

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

**Чжоу Сяо**

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ  
С МАЛОЙ ТЯГОЙ В ЗАДАЧЕ НЕКОМПЛАНАРНОГО СБЛИЖЕНИЯ  
С ПАССИВНЫМ ОБЪЕКТОМ**

2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением  
летательных аппаратов

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, профессор  
Ишков Сергей Алексеевич

Самара - 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1 Состояние задачи управления относительным движением космического аппарата.....	14
1.1 Развитие российских и зарубежных технологий сближения КА на орбите.....	14
1.2 Управление КА в задаче сближения с использованием импульсной и конечной тяги.....	17
1.3 Классификация двигателей КА малой тяги .....	18
1.4 Уравнение относительного движения космических объектов .....	22
1.5 Методы решения краевой задачи.....	27
1.5.1 Метод Ньютона.....	27
1.5.2 Метод коллокации .....	29
1.5.3 Метод гомотопии .....	30
2 Оптимальное управление с свободной ориентацией вектора тяги	33
2.1 Уравнения относительного движения в цилиндрической системе координат.....	33
2.2 Безразмерные уравнения относительного пространственного движения.....	42
2.3 Постановка задачи оптимизации управления относительным движением в задаче сближения.....	43
2.4 Оптимизация с использованием принципа максима Понтрягина .....	45
2.5 Оптимальное управление по быстродействию.....	48

2.5.1 Численное моделирование при типовых условиях .....	49
2.5.2 Влияние начальных фаз $\varphi$ и $\varphi_z$ .....	56
2.5.3 Влияние начальных значениях $l_0$ и $l_{z0}$ .....	57
2.5.4 Поэтапное управление.....	60
2.6 Оптимальное управление по критерию моторного времени .....	62
3 Оптимальное управление ориентации тяги в плоскости местного горизонта.....	70
3.1 Оптимальное управление по быстрдействию.....	72
3.2 Оптимальное управление по моторному времени .....	78
4 Номинальное управление в задаче сближения космического аппарата и пассивного объекта .....	83
4.1 Методика формирования номинального управления.....	84
4.1.1 Участок формирования большой полуоси орбиты КА2 .....	85
4.1.2 Участок фазирования.....	86
4.1.3 Участок точного наведения .....	94
4.2 Численные расчёты.....	95
Заключение .....	103
Список литературы .....	105

## Введение

В диссертации исследуются задачи оптимального управления движением космического аппарата (КА) с двигателем малой тяги при выполнении им орбитального пространственного сближения с пассивным объектом (сближение на некомпланарных орбитах) включая этапы фазирования, дальнего и ближнего наведения.

**Актуальность темы исследования.** Задача оптимизации управления относительным движением космического аппарата (КА) с двигателем малой тяги имеет большое практическое значение для задачи выведения космических объектов на околоземную орбиту, задачи формирования группы орбитальных спутниковых систем, [1] задачи управления движением специальных КА [2], предназначенных для захвата космического мусора. [3].

Будущая тенденция - использовать малую тягу для выполнения серии манёвров КА, таких как переход на орбиту и сближение космических кораблей. Однако из-за малой тяги и большего времени перелёта обычно уравнения движения часто сильно нелинейные и имеют плохую сходимость при решении задач оптимального управления.

Исследование оптимизации управления относительным движением космического аппарата в конечном итоге сводится к решению двухточечных краевых задач. В качестве критерии оптимизации в задаче управления относительным движением обычно принимают минимум общего времени перелёта (задача быстрогодействия) или минимум моторного времени (задача минимума времени работы двигательной установки) при фиксированном времени перелёта.

Важные результаты исследований по теоретическим основам задач управления относительным движением, методу построения оптимального управления и методу решения краевой задачи получены многими учеными. В

работах Аппазова Р. Ф. [4], Константинова М. С. [5], Эльясберга П. Е. [6], Clohessy W. H. [7], Балахонцева В. Г. [8] и Баранова А. А. [9] представлены теоретические основы задач управления относительным движением, разработаны математические модели относительного движения и получены частные решения для импульсного или непрерывного управления.

Методы решения задачи оптимального управления относительным движением КА с двигательной установкой конечной тяги можно разделить на прямой метод и косвенный.

Прямой метод является методом оптимизации дискретизированной задачи. Прямому методу не нужно выводить условие оптимального управления, но он напрямую дискретизирует переменную состояния или переменную управления во временном узле, тем самым преобразовывая уравнение движения и уравнение ограничения в ряд ограничений равенства или неравенства. Таким образом, исходная задача оптимального управления преобразуется в задачу нелинейного программирования конечной размерности.

В работе Улыбышева [10] получено решение задачи оптимальной траектории сближения при непрерывной тяге путем дискретизации сегментированной траектории космического аппарата и её оптимизации псевдоимпульсным методом на каждом сегменте.

Чжоу, Линь и Дуань [11] использовали стратегию дифференциальных уравнений Ляпунова для решения оптимального управления в задаче сближения с ограничениями на управление в рамках модели Tschauner-Hempel путем преобразования дифференциального уравнения Риккати в методе LQR (Linear quadratic regular) в линейное уравнение.

Брегер и Хоу [12] исследовали оптимальные безопасные траектории сближения с малой тягой, т. е. искали оптимальную стратегию сближения в условиях предотвращения столкновений.

