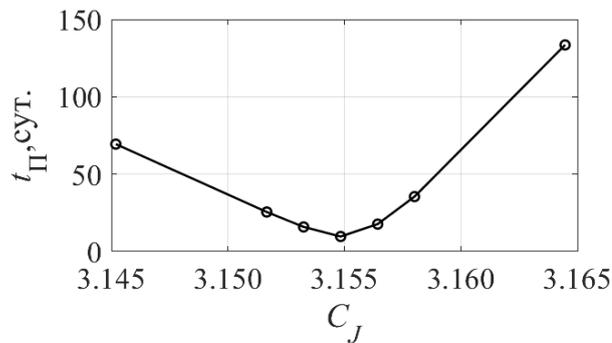


Рисунок 30 – Зависимость времени перелёта  $t_{\text{П}}$  от значения интеграла Якоби опорных орбит  $C_J$

Полученные результаты показывают, что

1. Результаты моделирования демонстрировали эффективность разработанных методик. Данные методики позволяют надёжно формировать перелётную траекторию с гало-орбиты на резонансную орбиту, даже если опорная орбита и целевая орбита сильно различаются.

2. При оптимизации управления выведением коэффициент отражения не изменяет и равен  $u = 0$ . Это показывает, что с целью быстрого выведения КА на орбиту СП находится в состоянии максимальной отражательной способности.

3. Интеграл Якоби опорных орбит  $C_J$  оказывает ключевое влияние на время перелёта. При изменении интегралов Якоби опорных орбит со среднего значения

резонансной орбиты  $C_J = 3,15484$  до  $C_J = 3,14519$  или  $C_J = 3,16447$ , время перелёта изменяется с 9,6 суток до 69,4 или 133,6 суток соответственно. Следовательно, при выборе начальных условий для выведения КА с СП на резонансную орбиту сначала нужно определить интеграл Якоби опорной орбиты. И рекомендуется выбирать естественную орбиту с интегралом Якоби, близким к среднему значению интеграла Якоби резонансной орбиты, в качестве опорной орбиты.

#### 4.2.2 Влияние разницы фазового положения на минимальную длительность выведения

Ещё одним ключевым фактором, оказывающим влияние на минимальную длительность выведения КА с СП на резонансные орбиты, является разница в фазовом угле  $\mathcal{G}$  между целевой точкой и КА в начальный момент. Он тоже определяет различие в расположении целевой точки и КА. Для анализа влияния этого параметра проведены моделирования выведения КА с положения фиксированного фазового угла  $\mathcal{G}_0 = 0^\circ$  на гало-орбите на целевые точки с разными фазовыми углами на гало-конформной резонансной орбите первой конфигурации. В ходе моделирования было выяснено, если использовать разницу во времени между КА и целевой точкой для замены разницы в фазовом угле, можно получить более регулярные результаты. Для этого сначала определяется временная фаза как время, прошедшее после того, как КА или целевая точка покинул положение нулевого фазового угла  $\mathcal{G}_0 = 0^\circ$ . Затем разница фазового положения во времени между КА и целевой точкой  $\Delta t_0$  определяется как разница их временных фаз  $\Delta t_0 = t_{0,ЦТ} - t_{0,КА}$ . Среди них  $t_{0,КА}$  и  $t_{0,ЦТ}$  – временные фазы КА и целевой точки в начальный момент (рисунок 31).

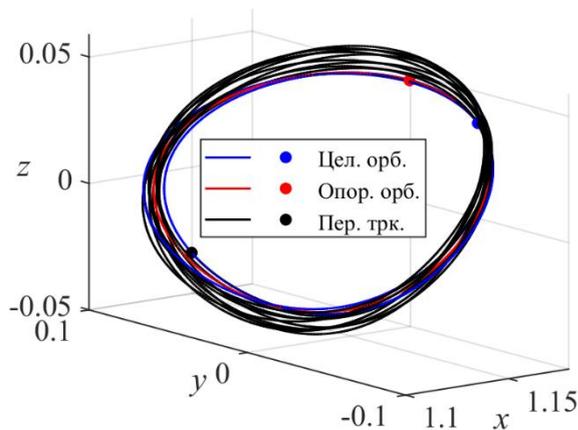


Рисунок 31 – Определение разницы фазового положения во времени между КА и целевой точкой

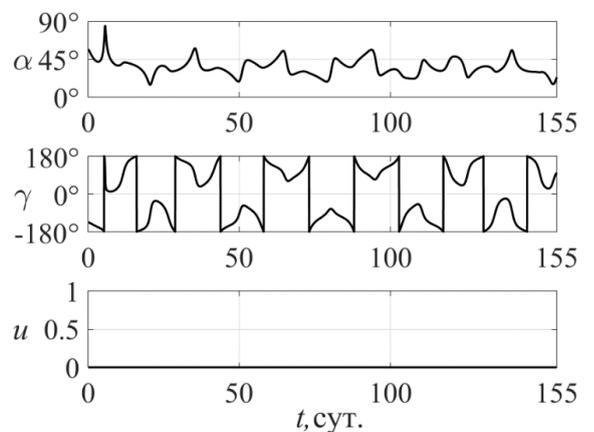
В таблице 4.2 показаны параметры опорной орбиты, целевой орбиты, КА и целевой точки. На рисунке 28, рисунке 32 и рисунке 33 представлены результаты моделирования оптимизации управления выведением с использованием разниц фазового положения во времени  $\Delta t_0 = 0$ ,  $\Delta t_0 = 0,05T_C$  и  $\Delta t_0 = -0,05T_C$  соответственно в качестве опорных орбит. На рисунке 34 показана зависимость времени перелёта  $t_{\Pi}$  от разницы фазового положения между КА и целевой точкой  $\Delta t_0$ .

Таблица 4.2. Параметры опорной гало-орбиты, целевой гало-конформной резонансной орбиты первой конфигурации, КА и целевой точки

Орбиты	$C_J$	$\kappa$	$\alpha$	$t_{0,КА}$	$\Delta t_0$
Опорная	3,15484	–	–	0	–
Целевая	3,15323...3,15645 (3,15484 среднее)	0,008	$0^\circ$	–	$0 \dots \pm 0.05 T_C$



(а)



(б)

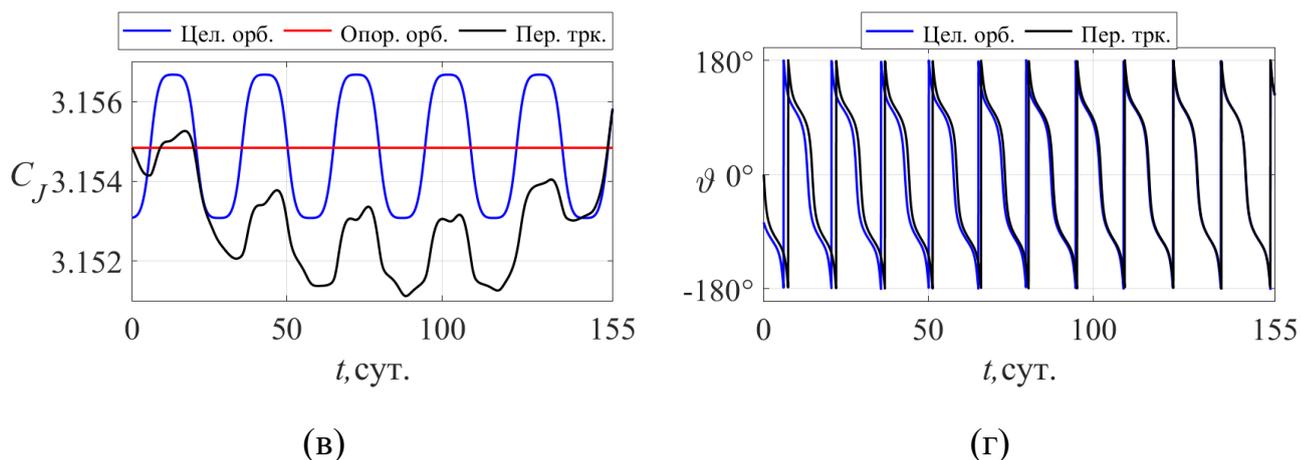


Рисунок 32 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП при разнице фазового положения во времени  $\Delta t_0 = 0,05T_C$

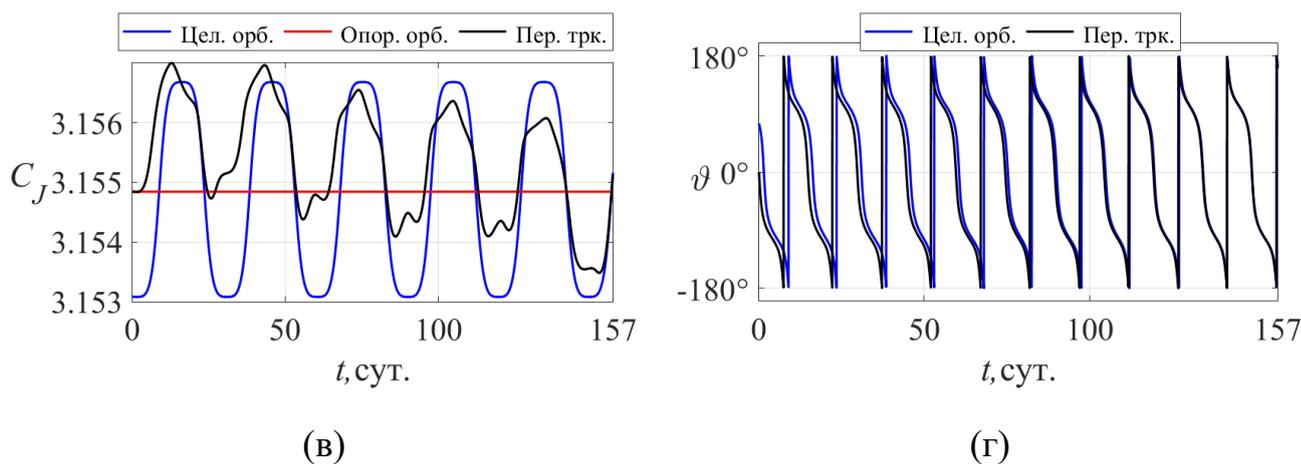
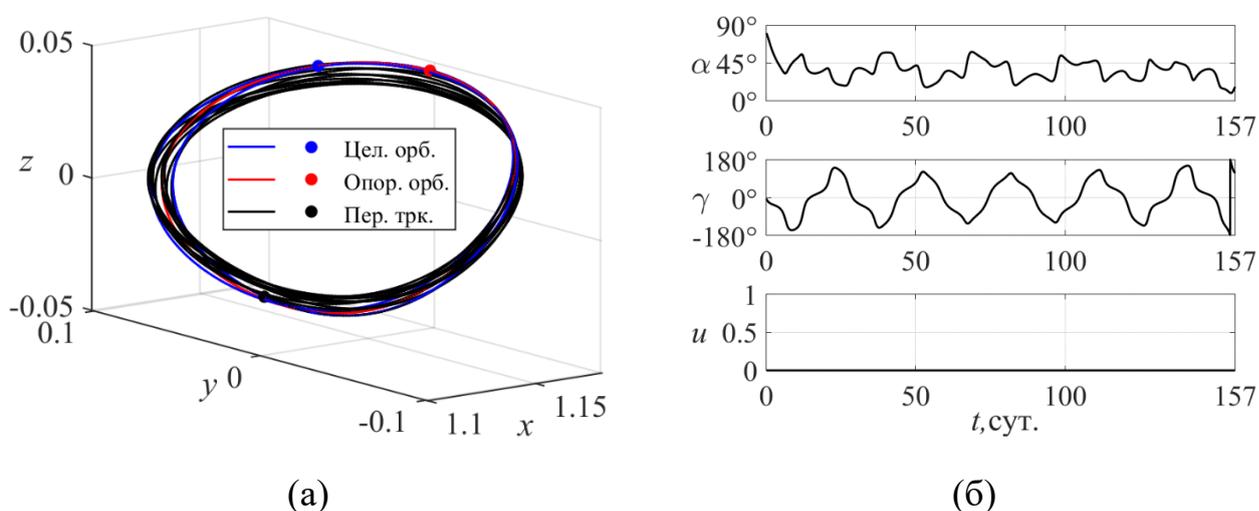


Рисунок 33 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП при разнице фазового положения во времени  $\Delta t_0 = -0,05T_C$

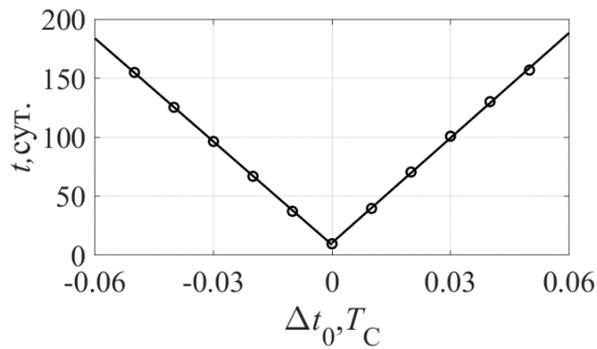


Рисунок 34 – Зависимость времени перелёта  $t_{\Pi}$  от разницы фазового положения между КА и целевой точкой  $\Delta t_0$

Полученные результаты показывают, что разница фазового положения между целевой точкой и КА в начальный момент оказывает значительное влияние на время перелёта. Вблизи  $\Delta t_0 = 0$  время перелёта достигает минимального значения. При отклонении от  $\Delta t_0 = 0$  время перелёта увеличивается со скоростью 28,58 сут./час . Это означает, что время перелёта с естественной орбиты на резонансную орбиту чрезвычайно чувствительно к моменту запуска.

#### 4.2.3 Влияние начального фазового положения КА на минимальную длительность выведения

После определения интеграла Якоби опорной орбиты  $C_J$  и временной разницы между начальными положениями целевой точкой и КА  $\Delta t_0$ , ещё одним фактором, который может повлиять на перелёт, является начальное положение КА на опорной орбите. В отличие от интеграла Якоби и разницы фазового положения, начальное положение КА не определяет различие в расположении целевой точки и КА. Поэтому его влияние на минимальную длительность выведения относительно мало, но все же стоит учитывать.

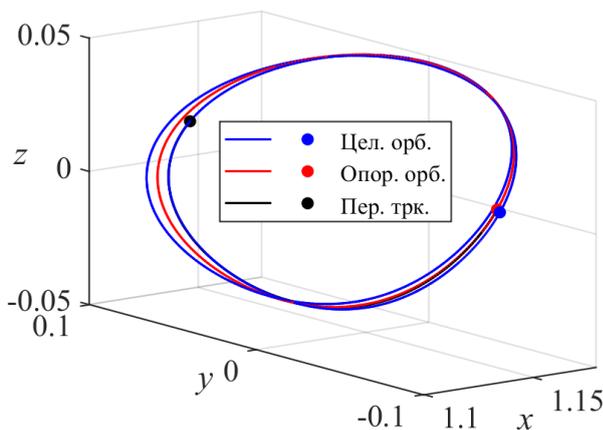
При фиксировании временной разницы  $\Delta t_0$  начальное положение КА также определяет начальное положение целевой точки на орбите, и, в свою очередь, определяет начальное положение Солнца. Для анализа влияния начального положения КА проведены эксперименты при разных начальных положениях КА, используя фиксированную временную разницу  $\Delta t_0$  . Начальное положение КА

характеризуется временем  $t_{0,КА}$ , проходящей через нулевой фазовый угол  $\vartheta = 0^\circ$ . Следует отметить, что для резонансной орбиты второго порядка, когда время начального положения КА на опорной орбите  $t_{0,КА}$  изменяется от 0 до  $T_C$ , положение целевой точки проходит 2 витки на резонансной орбите.

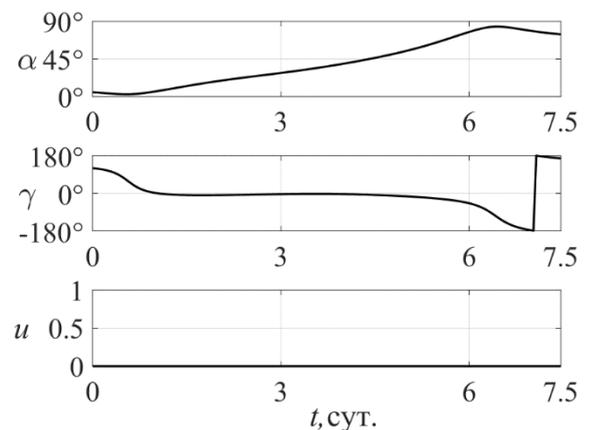
В таблице 4.3 показаны параметры опорной орбиты, целевой орбиты, КА и целевой точки. На рисунке 28, рисунке 35 и рисунке 36 представлены результаты моделирования оптимизации управления выведением с использованием временных начальных положений КА  $t_{0,КА} = 0$ ,  $t_{0,КА} = 0,125T_C$  и  $t_{0,КА} = 0,25T_C$  соответственно. На рисунке 37 показано изменение времени перелёта  $t_{II}$  с изменением временного начального положения КА  $t_{0,КА}$ .

Таблица 4.3. Параметры опорной гало-орбиты, целевой гало-конформной резонансной орбиты первой конфигурации, КА и целевой точки

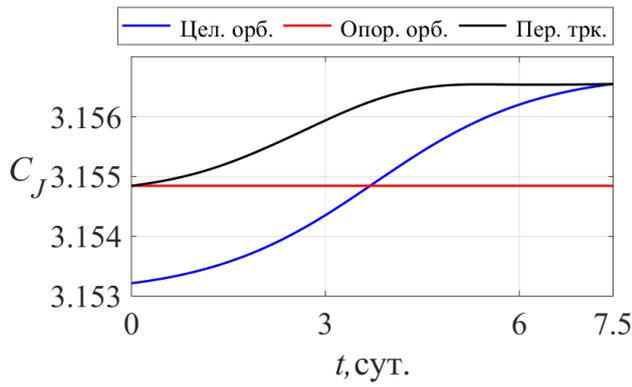
Орбиты	$C_J$	$\kappa$	$\alpha$	$t_{0,КА}$	$\Delta t_0$
Опорная	3,15484	—	—	$0 \dots T_C$	—
Целевая	3,15323...3,15645 (3,15484 среднее)	0,008	$0^\circ$	—	0



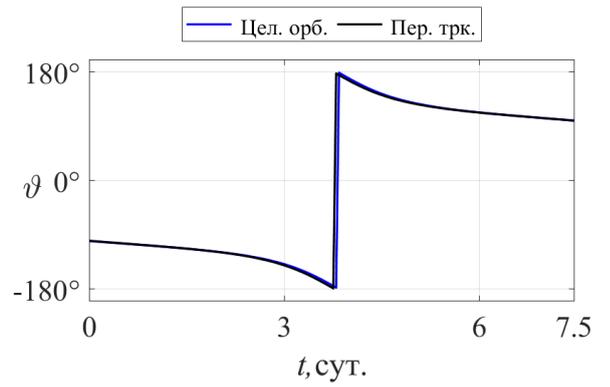
(а)



(б)

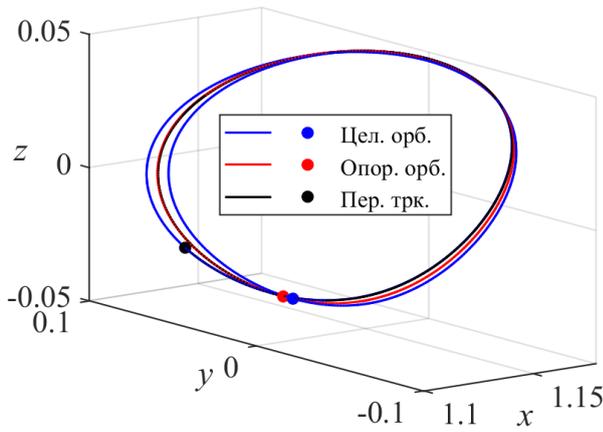


(B)

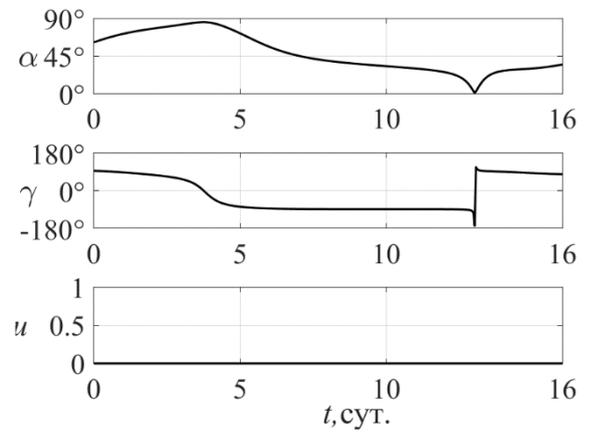


(Г)

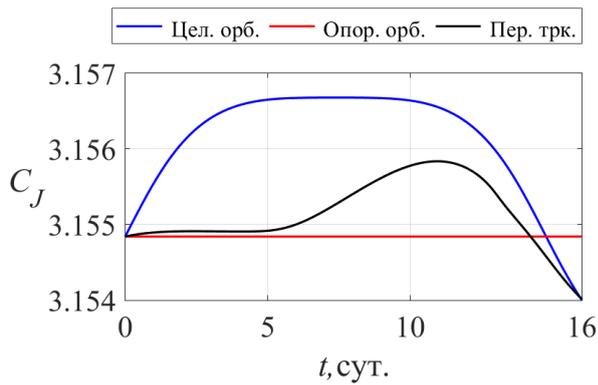
Рисунок 35 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП при начальном фазовом положении КА во времени  $t_{0,КА} = 0,125T_C$



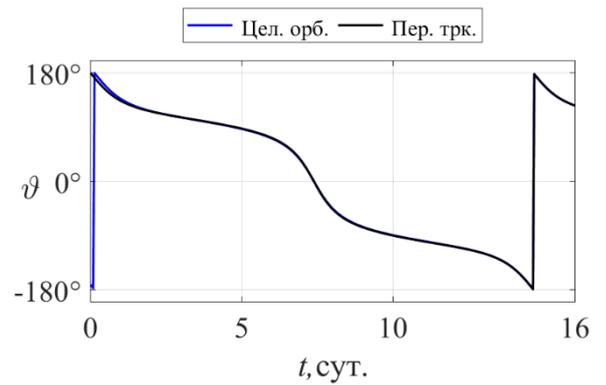
(a)



(б)



(B)



(Г)

Рисунок 36 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП при начальном фазовом положении КА во времени  $t_{0,КА} = 0,25T_C$

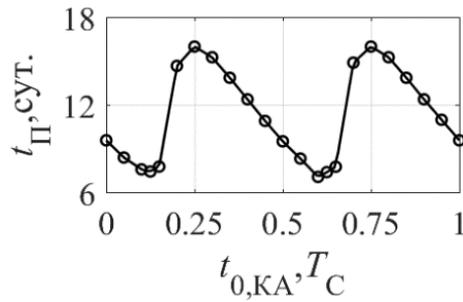


Рисунок 37 – Зависимость времени перелёта  $t_{П}$  от начального фазового положения КА  $t_{0,КА}$

Полученные результаты показывают, что

1. Начальное положение КА не оказывает большого влияния на время перелёта по сравнению с интегралом Якоби опорной орбиты и разницей начальных фазовых углов. При изменении  $t_{0,КА}$  от 0 до  $T_C$  максимальное и минимальное значения времени перелёта  $t_{П}$  равны 16 суток и 7,3 суток соответственно.