Ван Хуа и др. использовали сегментные полиномы для дискретизации оптимальной задачи и исследовали оптимальное управление с ограничением на ориентацию тяги в задаче сближения, решая задачи нелинейного программирования.[13]

Чжан Цюхуа и др. использовали метод прямой множественной съемки для исследования задачи сближения при малом начальном относительном расстоянии в условиях фиксированного времени.[14]

Для случая эллиптической орбиты Шарма, Сенгупта и Вадали [ 15 ] разработали приближенный метод оптимального управления с обратной связью для сближения на нелинейной модели.

Сенгупта и Вадали [16] дали метод оптимального управления с обратной связью для линейной модели относительного движения Tschauner-Nempel (модель ТН) в условиях конечной малой тяги.

Уолл и Конвей [17] использовали метод, основанный на приближенном решении траектории с малой тяги, которое может быть использовано в качестве начального предположения для решения задачи оптимального сближения на орбите, причём этот метод применим как для случая свободного, так и фиксированного общего времени перелёта.

Косвенный метод в основном основан на принципе максимума Понтрягина [18] для решения оптимальной задачи. Косвенный метод преобразует исходную задачу в двухточечную краевую задачу путем введения сопряженных переменных для построения функции Гамильтона и получения необходимых условий первого порядка для решения задачи с помощью принципа максимума Понтрягина. Сопряженные переменные, вводимые в косвенном методе, не имеют конкретного физического смысла, и трудно оценить их начальные значения, поэтому для общих нелинейных задач оптимального управления обычно невозможно получить точные аналитические решения.

К косвенным методам: в работах Баранова А. А. [9, 19, 20], Ишкова С. А. [21], Лебедева В. Н. [22], Миронова В. И. [23] и Салмина В. В. [24, 25] применяются принцип максимума Понтрягина, динамическое программирование Беллмана, метод неопределённых множителей Лагранжа.

В работе В. Н. Лебедева [22] с использованием метода принципа максимума Понтрягина получены несколько решений различных задач оптимального управления, но регулярность и сходимости этих решений для произвольных граничных условий не обеспечены.

В работах Салмина В. В. [24 –25] методом динамического программирования Беллмана [ 26 ] разработан трёх-шаговый алгоритм приведения космического аппарата в точку стояния геостационарной орбиты.

В работах Баранова А. А. [9, 19, 20], на основе теории базис-векторов получено невырожденное шести импульсное решение оптимального управления в задаче сближения.

В работах [ 27 , 28 ] проведено подробное сравнение и описание оптимизации перелёта в задаче сближения с малой тягой методом принципа максимума Понтрягина.

Харгрейвс и др. представил применению метода коллокации для решения оптимального управления по времени в примере задачи перехвата [29].

Грин использовал метод косвенной стрельбы для решения двухточечной краевой задачи и решил задачу оптимального перелёта минимального расхода топлива для случая компланарного сближения [30].

Миле, Вискс [31,32] дали оптимальную стратегию сближения с конечной тягой при различных условиях (например, время сближения задано или свободно, топливо задано или свободно), используя последовательный градиентно-восстановительный алгоритм ((Sequential gradient-restoration

algorithm)), но этот метод применим только для случая круговой опорной орбиты.

Для непрерывной малой тяги Картер [33] исследовал задачу сближения на круговой орбите для линейных относительных уравнений в модели Хилл-Клохесси-Уилтшира с конечной тягой и далее Картер и Пардис [34] исследовали задачу оптимального сближения при ограничениях на ориентацию тяги как сверху, так и снизу.

Картер [35], Чо [36] и др. получили аналитическое решение задачи оптимального по расходу топлива сближения на линейной эллиптической орбите с использованием принципа максимума Понтрягина.

В работах Войсковский, А. П., Красильщикова М. Н. и т.д. [37, 38] многокритериальная оптимизация траекторий относительного движения выполнена комбинированным методом, сочетающим косвенные и прямые методы.

Для решения краевой задачи, связанной с поиском оптимального управления, широко используются такие методы, как: генетические эволюционные алгоритмы (Luo Y. Z. [39], Li H. Y. [40, 41]), метод косвенной стрельбы (Greenwood D. T., Kern E. A.), метод коллокаций (Hargraves C. R., Paris S. W. [29], Zhang Q. H. [14]), метод Ньютона (Greenwood D. T., Kern E. A. [30]), метод гомотопии (Li J. F., Jiang F. H. [27]).

Как показал проведенный анализ источников, задача оптимизации траекторий относительного движения с малой тягой для случая сближения космических объектов на некомпланарных орбитах ставилась редко, исследована недостаточно и является **актуальной**.

**Цель исследования:** разработка методики построения оптимального управления относительным движением космического аппарата с малой тягой в

задаче пространственного сближения по критерию минимума общего времени перелёта, по критерию минимума моторного времени с пассивным объектом.

**Объектом исследования** является оптимальное управление пространственным относительным движением космического аппарата с двигателем малой тяги.

**Предметом исследования** являются методики формирования номинальных оптимальных программ управления КА при свободной ориентации вектора тяги и ориентации в плоскости местного горизонта, а также перелётов с пассивными участками.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Разработка математической модели пространственного относительного движения маневрирующего космического аппарата инвариантной к параметрам опорной орбиты и величине ускорения от тяги.

2. Построение методик определения оптимальных программ управления. Исследование структур управления пространственным относительным движением с использованием принципа максимума Понтрягина при свободной ориентации вектора тяги по критерию быстродействия, по критерию минимума моторного времени для типовых граничных условий.

3. Получение оптимальных программ управления при ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта. Анализ степени эффективности для сокращения моторного времени сравнительно с управлением с свободной ориентацией при фиксированном общем времени.