2. Максимальных значения  $t_{П}$  получены при  $t_{0,КА} = 0,25T_C$  и  $t_{0,КА} = 0,75T_C$ . Сравнивая рисунок 24, эти две точки соответствуют времени, когда интеграл Якоби резонансной орбиты достигает среднего значения и изменяется быстрее всего. Минимальных значения  $t_{П}$  получены при  $t_{0,КА} \approx 0,125T_C$  и  $t_{0,КА} \approx 0,625T_C$ . Эти две точки являются точками перегиба, где интеграл Якоби резонансной орбиты меняется от неизменённого до быстро меняющегося к среднему значению. В ходе дополнительных экспериментов было доказано, что этот вывод применим и к другим резонансным орбитам второго порядка.

На основании приведённых выше результатов оптимальными начальными условиями для выведения КА с СП с гало-орбиты на гало-конформную резонансную орбиту первой конфигурации с параметрами  $C_J = 3,15484$ ,  $\kappa = 0,008$ ,  $\alpha = 0^\circ$  являются: интеграл Якоби опорной орбиты  $C_J = 3,15484$ , разница фазового положения между КА и целевой точкой  $\Delta t_0 = 0$  и начальное фазовое положение КА  $t_{0,КА} \approx 0,125T_C$  или  $0,625T_C$ . Минимальная длительность перелёта составляет 7,5 дней.

### 4.3 Задача выведения космического аппарата с солнечным парусом на цилиндрические орбиты

В данном разделе произведено исследование оптимизации управления выведением КА с СП на цилиндрические орбиты. Основное внимание уделено факторами, влияющими на минимальную длительность выведения.

На рисунке 38 показаны изменения интеграла Якоби  $C_J$  во времени для цилиндрических орбит с параметром  $\kappa = 0,06$ .

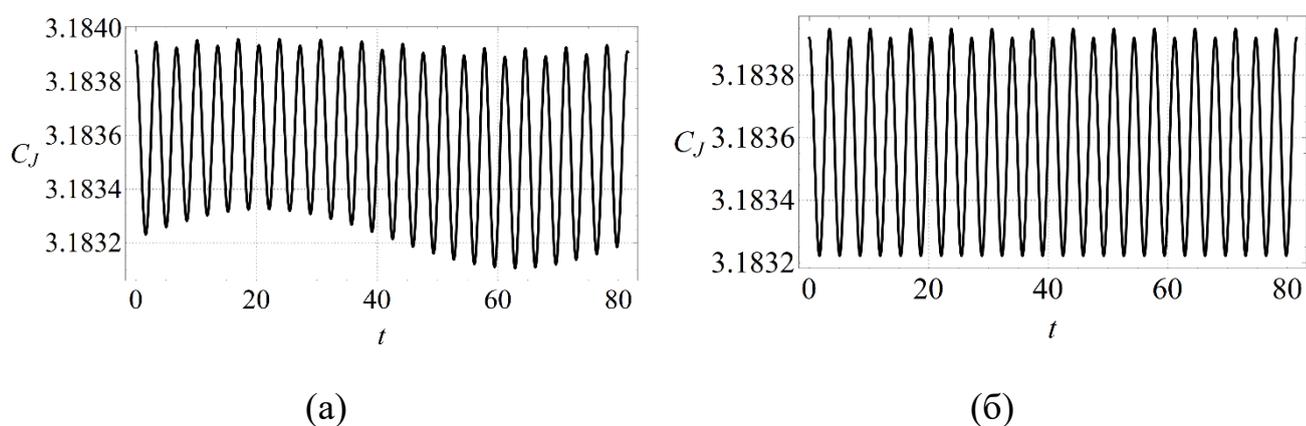


Рисунок 38 – Изменения интеграла Якоби  $C_J$  во времени для цилиндрических орбит с параметрами  $\kappa = 0,06$  и  $\alpha = 35,26^\circ$ : (а) для квазипериодической орбиты; (б) для периодической орбиты

Полученные результаты показывают, что

1. С учётом формы цилиндрических орбит (рисунке 19) можно получить вывод, что интегралы Якоби для цилиндрических орбит достигает максимальных значений на обоих концах направления  $x$  и минимальных значений на обоих концах направления  $y$ .

2. Минимальные значения интеграла Якоби для квазипериодической орбиты изменяются синусоидально с периодом вращения Земли вокруг Солнца. Максимальные и минимальные значения интеграла Якоби для периодической орбиты не существенно меняются со временем.

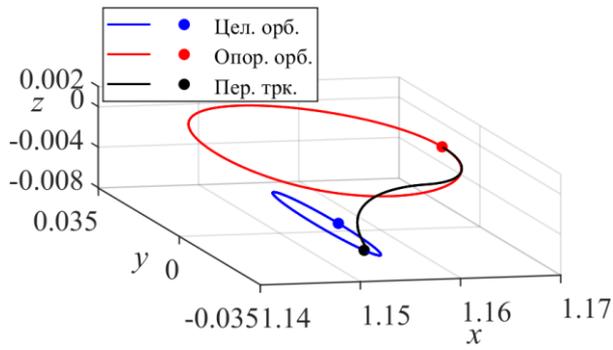
### 4.3.1 Влияние энергии опорной орбиты на минимальную длительность выведения

Интеграл Якоби цилиндрических орбит обычно выше, чем у всех орбит Ляпунова и гало. Для естественных орбит вблизи точки L2, только некоторые орбиты Ляпунова с меньшими амплитудами обладают интегралами Якоби, равными или чуть-чуть превышающими их интегралы Якоби. Для анализа влияния интеграла Якоби  $C_J$  опорной орбиты на оптимизацию управления выведением на цилиндрическую орбиту проведены моделирования перелёты с использованием периодической цилиндрической орбиты с  $\kappa=0,06$  и  $\alpha=35,26^\circ$  в качестве целевой орбиты, и орбит Ляпунова с различными интегралами Якоби  $C_J$  в качестве опорных орбит.

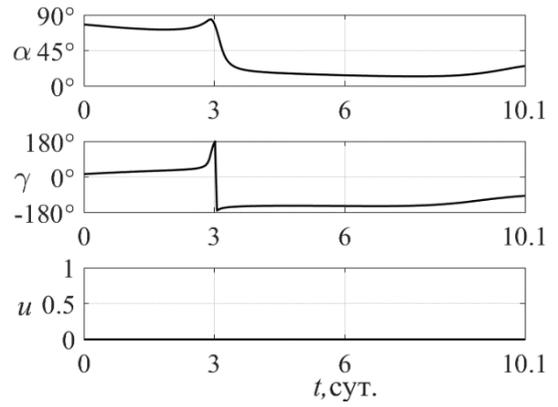
В таблице 4.4 показаны параметры опорных орбит, целевой орбиты, КА и целевой точки. На рисунке 39...рисунке 41 представлены результаты моделирования оптимизации управления выведением с использованием орбит Ляпунова с интегралами  $C_J = 3,18176$  ,  $C_J = 3,18410$  и  $C_J = 3,18453$  соответственно в качестве опорных орбит. На рисунке 42 показана зависимость времени перелёта  $t_{\Pi}$  от значения интеграла Якоби опорных орбит  $C_J$  .

Таблица 4.4. Параметры опорных орбит, целевой периодической цилиндрической орбиты, КА и целевой точки

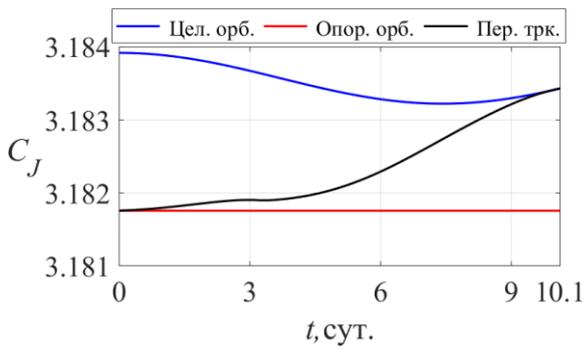
Орбиты	$C_J$	$\kappa$	$\alpha$	$\vartheta_0$
Опорные	3,18176, 3,18219, 3,18262, 3,1831, 3,18358, 3,18405, 3,18410, 3,18453	–	–	0°
Целевая	3,18323...3,18394 (3,18358 среднее)	0,06	35,26°	0°



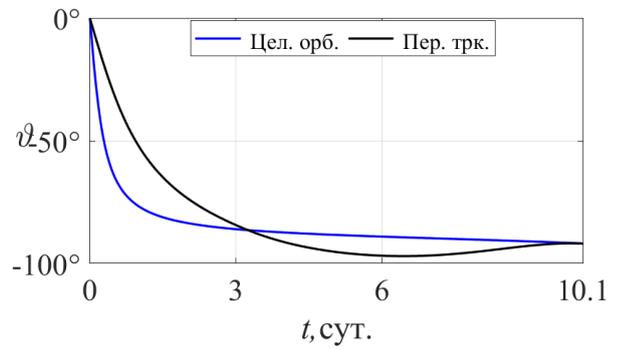
(а)



(б)

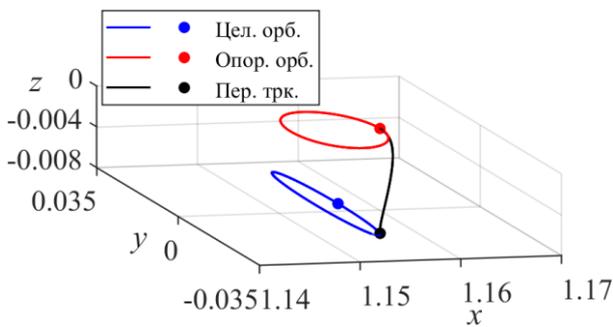


(в)

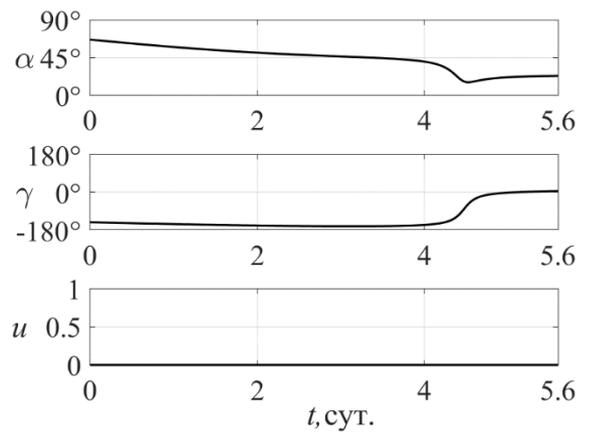


(г)

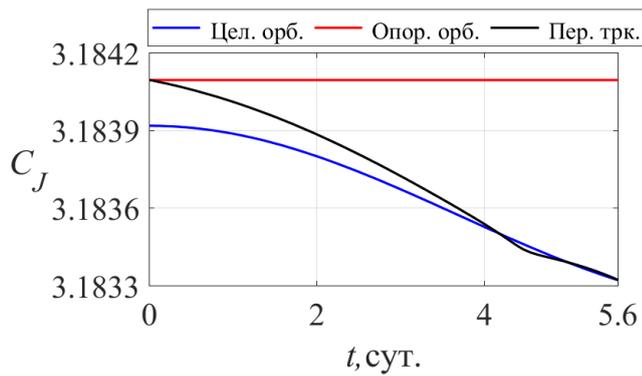
Рисунок 39 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП с гало-орбиты ( $C_J = 3,18176$ ) на периодическую цилиндрическую орбиту ( $\kappa=0,06, \alpha=35,26^\circ$ )



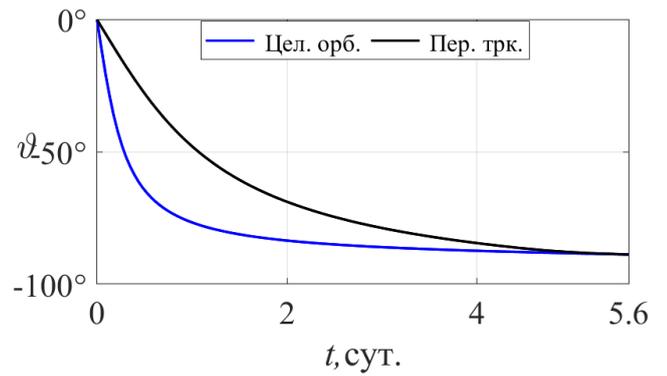
(а)



(б)

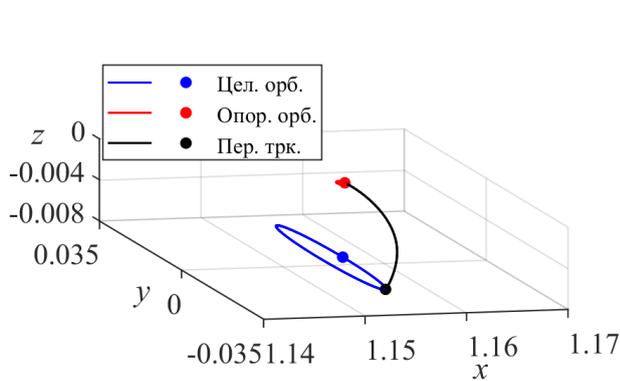


(B)

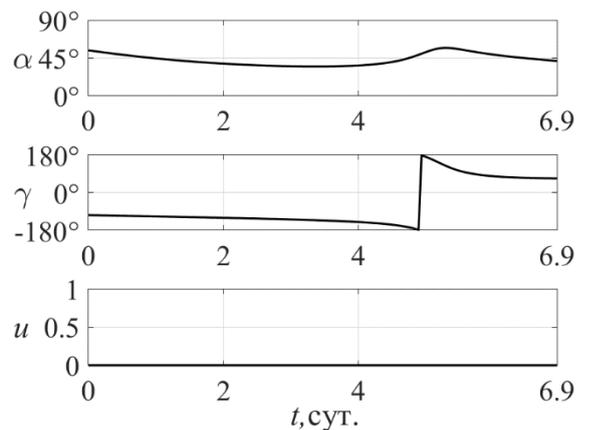


(Г)

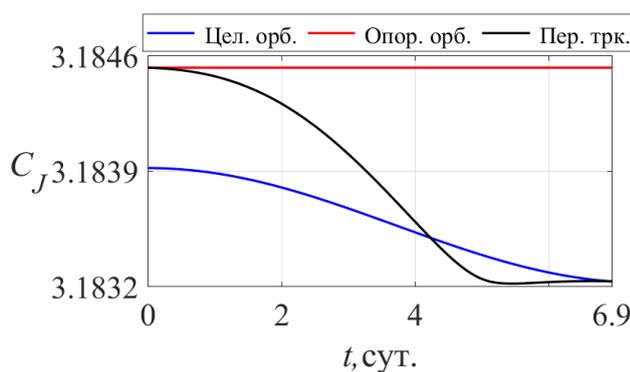
Рисунок 40 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП с гало-орбиты ( $C_J = 3,18410$ ) на периодическую цилиндрическую орбиту ( $\kappa=0,06, \alpha=35,26^\circ$ )



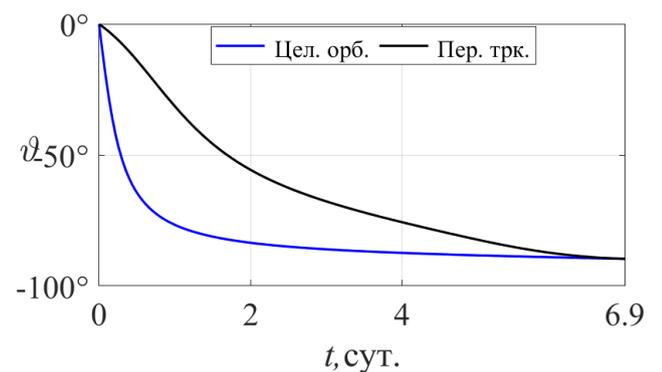
(a)



(б)



(B)



(Г)

Рисунок 41 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП с гало-орбиты ( $C_J = 3,18453$ ) на периодическую цилиндрическую орбиту ( $\kappa=0,06, \alpha=35,26^\circ$ )

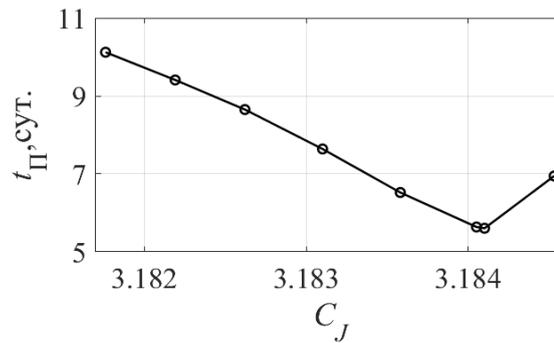


Рисунок 42 – Зависимость времени перелёта  $t_{П}$  от значения интеграла Якоби опорных орбит  $C_J$

Полученные результаты показывают, что

1. В отличие от перелёта на резонансные орбиты, время перелёта на цилиндрические орбиты не достигает минимума, когда интеграл Якоби опорной орбиты равен среднему значению интеграла Якоби целевой орбиты.

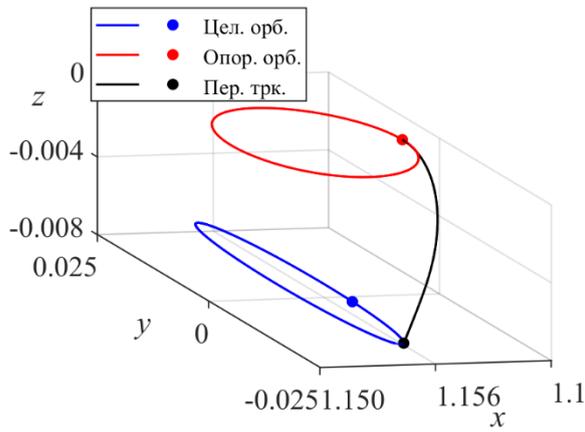
2. По обе стороны от оптимального значения минимальное время выведения практически линейно изменяется в зависимости от изменения интеграла Якоби опорной орбиты.

3. По сравнению с выведением на резонансные орбиты влияние интеграла Якоби на время перелёта на цилиндрические орбиты оказывается менее значительным.

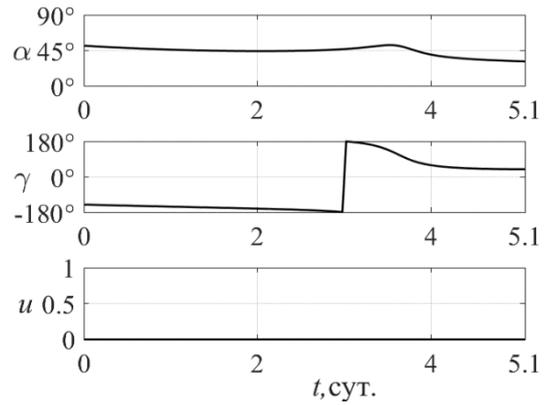
#### 4.3.2 Влияние разницы фазового положения на минимальную длительность выведения

Для анализа влияния разницы фазового положения проведены моделирования выведения КА с положения фиксированного фазового угла  $\vartheta_0 = 0^\circ$  на орбите Ляпунова на целевые точки с разными фазовыми углами на периодической цилиндрической орбите.