4. Моделирование номинального управления, в задаче сближения космического аппарата и пассивного объекта с учётом фазирования на этапах дальнего и ближнего наведения.

Для решения поставленных задач использовались следующие методы исследований: линейная теория возмущений, методы теории оптимального управления, методы вычислительной и высшей математики.

Для решения поставленных задач использовались следующие **методы исследований**: линейная теория возмущений, методы теории оптимального управления, методы вычислительной и высшей математики.

### **Научная новизна полученных результатов.**

В диссертации получены новые научные результаты:

1. Разработана безразмерная математическая модель с использованием параметров векового и периодического относительного движения, описывающая пространственное сближение маневрирующего КА с малой тягой и пассивного объекта на околокруговых орбитах и получена оценка точности модели.

2. На основе принципа максимума Понтрягина разработана методика формирования оптимального управления пространственным относительным движением космического аппарата с малой тягой при свободной ориентации вектора тяги по критерию быстродействия, по критерию минимума моторного времени.

3. На основе принципа максимума Понтрягина разработана методика формирования оптимального управления пространственным относительным движением КА с малой тягой при ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта.

4. Разработана методика формирования номинального управления КА с двигателем малой тяги, в задаче сближения с пассивным объектом, находящейся на высокой околоземной орбите с учётом фазирования на этапах дальнего и ближнего наведения.

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается корректным использованием линейной теории возмущений, классических вычислительных методов, апробированных методов теории оптимального управления и согласованностью полученных результатов с известными результатами по исследованию относительного движения КА.

**Теоретическая значимость** работы заключается в построении методик определения оптимального управления при некомпланарном сближении КА с непрерывной и дискретной малой тягой методом принципа максимума Понтрягина.

**Практическая значимость** разработано программно-математическое обеспечение, предназначенное для формирования оптимального номинального управления относительным движением КА с малой тягой.

#### **Положения, выносимые на защиту**

1. Безразмерная математическая модель с использованием параметров векового и периодического относительного движения, описывающая пространственное сближение КА с малой тягой на околокруговых орбитах.
2. Оптимальные программы управления относительным движением по критерию быстродействия, по критерию минимума моторного времени при свободной тяге и при ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта;
3. Методики решения задачи о перелёте космического аппарата с малой тягой, с низкой орбиты выведения на высокую на околоземную орбиту в окрестность пассивного объекта с учётом фазирования на этапах дальнего и ближнего наведения.

**Область исследований** соответствует следующим пунктам направлений исследования паспорта научной специальности 2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов: пункту 1 – Разработка и

совершенствование математических моделей, используемых для описания движения и управления летательным аппаратом на различных режимах полета, пункту 8 – Синтез терминального управления движением ЛА, пункту 12 – Совершенствование методов навигации и управления движением летательных аппаратов, совершенствование баллистико-навигационного обеспечения полета летательных аппаратов. Разработка новых методов оптимизации состава навигационных измерений и методов планирования навигационных измерений. Разработка методов оптимальной обработки навигационной информации.

**Личный вклад автора.** Все научные результаты и результаты, вынесенные на защиту, получены автором самостоятельно. Автором самостоятельно проведены теоретические исследования и вычислительные эксперименты, подтверждающие основные положения, выводы и рекомендации. Все публикации по работе подготовлены автором самостоятельно или при его определяющем участии.

**Апробация работы.** Основные научные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на XXV Всероссийском семинаре по управлению движением и навигацией летательных аппаратов. (г. Самара, 2022 г.). Международном семинаре «Навигация и управление движением» (NMC 2022) (г. Саратов, 2022 г.). XXVI Всероссийском семинаре по управлению движением и навигацией летательных аппаратов (г. Самара, 2023 г.).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 5 работ, 2 из которых в ведущих рецензируемых научных журналах, определённых Высшей аттестационной комиссией Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, 1 - в изданиях индексируемых Scopus.

**Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы (71 наименование). Объём работы составляет 113 страниц, содержит 30 рисунков, 12 таблиц.

## **1 Состояние задачи управления относительным движением космического аппарата**

В связи с растущим спросом на космические полеты способность надежно и эффективно эксплуатировать космические аппараты в течение длительных периодов времени в сложных космических условиях при низких затратах стала одним из ключевых приоритетов исследований в области космической техники. С завершением первого в истории сближения космических аппаратов [42, 43] исследования по сближению космических кораблей на орбите привлекают все больше и больше внимания со стороны всех аэрокосмических держав мира и привели к значительным технологическим прорывам и достижениям [44, 45, 46].

### **1.1 Развитие российских и зарубежных технологий сближения КА на орбите**

В 1960-х годах Соединенные Штаты Америки выполнили множество миссий по сближению и стыковке, которые заложили основу для исследований и разработок последующих технологий сближения. С постепенным развитием аэрокосмических технологий Соединенные Штаты Америки последовательно завершили сборку на орбите телескопа "Хаббл", сборку на орбите и техническое обслуживание Международной космической станции, а также восстановление на орбите спутников. Для технологии беспилотного сближения на орбите Соединенные Штаты Америки реализовали Программу спутниковой системы (XSS), Программу автономного спутника для проверки технологии сближения (DART) и др. Проект Orbital Express (Орбитальный экспресс), который был разработан и осуществлен США в 2007 году, завершил несколько месяцев демонстраций обслуживания на орбите и выполнил ряд ключевых технологий обслуживания на орбите, таких как автономное маневренное сближение и сближение на дальнем и близком расстоянии, стыковочные операции и захват космического объекта, что является важной вехой в истории

технологий сближения космических аппаратов. В последние годы США также провели ряд наземных экспериментов, таких как проект инженерного испытательного спутника (ETV), проект автономной стыковки и обслуживания космических аппаратов на орбите (AUDASS).