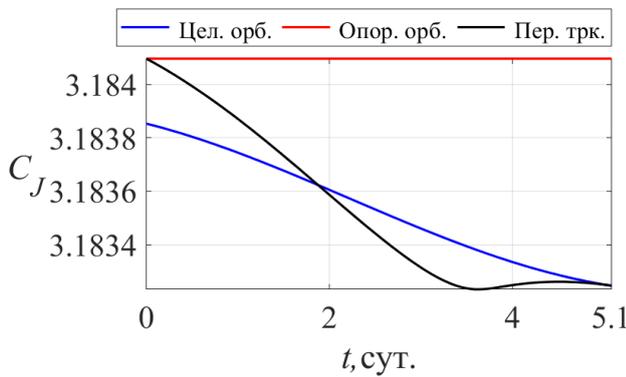
В таблице 4.5 показаны параметры опорной орбиты, целевой орбиты, КА и целевой точки. На рисунке 40,



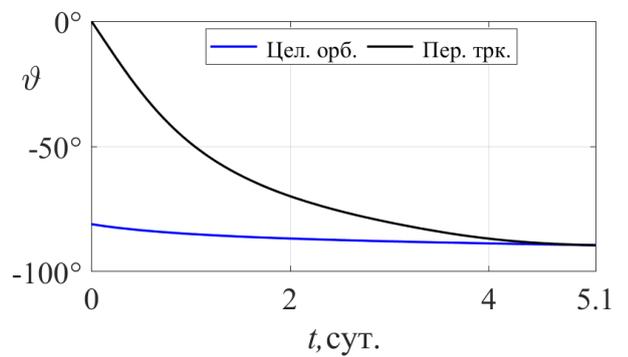
(а)



(б)



(в)

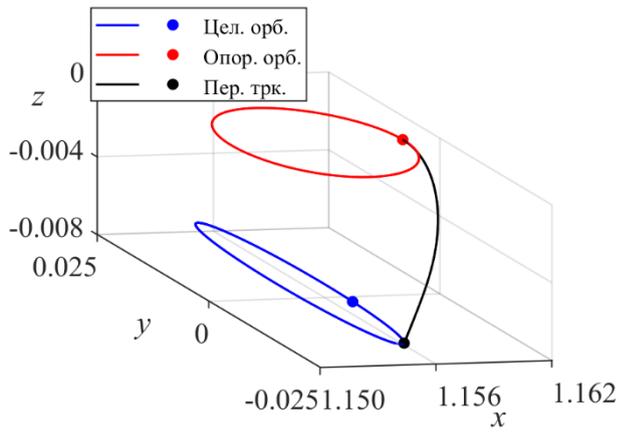


(г)

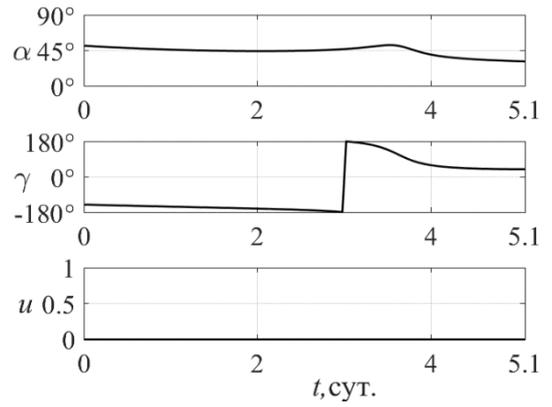
Рисунок 43 и рисунок 44 представлены результаты моделирования оптимизации управления выводением с использованием временных начальных положениях КА  $\Delta t_0 = 0$ ,  $\Delta t_0 = 0,05T_C$  и  $\Delta t_0 = -0,2T_C$  соответственно. На рисунке 37 показан зависимость времени перелёта  $t_{\Pi}$  от разницы фазового положения между КА и целевой точкой  $\Delta t_0$ .

Таблица 4.5. Параметры опорной орбиты Ляпунова, целевой периодической цилиндрической орбиты, КА и целевой точки

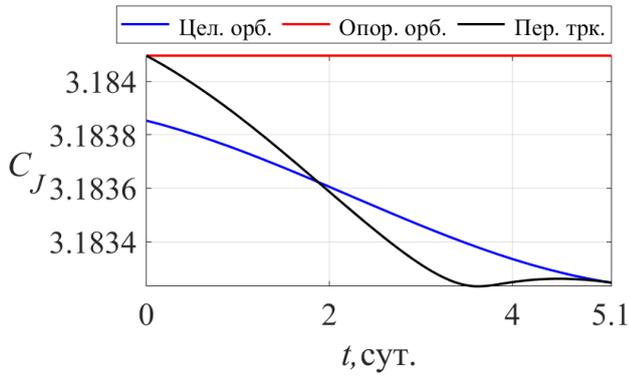
Орбиты	$C_J$	$\kappa$	$\alpha$	$t_{0,КА}$	$\Delta t_0$
Опорная	3,18410	—	—	0	—
Целевая	3,18323...3,18394 (3,18358 среднее)	0,06	35,26°	—	0...±0.5 $T_C$



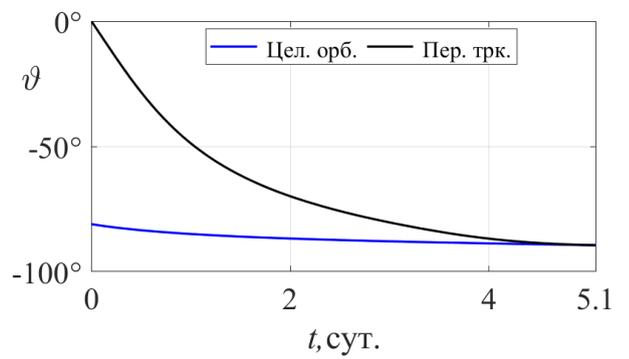
(а)



(б)

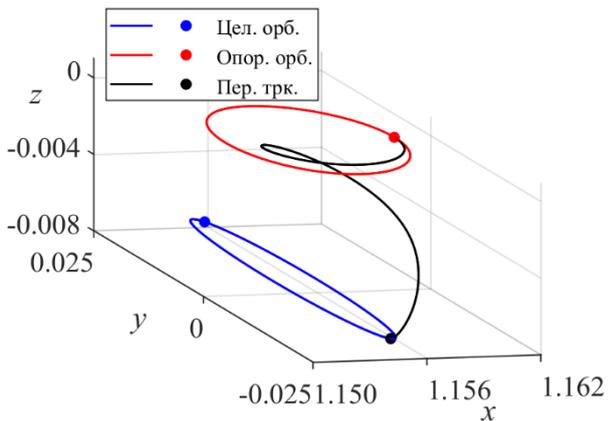


(в)

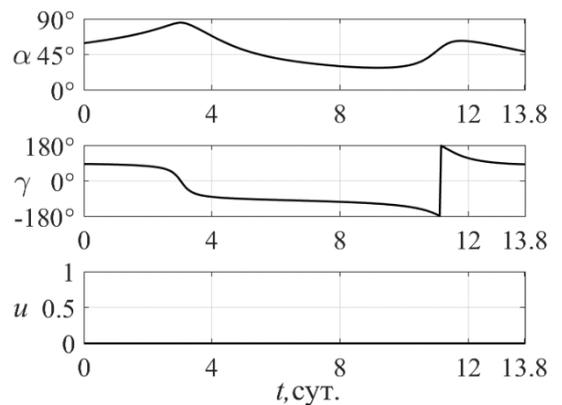


(г)

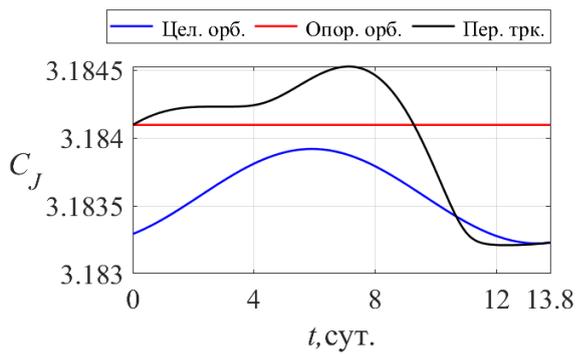
Рисунок 43 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП при разнице фазового положения во времени  $\Delta t_0 = 0,05T_C$



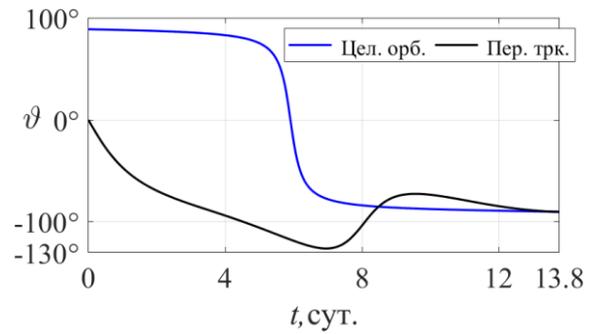
(а)



(б)



(B)



(Г)

Рисунок 44 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП при разнице фазового положения во времени  $\Delta t_0 = -0,2T_C$

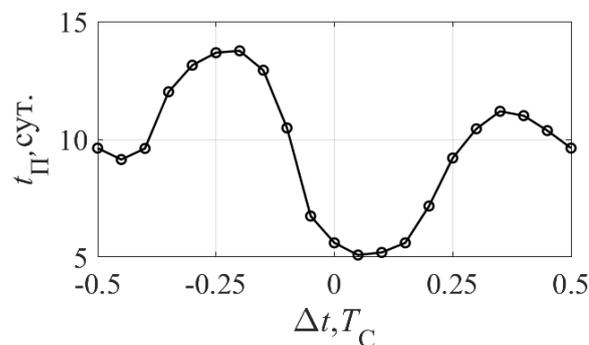


Рисунок 45 – Зависимость времени перелёта  $t_{\Pi}$  от разницы фазового положения между КА и целевой точкой  $\Delta t_0$

Полученные результаты показывают, что

1. Влияние разницы начального фазового положения на время перелёта на цилиндрические орбиты не существенно по сравнению с выведением на резонансные орбиты. Это связано с двумя факторами. Во-первых, периоды цилиндрических орбит значительно больше, чем периоды опорных орбит Ляпунова, что облегчает КА «догонение» целевой точки. Во-вторых, ускорение КА на цилиндрических орбитах значительно выше, чем на резонансных орбитах, что обеспечивает более высокие возможности управления выведением для КА.

2. Минимальное  $t_{\Pi}$  достигается, когда разница начального фазового положения между КА и целевой точкой больше нуля  $\Delta t_0 = 0,05T_C$ .

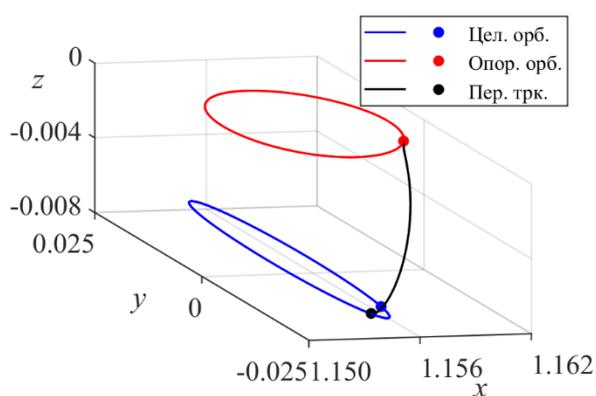
### 4.3.3 Влияние начального фазового положения КА на минимальную длительность выведения

Для анализа влияния начального фазового положения КА на время перелёта на цилиндрические орбиты проведены моделирования с использованием орбиты Ляпунова с одинаковой разницей начального фазового положения  $\Delta t_0 = 0,05T_C$  в качестве опорной орбиты, и периодической цилиндрической орбиты с разными начальными фазовыми углами в качестве целевых орбит.

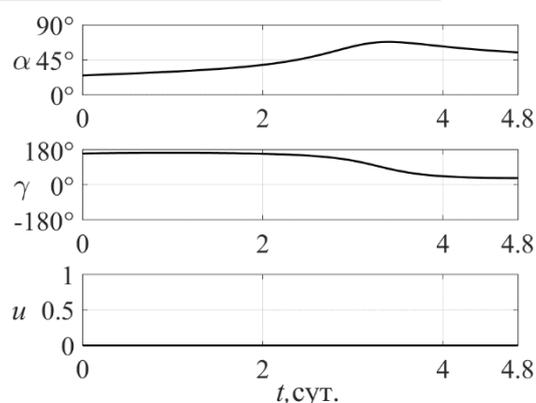
В таблице 4.6 показаны параметры опорной орбиты, целевой орбиты, КА и целевой точки. На рисунке 43, рисунок 46 и рисунок 47 представлены результаты моделирования оптимизации управления выведением с использованием временных начальных положений КА  $t_{0,КА} = 0$ ,  $t_{0,КА} = 0,1T_C$  и  $t_{0,КА} = 0,8T_C$  соответственно. На рисунке 48 показано изменение времени перелёта  $t_{II}$  с изменением временного начального положения КА  $t_{0,КА}$ .

Таблица 4.6. Параметры опорной орбиты Ляпунова, целевой периодической цилиндрической орбиты, КА и целевой точки

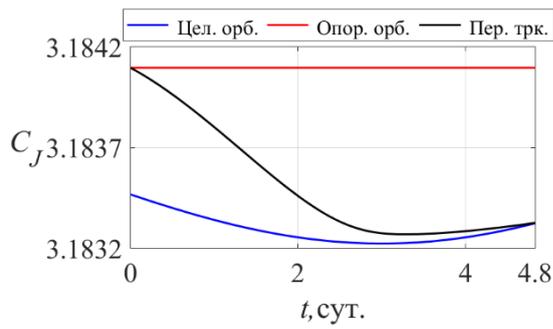
Орбиты	$C_J$	$\kappa$	$\alpha$	$t_{0,КА}$	$\Delta t_0$
Опорная	3,18410	—	—	$0 \dots T_C$	—
Целевая	3,18323...3,18394 (3,18358 среднее)	0,06	$35,26^\circ$	—	$0,05T_C$



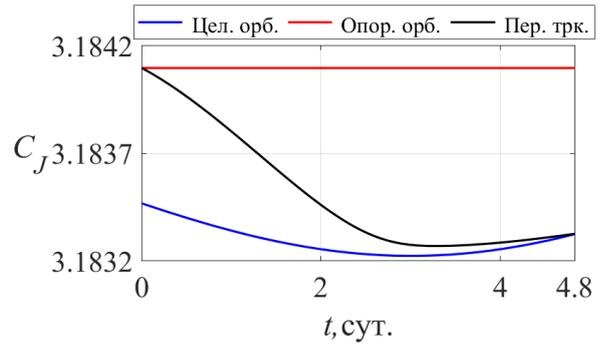
(а)



(б)

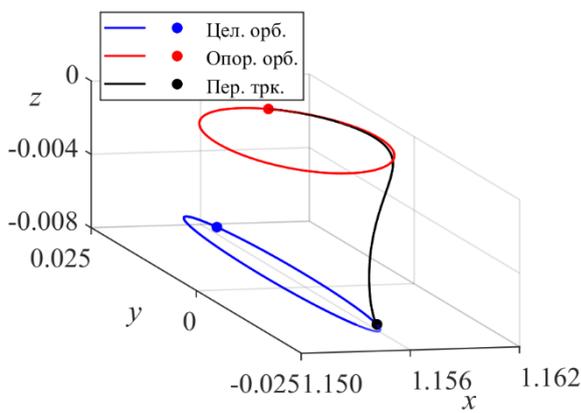


(B)

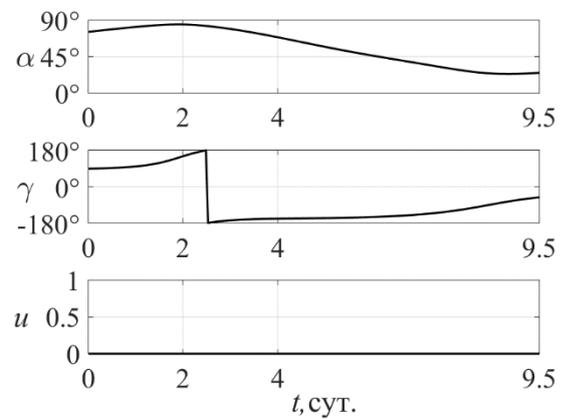


(Gamma)

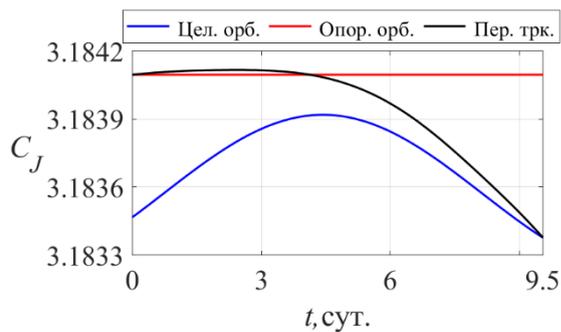
Рисунок 46 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП при начальном фазовом положении КА во времени  $t_{0,КА} = 0,1T_C$



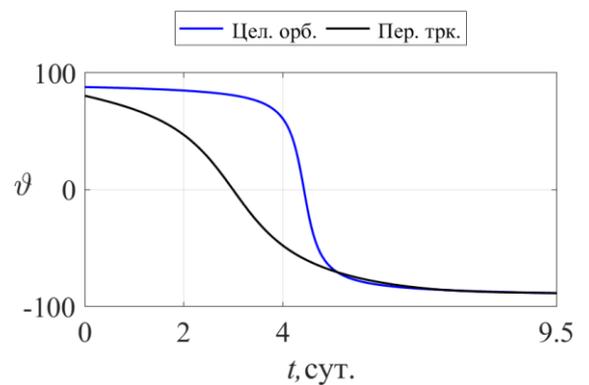
(a)



(б)



(B)



(Gamma)

Рисунок 47 – Моделирование оптимизации управления выведением КА с СП при начальном фазовом положении КА во времени  $t_{0,КА} = 0,8T_C$

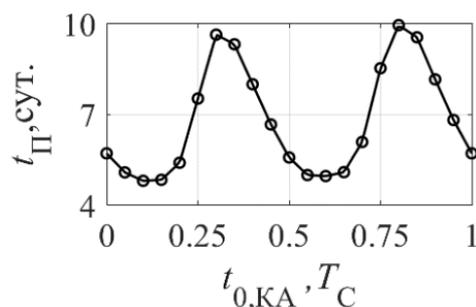


Рисунок 48 – Зависимость длительности перелёта  $t_{П}$  от начального фазового положения КА  $t_{0,КА}$

Полученные результаты показывают, что минимальная и максимальная длительности перелёта достигаются, когда начальные фазовые положения КА соответствуют  $t_{0,КА} = 0,1T_C$  и  $t_{0,КА} = 0,8T_C$ .

На основании приведённых выше результатов оптимальными начальными условиями для выведения КА с СП с орбиты Ляпунова на периодическую цилиндрическую орбиту с параметрами  $\kappa = 0,06$ ,  $\alpha = 35,26^\circ$  являются: интеграл Якоби опорной орбиты  $C_J = 3,1840$ , разница фазового положения между КА и целевой точкой  $\Delta t_0 = 0,05T_C$  и начальное фазовое положение КА  $t_{0,КА} = 0,8T_C$ . Минимальная длительность перелёта составляет 4,8 дней.

#### 4.4 Выводы по третьей главе

В четвертой главе получены следующие основные результаты:

1. Представлена постановка задач оптимизации перелёта КА на орбиты с использованием управляемых СП. Задачи включают в себя задача с целевой функцией конечного значения и минимального времени перелёта.
2. Представлена разработка алгоритм решения поставленных задач оптимизации. Включаются введение в метод коллокации и метод продолжения, а также методы конфигурации, необходимые для реализации алгоритма с использованием функции `bvp4c` в Matlab.
3. Проведены численные моделирования процесса перелёта с орбиты Ляпунова в окрестности точки L2 системы Земля-Луна на резонансные орбиты 2-го порядка и на цилиндрические орбиты. Включаются моделирования

траекторий перелёта, создание законов управления СП и расчёты изменения интеграла Якоби и фазового положения КА и целевой точки.

4. Получены зависимости минимальной длительности перелёта от энергии опорной орбиты, разницы фазового положения между КА и целевой точкой, и начального фазового положения КА.

## 5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данного исследования были разработаны формирования и оптимизации искусственных орбит и перелёты КА с СП в окрестности точки L2 системы Земля-Луна. В результате работы были достигнуты следующие результаты:

1. Разработаны методы формирования искусственных периодических орбит для КА с СП в окрестности точки L2 системы Земля-Луна, включая резонансные и цилиндрические орбиты.
2. Проанализированы зависимости геометрических характеристик искусственных орбит от параметров СП и переменных управления. Комбинируя различные значения параметров, можно создавать разнообразные орбиты, адаптируемые к различным потребностям миссий.
3. Разработана методика поддержания искусственных орбит с помощью управления СП с учётом особенностей движения системы Солнце-Земля-Луна. Показано, что за счёт изменения параметров управления можно компенсировать влияние неучтённых ранее факторов. Это обеспечивает возможность длительной работы КА с СП на таких орбитах.
4. Разработаны методики формирования оптимального управления выведением КА с СП с естественных орбит на искусственные орбиты. Это решило проблемы низкой вычислительной эффективности и плохой адаптируемости существующих методов.
5. Проанализированы зависимости минимальной длительности выведения на искусственные орбиты от выбора опорных орбит и начального положения КА. Это может быть использовано для выбора наилучших естественных орбит и времени начала перелёта, обеспечивающих минимальную длительность выведения.

На основании исследования можно дать следующие рекомендации:

1. Искусственные периодические орбиты могут быть созданы с помощью СП, что позволит увеличить количество и пространственный диапазон естественных периодических орбит. В то же время их особое положение и

параметры движения позволяют выполнять задачи, которые не могут быть выполнены естественными периодическими орбитами

2. Долгосрочное поддержание искусственных орбит можно добиться с небольшими затратами, используя СП. Поскольку эти орбиты не могут быть пассивно установлены, поддержание орбиты требует большого количества энергии, чего трудно достичь для космического корабля, потребляющего топливо.
3. В системе Земля-Луна перелёты между орбитами также может быть осуществлены с помощью СП. Из-за низкой тяговооруженности и большого импульса КА с СП требует длительного перелётного времени.
4. Естественные периодические орбиты могут использоваться в качестве начальные орбиты для перелёта и начального приближения алгоритма перелёта.

В ходе последующей работы вопросами, требующими дальнейшего исследования, являются:

1. Нахождение более быстрых траекторий для перелётов на орбиты.
2. Проектирование траектории перелётов с околоземных орбит на искусственные периодические орбиты.