Рисунок 1 – Схема проекта Orbital Express

Исследования европейских стран в области сближения космических аппаратов в основном сосредоточены на низкоорбитальных и синхронно-орбитальных космических аппаратах. ЕКА запустило Программу ROGER, автоматических транспортных средств (ATV) и другие программы. Кроме того, DLR выполняла и участвовала в разработке таких проектов, как экспериментальный сервисный спутник (ESS), орбитальная сервисная миссия (DEOS), орбитальная система продления жизни (OLEV) и программа Hermes. орбитальное сближение и другие связанные с ним технологии были дополнительно исследованы и проверены.

Китай осуществил первое пилотируемое космическое сближение и стыковку 3 ноября 2011 года, за которым последовало несколько успешных стыковок космического корабля «Шэньчжоу» с космической станцией "Тяньгун-1", что ознаменовало зрелость китайской технологии сближения и стыковки. В 2017 году успешно осуществлены сближение и стыковка кораблей «Тяньгун-2» и «Тяньчжоу-1», успешно завершено пополнение запасов груза и топлива на орбите. Кроме того, Китай впоследствии разработал и запустил

космические аппараты, такие как «Эксперимент-7», «Аолун-1» и «Экспериментальное устройство для дозаправки на орбите», а также успешно завершил космические испытания по удалению космического мусора и обслуживанию орбиты.



Рисунок 2 – Схема сближения и стыковка кораблей «Тяньгун-1» и «Шэньчжоу»

С момента завершения первого в мире сближения первые изобретатели и разработчики системы взаимных измерений положений КА из НИИ ТП (Научно-исследовательский институт точных приборов, компания холдинга «Российские космические системы» Госкорпорации «Роскосмос») разработали три поколения систем автоматической стыковки, не считая различных её модификаций. Принципиально новая система для сближения космических аппаратов разрабатывается в НИИ ТП. Эта система будет применяться на околоземных орбитах и в дальнем космосе, например, у Луны. ОКБ-1 разработало идеологию модели сближения КА. Они использовали вариант автоматической стыковки, когда один КА «активный», а другой «пассивный». Активный аппарат ищет в пространстве пассивный аппарат и осуществляет обнаружение, подход к нему, сближение и причаливание. В этом случае

пассивный аппарат выполняет более простые функции: он должен как-то ориентироваться в пространстве и служить маяком для активного аппарата. Активный КА содержит систему радионаведения, позволяющую вести поиск в пространстве пассивного КА, измерять параметры относительного движения спутников и передавать соответствующие сигналы на систему ориентации и автоматического управления движением аппарата.

## **1.2 Управление КА в задаче сближения с использованием импульсной и конечной тяги**

По величине тяговооружённости двигателя и режима его работы в задаче сближения тяга может быть разделена на импульсную (большая тяга) и малую тягу. Сначала многими учеными проведено большое количество исследований орбитальных сближениях с импульсной тягой на основе базис-вектора Лоудена [47,48]. Маневр импульсной тяги имеет большую амплитуду тяги, короткое время работы двигателя и возможность быстрого изменения скорости, что широко используется в орбитальных миссиях сближения.

С развитием аэрокосмической промышленности и совершенствованием вычислительных методов, а также учитывая большие преимущества малой тяги, ученые стали проявлять большой интерес к использованию модели непрерывной малой тяги для орбитальных сближения и проводить соответствующие исследования.

В исследованиях, основанных на орбитальных маневрах с импульсной тягой, орбита КА может быть упрощена как орбита Кеплера. В реальности во время движения КА неизбежно подвергается воздействию других факторов. Если взять в качестве примера околоземной орбиты, то такие возмущения, как несферическое возмущение Земли, гравитационная сила других небесных тел, атмосферное сопротивление и давление солнечного света, будут оказывать значительное влияние на движение КА. В этом случае часто требуются орбитальные коррекции малыми импульсами. Кроме того, с развитием дальнего

космоса становится все больше и больше охват задач перелёта на орбиту, а требования к скорости, и высокой точности становятся все сильнее и сильнее. Непрерывная автономная тяга имеет преимущества простого управления, многократного зажигания и небольшого размера двигателя и находит все более широкое применение. Однако нелинейность исходной модели относительного движения непрерывной малой тяги увеличивает сложность проектирования оптимальной траектории сближения, что также является сложностью при решении краевой задачи многих ученых.

Bevilacqua, Hall и Romano [49] дали оптимальное энергозатратное решение задачи сближения нескольких транспортных средств с использованием гибридного метода управления с малой тягой. Еленой [50] решил задачу сближения с минимумом топлива и непрерывной тяги с ограничениями на предотвращение столкновений, используя подход нелинейного программирования. Улыбышев [51] дал решение задачи оптимальной траектории сближения при непрерывной тяге путем дискретизации сегментированной траектории космического аппарата и её оптимизации псевдоимпульсным методом на каждом сегменте.

### **1.3 Классификация двигателей КА малой тяги**

В настоящее время российские и зарубежные институты последовательно предлагают новые двигательные установки, такие как солнечный парус, солнечный электрический двигатель, электромагнитный парус, ядерный двигатель, лазерный двигатель и электроракетный двигатель [52, 53].