## **СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ**

КА	– космический аппарат
СП	– солнечный парус
СК	– система координат
ЧП	– численное продолжение
ОУ	– оптимизация управления
мак-ТВ	– максимизация точности выведения
мин-ВП	– минимизация времени перелёта

## Список литературы

1. Simo, J. A Comparative Study of Displaced Non-Keplerian Orbits with Impulsive and Continuous Thrust [Текст] / J. Simo // Spaceflight Mechanics: Proceedings of the 27th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. – San Diego, California: Univelt, Inc. – 2017. – С. 2531–2552.
2. Baoyin, H. Solar sail halo orbits at the Sun-Earth artificial L1 point [Текст] / H. Baoyin, C.R. McInnes // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2006. – Т. 94. – С. 155–171.
3. Polyakhova, E. Flights of a spacecraft with a solar sail out of ecliptic plane [Текст] / E.N. Polyakhova, V. Starkov, N. Stepenko // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Т. 1959, № 1.
4. Gong, S. Solar sail heliocentric elliptic displaced orbits [Текст] / S. Gong, J. Li // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2014. – Т. 37, № 6. – С. 2021–2026.
5. McInnes, C.R. Solar sail mission applications for non-Keplerian orbits [Текст] / C.R. McInnes // Acta Astronautica. – 1999. – Т. 45, № 4–9. – С. 567–575.
6. Tresaco, E. Frozen orbits for a solar sail around Mercury [Текст] / E. Tresaco, A. Elipe, J.P.S. Carvalho // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2016. – Т. 39, № 7. – С. 1659–1666.
7. Старинова, О.Л. Использование локально-оптимальных законов управления для формирования заданных гелиоцентрических орбит космического аппарата с солнечным парусом [Текст] / О.Л. Старинова, И.В. Чернякина // Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-20058). – 2018. – С. 377–380.
8. Gong, S. Orbital motions of a solar sail around the L2 earth–moon libration point [Текст] / S. Gong, J. Li, J. Simo // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2014. – Т. 37, № 4. – С. 1349–1356.
9. Simo, J. Solar sail orbits at the Earth-Moon libration points [Текст] / J. Simo, C.R. McInnes // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2009. – Т. 14, № 12. – С. 4191–4196.

10. Heiligers, J. Solar sail Lyapunov and Halo orbits in the Earth-Moon three-body problem [Текст] / J. Heiligers, S. Hiddink, R. Noomen, C.R. McInnes // *Acta Astronautica*. – 2015. – Т. 116. – С. 25–35.
11. Rodnikov, A.V. On Stabilization of Bounded Trajectories of a Spacecraft with a Solar Sail near an Unstable Libration Point [Текст] / A.V. Rodnikov // 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). – Moscow. – 2022. – С. 1–3.
12. Белецкий, В.В. Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел [Текст] / В.В. Белецкий, А.В. Родников // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. – 2011. – Т. 7, № 3. – С. 569–576.
13. Родников, А.В. Треугольные точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае комплексно-сопряженных масс притягивающих центров [Текст] / А.В. Родников // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. – 2014. – Т. 10, № 2. – С. 213–222.
14. Bookless, J. Control of Lagrange point orbits using solar sail propulsion [Текст] / J. Bookless, C. McInnes // *Acta Astronautica*. – 2008. – Т. 62, № 2–3. – С. 159–176.
15. Farrés, A. Station keeping of a solar sail around a halo orbit [Текст] / A. Farrés, A. Jorba // *Acta Astronautica*. – 2014. – Т. 94, № 1. – С. 527–539.
16. Morrow, E. Solar sail orbit operations at asteroids [Текст] / E. Morrow, D.J. Scheeres, D. Lubin // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 2001. – Т. 38, № 2. – С. 279–286.
17. Lou, Z. Active disturbance rejection station-keeping control for solar-sail libration-point orbits [Текст] / Z. Lou, K. Zhang, Y. Wang, Q. Gao // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2016. – Т. 39, № 8. – С. 1913–1917.
18. Farrés, A. A dynamical system approach for the station keeping of a solar sail [Текст] / A. Farrés, À. Jorba // *The Journal of the Astronautical Sciences*. – 2008. – Т. 56, № 2. – С. 199–230.
19. Gao, C. Model predictive control-based coupled orbit-attitude control for solar sail formation flying in the Earth-Moon system [Текст] / C. Gao, Y. Zhao // *Astrophysics and Space Science*. – 2023. – Т. 368, № 6. – С. 47.

20. Biggs, J.D. Solar sail formation flying for deep-space remote sensing [Текст] / J.D. Biggs, C.R. McInnes // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 2009. – Т. 46, № 3. – С. 670–678.
21. Circi, C. Simple strategy for geostationary station-keeping maneuvers using solar sail [Текст] / C. Circi // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2005. – Т. 28, № 2. – С. 249–253.
22. Firuzi, S. Gradient-index solar sail and its optimal orbital control [Текст] / S. Firuzi, Y. Song, S. Gong // *Aerospace Science and Technology*. – 2021. – Т. 119. – С. 107103.
23. Старинова, О.Л. Применение космического аппарата с солнечным парусом для освещения марсианской поверхности [Текст] / О.Л. Старинова, М.А. Рожков, В. В. Горбунова // Редакционная коллегия. – 2018. – С. 83.
24. Gong, S. Solar sail halo orbit control using reflectivity control devices [Текст] / S. Gong, J. Li // *Transactions of the Japan society for aeronautical and space sciences*. – 2014. – Т. 57, № 5. – С. 279–288.
25. Wie, B. Solar-sail attitude control design for a flight validation mission [Текст] / B. Wie, D. Murphy // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 2007. – Т. 44, № 4. – С. 809–821.
26. Wie, B. Solar sail attitude control and dynamics, part 1 [Текст] / B. Wie // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2004. – Т. 27, № 4. – С. 526–535.
27. Mu, J. Reflectivity-controlled solar sail formation flying for magnetosphere mission [Текст] / J. Mu, S. Gong, J. Li // *Aerospace Science and Technology*. – 2013. – Т. 30, № 1. – С. 339–348.
28. Macdonald, M. Heliocentric solar sail orbit transfers with locally optimal control laws [Текст] / M. Macdonald, C.R. McInnes, B. Dachwald // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 2007. – Т. 44, № 1. – С. 273–276.
29. Longuski, J.M. Optimal control with aerospace applications [Книга] / J.M. Longuski, J.J. Guzmán, J.E Prussing // New York: Springer. – 2014. – Т. 32.
30. Старинова, О.Л. Расчёт межпланетных перелетов КА с малой тягой [Книга] / О.Л. Старинова. – Самара: Самарский научный центр РАН. – 2007. – 196 с.

31. Maxwell, J.C. A treatise on electricity and magnetism [Книга] / J.C. Maxwell // Oxford: Clarendon Press. – 1873. – Т. 1.
32. Цандер, Ф. Проблема полета при помощи ракетных аппаратов [Книга] / Ф. Цандер // Рипол Классик. – 2013. – 237 с.
33. Logsdon, J.M. Missing Halley's comet: the politics of big science [Текст] / J.M. Logsdon // Isis. – 1989. – Т. 80, № 2. – С. 254–280.
34. Tsuda, Y. Achievement of IKAROS—Japanese deep space solar sail demonstration mission [Текст] / Y. Tsuda, O. Mori, R. Funase [и др.] // Acta Astronautica. – 2013. – Т. 82, № 2. – С. 183–188.
35. Bidy, C. LightSail-1 solar sail design and qualification [Текст] / C. Bidy, T. Svitek // Proceedings of the 41st Aerospace Mechanisms Symposium. – Pasadena, CA: Jet Propulsion Lab., National Aeronautics and Space Administration. – 2012. – С. 451–463.
36. Spencer, D.A. The LightSail 2 solar sailing technology demonstration [Текст] / D.A. Spencer, B. Betts, J.M. Bellardo [и др.] // Advances in Space Research. – 2021. – Т. 67, № 9. – С. 2878–2889.
37. McNutt, L. Near-earth asteroid (NEA) scout [Текст] / L. McNutt, L. Johnson, D. Clardy [и др.] // AIAA Space 2014 Conference and Exposition. – 2014. – С. 4435.
38. Albarado, T.L. Electron exposure measurements of candidate solar sail materials [Текст] / T.L. Albarado // ASME Journal of Solar Energy Engineering. – 2005. – Т. 127, № 1. – С. 125–130.
39. Hu, H. Key technologies of solar sail spacecraft [Текст] / H. Hu // Journal of Deep Space Exploration. – 2016. – Т. 3, № 4. – С. 334–344.
40. Johnson, L. NanoSail-D: A solar sail demonstration mission [Текст] / L. Johnson, M. Whorton, A. Heaton [и др.] // Acta astronautica. – 2011. – Т. 68, № 5–6. – С. 571–575.
41. Mori, O. IKAROS and extended solar power sail missions for outer planetary exploration [Текст] / O. Mori, Y. Tsuda, H. Sawada // Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan. – 2012. – Т. 10, № 28. – С. 13–20.

42. Miura, K. 2-D Array experiment on-board a space flyer unit [Текст] / К. Miura, M. Natori // Space Solar Power Review. – 1985. – Т. 5, № 4. – С. 345–356.
43. Liu, J. Research on dynamic modeling and control of solar sail spacecraft with complex mechanisms and structures [Текст] / J. Liu // Harbin: Harbin Institute of Technology. – 2012.
44. Garwin, R.L. Solar Sailing—A Practical Method of Propulsion Within the Solar System [Текст] / R.L. Garwin // Jet Propulsion. – 1958. – Т. 28, № 3. – С. 188–190.
45. Зимин, В.Н. К расчету главного вектора и главного момента сил светового давления на солнечный парус [Текст] / В.Н. Зимин, Н.А. Неровный // Вестник Московского государственного технического университета им. НЭ Баумана, Серия «Машиностроение». – 2016, № 1 (106). – С. 17–28.
46. Рожков, М.А. Влияние оптических характеристик многослойного солнечного паруса на его гелиоцентрическое движение [Текст] / М.А. Рожков // Вестник Самарского университета, Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2022. – Т. 21, № 4. – С. 52–65.
47. Рожков, М.А. Баллистический анализ транспортировочной системы Земля–Марс–Земля на базе солнечных парусов [Текст] / М.А. Рожков, О.Л. Старинова // XLVI Академические чтения по космонавтике. – 2022. – С. 395–397.
48. Шиманчук, Д.В. Управляемое движение солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации [Текст] / Д.В. Шиманчук, А.С. Шмыров, В.А. Шмыров // Письма в астрономический журнал. – 2020. – Т. 46, № 3. – С. 193–200.
49. Kirpichnikov, S.N. Planar heliocentric roto-translatory motion of a spacecraft with a solar sail of complex shape [Текст] / S.N. Kirpichnikov, E.S. Kirpichnikova, E.N. Polyakhova // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 1995, Т. 63. – С. 255–269.
50. Dean, S. Ultra-Thin Solar Sails for Interstellar Travel—Phase I Final Report [Текст] / S. Dean, Z. Robert // NASA Institute for Advanced Concepts. – 1999.
51. O’Shaughnessy, D.J. Fire Sail: MESSENGER’s use of solar radiation pressure for accurate Mercury flybys [Текст] / D.J. O’Shaughnessy, J.V. McAdams, K.E.