Более подробная классификация электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) по принципу действия [54 - 57] приведена на Рисунке 3.

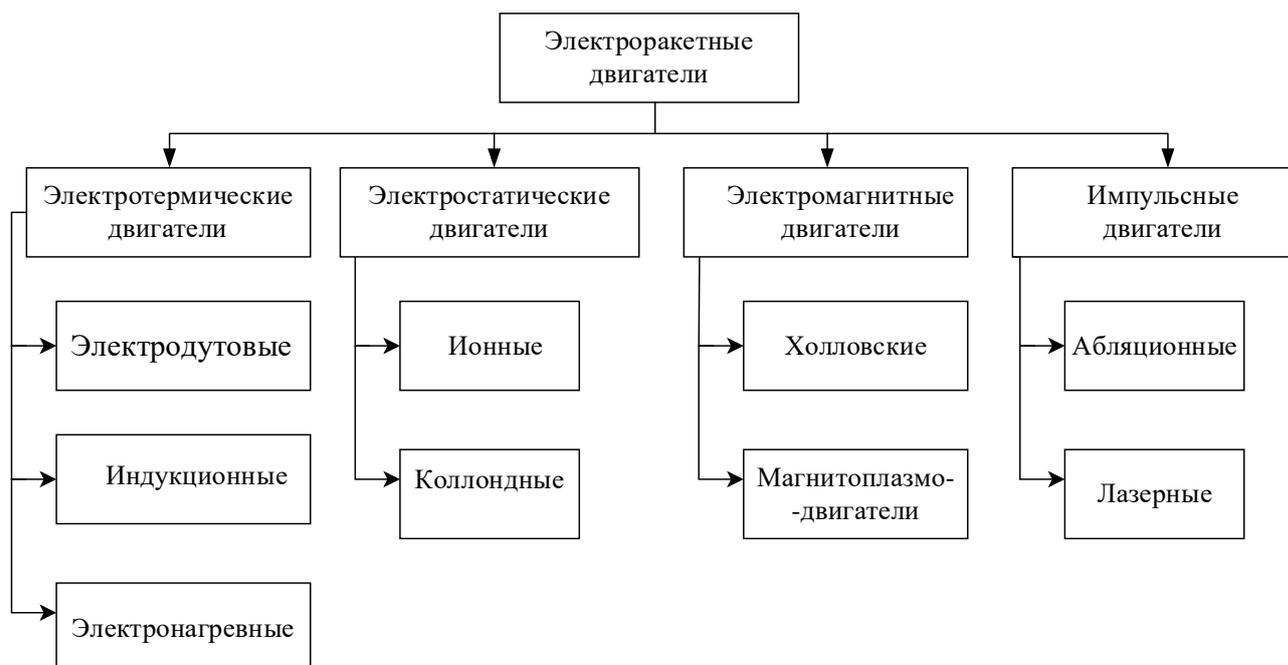


Рисунок 3 – Классификация ЭРДУ по принципу действия

В двигательной системе солнечного паруса для приведения космического аппарата в движение используются фотоны, попадающие на солнечный парус в процессе солнечного света. В настоящее время существуют миссии с использованием солнечных парусов, включая проект IKAROS 2010 Японского агентства аэрокосмических исследований (JAXA), НАСА NanoSail-D 2010 и так далее. ЭРДУ на солнечном парусе, также известная как ионный движитель, преобразует солнечную энергию в электрическую, а затем ускоряет ионы, создавая тягу для движения космического корабля. В настоящее время существуют такие космические аппараты с ЭРДУ на солнечных парусах, как DeepSpace1, запущенный НАСА в конце 1990-х годов, Hayabusa, запущенный JAXA в 2003 году, и Smart1, запущенный ESA в 2003 году. Электромагнитные движители солнечного паруса используют статическое магнитное поле для отклонения заряженных частиц от солнечного излучения, чтобы создать вращающий момент для движения космического аппарата. Лазерные двигательные установки используют лазеры, генерируемые наземными или космическими станциями, для приведения в движение космических аппаратов, а ядерные двигательные установки означают выработку электрической энергии

для приведения космических аппаратов в движение посредством ядерных химических реакций.

Из всех видов ЭРДУ наиболее развитыми и используемыми являются ионные двигатели и двигатели типа Холла (их принцип действия показаны на рисунке 4) из-за их относительно высоких характеристик, таких как удельный импульс, эффективность и ресурс. Электротермические и импульсно-плазменные двигатели используются относительно реже, в основном на малых КА.

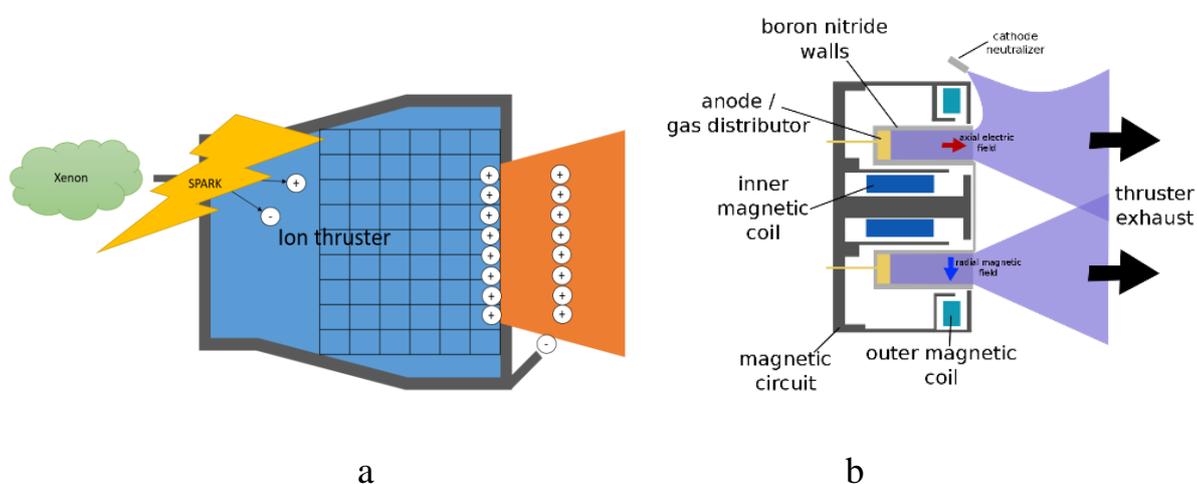


Рисунок 4 – Принцип действия ионного двигателя (а) и двигателя типа холла (b)

Существующие в настоящее время и перспективные ЭРДУ можно разделить на пять основных групп в зависимости от их мощности:

1. Мощность менее 1 кВт. Маломощные ЭРДУ используются для малых КА, например, ЭРДУ типа СПД-25, в основном используется для картографии, дистанционного зондирования, метеорологии, связи и навигации.

2. Мощность 1...2 кВт. Универсальные дешёвые ЭРДУ используются для коммерческих, телекоммуникационных и навигационных спутниковых систем.

3. Мощность около 5 кВт. Такие ЭРДУ подходят для тяжелых спутниковых платформ весом 3,5 ...5 тонн и способны не только корректировать и поддерживать орбиту, но и выводить КА на заданную орбиту с промежуточной.

4. Мощность 20 ... 30 кВт. Такие ЭРДУ используются для многоразового межорбитального и лунного транспортного буксира, способного не только самостоятельно перемещаться в космосе, но и перемещать другие спутники.

5. Мощность 35 ... 100 кВт. Такие ЭРДУ используются для межпланетного транспортного комплекса, способного транспортировать целую обитаемую базу с Земли на Марс.

ЭРДУ из групп 1 и 2 уже реализованы на практике. ЭРДУ из групп 3, 4 и 5 в настоящее время находятся в состоянии разработки или тестирования. ЭРДУ из групп 1 и 2 предназначены для использования на малых КА. В бывшем СССР и в России эти двигательные системы традиционно оснащаются тремя типами электрических маршевых двигателей:

- 1) Электронагревательные двигатели (ЭНД);
- 2) ЭРДУ типа СПД-25, разработанный ОКБ "Факел";
- 3) Абляционные импульсные плазменные двигатели (АИПД), разработанные НИИ ПМЭ МАИ (Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики МАИ)

В таблице 1 приведены существующие зарубежные и российские параметры некоторых ЭРДУ. На рисунке 5 представлены три типа российские и американский ЭРДУ.

**Таблица 1 – Характеристики зарубежных и российских ЭРДУ**

Страна/компания	Тип ЭРДУ	Мощность (кВт)	Тяга (Н)	Удельный импульс (с)	Эффективность
Англия	DS3G	25	0,45	10000	88
Снема	PPS-20K	20	1	2500	61
Россия	SPT-70	0,65	0,04	1450	48
Россия	SPT-100	1,35	0,083	1500	50
Россия	SPT-200	3-15	-5	2500	60
Россия	PPS-1350E (-G-S)	2,5 (1,5)	0,14 (0,09)	1800 (1660)	
Россия	SPT-290	30	1,5	3300	81
Исследовательский центр Гленна	NASA-457	73	2,95	2930	58
США	VASIMR VX-200	200	5,7	5000	72
США	4MW MPD	300- 4000	8-50	1000- 6900	8-45

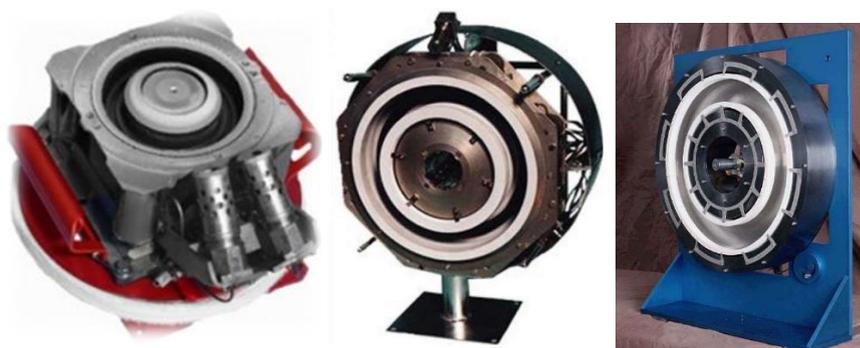


Рисунок 5 – Двигатель SPT-100, SPT-290 и NASA-457M

#### 1.4 Уравнение относительного движения космических объектов

Задача орбитального сближения космических аппаратов может быть рассмотрена как с точки зрения абсолютного движения (движение по орбите относительно центра тяжести земля), так и с точки зрения относительного движения. Обычно уравнения абсолютного движения применяются для дальнего участка, а уравнения относительного движения - для ближнего.

Двухточечная краевая задача для абсолютного движения часто решается с помощью теории Ламберта. Относительное движение двух космических объектов обычно описывается различными системами координат, такими как прямоугольная система координат, полярная система координат, система координат прямой видимости и т.д. [58].