- Williams, B.R. Page // *Advances in the Astronautical Sciences*. – 2009. – T. 133, № 1.
52. Bookless, J. Dynamics and control of displaced periodic orbits using solar-sail propulsion [Текст] / J. Bookless, C. McInnes // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2006. – Т. 29, № 3. – С. 527–537.
53. Bošković, J.D. Robust adaptive variable structure control of spacecraft under control input saturation [Текст] / J.D. Bošković, S.M. Li, R.K. Mehra // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2001. – Т. 24, № 1. – С. 14–22.
54. Walmsley, M. Optimal Trajectories for Planetary PoleSitter Missions [Текст] / M. Walmsley, J. Heiligers, M. Ceriotti, C. McInnes // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2016. – Т. 39, № 10. – С. 2461–2468.
55. Ozimek, M.T. Design of Solar Sail Trajectories with Applications to Lunar South Pole Coverage [Текст] / M.T. Ozimek, D.J. Grebow, K.C. Howell // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2009. – Т. 32, № 6. – С. 1884–1897.
56. Heidmann, J. A proposal for a radio frequency interference-free dedicated lunar far side crater for high sensitivity radioastronomy: programmatic issues [Текст] / J. Heidmann // *Acta Astronautica*. – 2000. – Т. 46, № 8. – С. 555–558.
57. Li, S. Direct evidence of surface exposed water ice in the lunar polar regions [Текст] / S. Li, P.G. Lucey, R.E. Milliken // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 2018. – Т. 115, № 36. – С. 8907–8912.
58. Binder, A.B. Lunar prospector: overview [Текст] / A.B. Binder // *Science*. – 1998. – Т. 281, № 5382. – С. 1475–1476.
59. Robinson, M.S. Lunar reconnaissance orbiter camera (LROC) instrument overview [Текст] / M.S. Robinson, S.M. Brylow, M. Tschimmel [и др.] // *Space science reviews*. – 2010. – Т. 150. – С. 81–124.
60. Colaprete, A. An overview of the lunar crater observation and sensing satellite (LCROSS) [Текст] / A. Colaprete, R.C. Elphic, J. Heldmann, K. Ennico // *Space Science Reviews*. – 2012. – Т. 167. – С. 3–22.
61. Kato, M. The Kaguya mission overview [Текст] / M. Kato, S. Sasaki, Y. Takizawa, the Kaguya project team // *Space science reviews*. – 2010. – Т. 154. – С. 3–19.

62. Dachev, T.P. An overview of RADOM results for earth and moon radiation environment on Chandrayaan-1 satellite [Текст] / T.P. Dachev, B.T. Tomov, Yu.N. Matviichuk [и др.] // *Advances in space research*. – 2011. – Т. 48, № 5. – С. 779–791.
63. Sweetser, T.H. ARTEMIS mission design [Текст] / T.H. Sweetser, S.B. Broschart, V. Angelopoulos [и др.] // *The ARTEMIS Mission*. – 2014. – С. 61–91.
64. Xu, L. A Brief Introduction to the International Lunar Research Station Program and the Interstellar Express Mission [Текст] / L. Xu, H. Li, Z. Pei, Y. Zou, C. Wang // *Chinese Journal of Space Science*. – 2022. – Т. 42, № 4. – С. 511–513.
65. Жданов, В.Л. Российско-китайское международное сотрудничество в области освоения космоса / В.Л. Жданов // *Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы, достижения и инновации*. – 2022. – С. 313–315.
66. Domingo, V. The SOHO mission: an overview [Текст] / V. Domingo, B. Fleck, A.I. Poland // *Solar Physics*. – 1995. – Т. 162. – С. 1–37.
67. Gardner, J.P. The James Webb space telescope mission [Текст] / J.P. Gardner, J.C. Mather, R. Abbott [и др.] // *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*. – 2023. – Т. 135, № 1048. – С. 068001.
68. Zhang, L. Development and prospect of Chinese lunar relay communication satellite [Текст] / L. Zhang // *Space: Science & Technology*. – 2021.
69. Newton, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica* [Книга] / I. Newton // *Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater*. – 2022.
70. Musielak, Z.E. The three-body problem [Текст] / Z.E. Musielak, B. Quarles // *Reports on Progress in Physics*. – 2014. – Т. 77, № 6. – С. 065901.
71. Qiu, D.W. The global solution of the n-body problem [Текст] / D.W. Qiu // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. – 1990. – Т. 50. – С. 73–88.
72. Simó, C. New families of solutions in N-body problems [Текст] / C. Simó // *European Congress of Mathematics: Barcelona*. – 2001. – Т. 1. – С. 101–115.

73. Hénon, M. Exploration Numérique du Problème Restreint. II. Masses égales, stabilité des orbites périodiques [Текст] / M. Hénon // Annales d'Astrophysique. – 1965. – Т. 28. – С. 992–1007.
74. Richardson, D.L. A note on a Lagrangian formulation for motion about the collinear points [Текст] / D.L. Richardson // Celestial Mechanics. – 1980. – Т. 22, № 3. – С. 231–236.
75. Howell, K. Three-dimensional, periodic, halo orbits [Текст] / К. Howell // Celestial mechanics. – 1984. – Т. 32, № 1. – С. 53–71.
76. Zagouras, C. Three-dimensional periodic oscillations generating from plane periodic ones around the collinear Lagrangian points [Текст] / C. Zagouras, P. Kazantzis // Astrophysics and Space Science. – 1979. – Т. 61, № 2. – С. 389–409.
77. Markellos, V. Numerical Determination of Asymmetric Periodic Solutions [Текст] / V. Markellos, A. Halioulias // Astrophysics and Space Science. – 1977. – Т. 46. – С. 183–193.
78. Tsu, T.C. Interplanetary travel by solar sail [Текст] / T.C. Tsu // Ars Journal. – 1959. – Т. 29, № 6. – С. 422–427.
79. Collocation method [Электронный ресурс] // Wikipedia. – URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Collocation\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Collocation_method) (дата обращения: 25.04.2024).
80. Ascher, U.M. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations [Книга] / U.M. Ascher, L.R. Petzold // Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1998
81. Shampine, L.F. A BVP Solver based on residual control and the MATLAB PSE. [Текст] / L.F. Shampine, J. Kierzenka // ACM Trans. Math. Softw. – 2001. – Т. 27, № 3. – С. 299–316.
82. Shampine, L.F. Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in MATLAB with bvp4c [Текст] / L.F. Shampine, M.W. Reichelt, J. Kierzenka // MATLAB File Exchange. – 2000. – С. 1–27.
83. Allgower, E.L. Introduction to numerical continuation methods [Текст] / E.L. Allgower, K. Georg // Society for Industrial and Applied Mathematics. – 2003.

84. Numerical continuation [Электронный ресурс] // Wikipedia. – URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical\\_continuation](https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_continuation) (дата обращения: 25.04.2024).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

$\gamma_L$  – расстояние от точки либрации (L1, L2 или L3) до ближайшего небесного тела (Земли или Луны).

$$c_k = \frac{1}{\gamma_L^3} \left[ (\pm 1)^n \mu + (-1)^n \frac{(1-\mu)\gamma_L^{n+1}}{(1 \mp \gamma_L)^{n+1}} \right], \text{ для точек L1 и L2;}$$

$$c_k = \frac{1}{\gamma_L^3} \left[ 1 - \mu + \frac{\mu\gamma_L^{n+1}}{(1+\gamma_L)^{n+1}} \right], \text{ для точки L3.}$$

$$\lambda^4 + (c_2 - 2)\lambda^2 - (c_2 - 1)(2c_2 + 1) = 0,$$

$$\Delta = \frac{\lambda^2}{4} - c_2,$$

$$k = \frac{1}{2\lambda} (\lambda^2 + 1 + 2c_2),$$

$$d_1 = \frac{3\lambda^2}{k} [k(6\lambda^2 - 1) - 2\lambda],$$

$$d_2 = \frac{8\lambda^2}{k} [k(11\lambda^2 - 1) - 2\lambda]$$

$$a_{21} = \frac{3c_3(k^2 - 2)}{4(1 + 2c_2)},$$

$$a_{22} = \frac{3c_3}{4(1 + 2c_2)},$$

$$a_{23} = -\frac{3c_3\lambda}{4kd_1} [3k^3\lambda - 6k(k - \lambda) + 4],$$

$$a_{24} = -\frac{3c_3\lambda}{4kd_1} (3k\lambda + 2),$$

$$d_{21} = -\frac{c_3}{2\lambda^2},$$

$$d_{31} = \frac{3}{64\lambda^2} (4c_3a_{24} + c_4),$$

$$d_{32} = \frac{3}{64\lambda^2} [4c_3(a_{23} - d_{21}) + c_4(4 + k^2)],$$

$$a_1 = -\frac{3}{2}c_3(2a_{21} + a_{23} + 5d_{21}) - \frac{3}{8}c_4(12 - k^2),$$

$$a_2 = \frac{3}{2}c_3(a_{24} - 2a_{22}) + \frac{9}{8}c_4,$$

$$b_{21} = -\frac{3c_3\lambda}{2d_1}(3k\lambda - 4),$$

$$b_{22} = \frac{3c_3\lambda}{d_1},$$

$$s_1 = \frac{1}{2\lambda[\lambda(1+k^2) - 2k]} \left\{ \frac{3}{2}c_3[2a_{21}(k^2 - 2) - a_{23}(k^2 + 2) - 2kb_{21}] - \frac{3}{8}c_4(3k^4 - 8k^2 + 8) \right\},$$

$$s_2 = \frac{1}{2\lambda[\lambda(1+k^2) - 2k]} \left\{ \frac{3}{2}c_3[2a_{22}(k^2 - 2) + a_{24}(k^2 + 2) + 2kb_{22} + 5d_{21}] + \frac{3}{8}c_4(12 - k^2) \right\},$$

$$l_1 = a_1 + 2\lambda^2 s_1,$$

$$l_2 = a_2 + 2\lambda^2 s_2,$$

$$l_1 A_x^2 + l_2 A_z^2 + \Delta = 0,$$

$$\omega_1 = 0,$$

$$\omega_2 = s_1 A_x^2 + s_2 A_z^2,$$

$$\omega = 1 + \omega_1 + \omega_2,$$

$$\tau_1 = \lambda\omega,$$

$$b_{31} = \frac{3}{8d_2} \left\{ 8\lambda[3c_3(kb_{21} - 2a_{23}) - c_4(2 + 3k^2)] + (9\lambda^2 + 1 + 2c_2)[4c_3(ka_{23} - b_{21}) + kc_4(4 + k^2)] \right\},$$

$$b_{32} = \frac{1}{d_2} \left\{ 9\lambda[c_3(kb_{22} + d_{21} - 2a_{24}) - c_4] + \frac{3}{8}(9\lambda^2 + 1 + 2c_2)[4c_3(ka_{24} - b_{22}) + kc_4] \right\},$$

$$a_{31} = -\frac{9\lambda}{4d_2} [4c_3(ka_{23} - b_{21}) + kc_4(4 + k^2)] + \frac{9\lambda^2 + 1 - c_2}{2d_2} [3c_3(2a_{23} - kb_{21}) + c_4(2 + 3k^2)],$$

$$a_{32} = -\frac{1}{d_2} \left\{ \frac{9\lambda}{4} [4c_3(ka_{24} - b_{22}) + kc_4] + \frac{3}{2}(9\lambda^2 + 1 - c_2)[c_3(kb_{22} + d_{21} - 2a_{24}) - c_4] \right\}.$$