Когда относительное расстояние между космическим аппаратом и объектом значительно меньше его орбитального радиуса, нелинейное уравнение относительного движения может быть упрощено до линейного уравнения состояния.

Хилл [59], Клохесси и Уилтшир Б. предложили линейное уравнение относительного движения космических аппаратов, которое часто сокращенно называют уравнением Хилл-Клохесси-Уилтшира или уравнением Хилл-Клохесси.

Рассмотрим относительное движение двух КА (один из них пассивный, а другой- активный). Запишем уравнения движения двух КА (активный и пассивный) в геоцентрической инерциальной системе координат [58, 59]:

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{r}}_n + \frac{\mu}{|\bar{r}_n|^3} \bar{r}_n &= 0; \\ \ddot{\bar{r}}_a + \frac{\mu}{|\bar{r}_a|^3} \bar{r}_a &= u.\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $u$  – вектор ускорения активного КА,  $r_a, r_n$  - радиуса орбиты активного КА.

Введём понятие вектора относительной дальности между активным и пассивным КА:

$$\bar{d} = \bar{r}_a - \bar{r}_n\tag{1.2}$$

Запишем уравнения относительного движения:

$$\ddot{\bar{d}} + \frac{\mu}{|\bar{r}_n + \bar{d}|^3}(\bar{r}_n + \bar{d}) - \frac{\mu}{|\bar{r}_n|^3}\bar{r}_n = u \quad (1.3)$$

Сделаем допущение, что пассивный КА движется по круговой орбите радиуса  $|\bar{r}_n| = R$ . Начало координат орбитальной системы совпадает с центром масс пассивного КА, который вместе с ним вращается в инерциальном пространстве с угловой скоростью орбитального движения  $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}}$ .

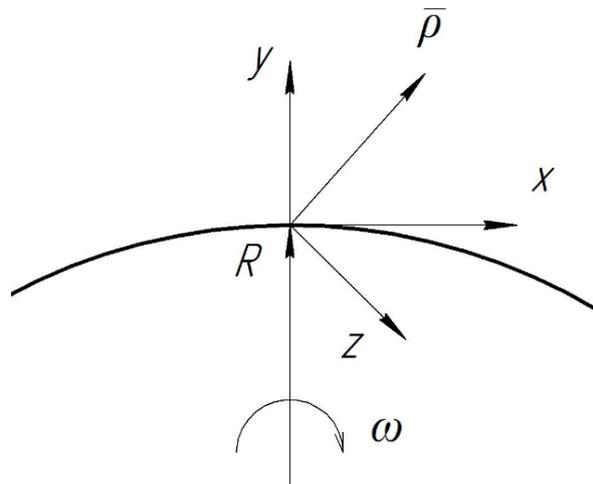


Рисунок 6 – Пассивный КА в инерциальном пространстве с угловой

скоростью орбитального движения  $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}}$

Соответственно в орбитальной системе координат вектор относительной дальности между КА  $\bar{\rho}$ , вектор скорости изменения этой дальности  $\dot{\bar{\rho}}$  и вектор угловой скорости пассивного КА  $\bar{\omega}$  имеют следующие компоненты:

$$\bar{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \dot{\bar{\rho}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}; \quad \bar{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Следовательно, запишем зависимость между относительным ускорением в инерциальной системе и орбитальной системе координат.

$$\ddot{d} = \ddot{\rho} + 2\bar{\omega} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}); \quad (1.5)$$

С учётом зависимостей  $\mu = \omega^2 R^3$  и  $|r_n + d| = |R + \bar{\rho}| = \sqrt{x^2 + (R+y)^2 + z^2}$ , получим дифференциальные уравнения относительного движения в проекциях на оси орбитальной системы координат:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega\dot{y} - \omega^2 x + \frac{\omega^2 R^3}{(\sqrt{(R+y)^2 + x^2 + z^2})^3} x &= u_x; \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2(R+y) + \frac{\omega^2 R^3}{(\sqrt{(R+y)^2 + x^2 + z^2})^3} (y+R) &= u_y; \\ \ddot{z} + \frac{\omega^3 R^3}{(\sqrt{(R+y)^2 + x^2 + z^2})^3} z &= u_z. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Допустим, что компоненты вектора относительной дальности малы относительно радиуса опорной орбиты  $\rho \ll R$ . Разложим числитель  $\left[ (R+y)^2 + x^2 + z^2 \right]^{-3/2}$  в выражениях системы (1.6) в ряд:

$$\left[ (R+y)^2 + x^2 + z^2 \right]^{-3/2} = \frac{1}{R^3} \left[ 1 - 3\frac{y}{R} - \frac{3}{2R^2}(x^2 + z^2 - 4y^2) + \dots \right] \quad (1.7)$$

Оставляя в системе только линейные члены, после преобразования получим дифференциальные уравнения относительного движения в проекциях на оси орбитальной системы координат, т.е. уравнение Хилл-Клохесси-Уилтшира:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{y} = u_x \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = u_y; \\ \ddot{z} + \omega^2 z = u_z \end{cases} \quad (1.8)$$

Поскольку уравнение Хилл-Клохесси-Уилтшира легко выражается в виде линейного обыкновенного дифференциального уравнения, для представления его решения можно использовать матрицу перехода состояния. На основе этой

матрицы перехода состояния можно решить задачу начального значения, т.е. при условии, что известны начальное относительное положение и начальная относительная скорость, можно решить задачу об относительном положении и относительной скорости в любой последующий момент времени. Кроме того, можем решить задачу сближения в фиксированное или свободное время, т.е. двухточечную краевую задачу. При этом на основе этой матрицы переноса состояния задача о начальном значении и двухточечная краевая задача также могут быть преобразованы друг в друга.

Для метода построения уравнения Хилла Иида и Бишоп [60] впервые провели анализ ошибок, которые в основном включают ошибку линеаризации, ошибку, связанную с нецентральностью поля тяготения из-за несферичности Земли, навигационную ошибку, ошибку управления (тяги) и т.д.

Tschauner и Nempel представили линейные уравнения относительного движения, когда целевой КА находится на круговой орбите. Для решения задачи сближения в случае эллиптической орбиты КА требуется матрица перехода состояния модели Т-Н. Поскольку модель Т-Н является линейной системой, изменяющейся во времени, единого метода решения этой матрицы перехода состояния не существует. Тем не менее, Мелтон [61] дал приближенный метод матрицы перехода состояния, который основан на разложении в ряд Тейлора по эксцентриситету орбиты целевого КА, поэтому он применим только для случая, когда эксцентриситет относительно мал, что обычно требует  $0 < e < 0,3$ . Яманака и Анкерсен [62], опираясь на этот фундамент, вывели матрицу перехода состояния для произвольных круговых орбит КА, причем выражение для этой матрицы перехода состояния очень простое.

Уравнение Хилл-Клохесси-Уилтшира и модель Т-Н являются линейными уравнениями относительного движения, которые требуют, чтобы начальное относительное расстояние между двумя космическими аппаратами было

относительно близким, что обычно составляет менее 50 км, и будут давать слишком большую ошибку при большем относительном расстоянии. Если орбита пассивного КА круговая и относительное расстояние между двумя аппаратами менее 50 км, то ошибка уравнения линейного относительного движения за один период составляет менее 8 км за один период (Alfriend и Yan [63]).

Для повышения точности уравнений движения можно рассмотреть выражения второго или даже высшего порядка. Обычно члены высших порядков рассматриваются как внешние ускорения, которые добавляются к линейным уравнениям относительного движения, например, в работах Эйлера и Шульмана [64] и Сенгупты [65].

## **1.5 Методы решения краевой задачи**

Управление орбитальным маневром является важной основой для успешного выполнения орбитального сближения КА. При управлении КА обычно находится оптимальный показатель эффективности для решения задачи управления, поэтому оптимальное управление играет ключевую роль в управлении КА на орбите. Решение задачи оптимального управления часто превращается в задачу решения двухточечной краевой задачи.

Существует множество методов для решения краевой задачи. В диссертации применяется гибридный алгоритм, сочетающий метод Ньютона, метод коллокации и метод гомотопии.

### **1.5.1 Метод Ньютона**

Метод Ньютона - это итерационный численный метод нахождения корня (нуля) заданной функции., который может быть использован для решения задач минимизации или максимизации (линейных или нелинейных) функций [66]. Поиск решения осуществляется путём построения последовательных приближений и основан на принципах простой итерации. На основе метода

Ньютона используем метод градиента, который является одним из наиболее часто используемых методов решения задач оптимизации без ограничений. При решении задачи минимизации функции невязок метод градиента может быть использован для пошагового итеративного решения задачи с целью получения минимизированной функции невязок и значений параметров модели.

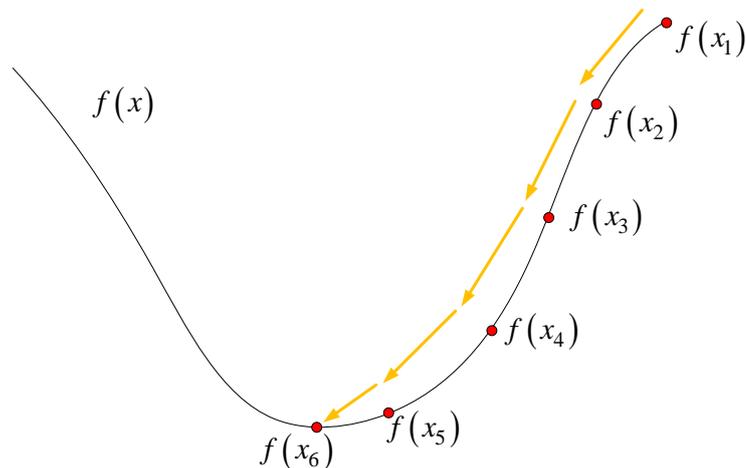


Рисунок 7 – Схема метода градиента

Итерационное уравнение на основе метода градиента имеет вид:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) - a_k g(x_k), \quad (1.9)$$

где  $a_k$  - размер шага для каждой итерации, а  $g(x_k)$  - градиент функции  $f(x)$  при  $x = x_k$ .

При реализации метода Ньютона необходимо внимательно отнестись к выбору подходящего размер шага. Размер шага определяет сходимость и время вычислений градиентного метода. В данном случае для выбора размера шага используется метод золотого сечения и для рассматриваемой задач использован подход, связанный со сведением краевой задачи к поиску минимума функции невязок через граничные условия:

$$\begin{aligned}
F = & c_1 \left( \Delta r_{\text{ср}}^* - \Delta r_{\text{ср}_k} \right)^2 + c_2 \left( \Delta L_{\text{ср}}^* - \Delta L_{\text{ср}_k} \right)^2 + c_3 \left( l_x^* - l_{x_k} \right)^2 + c_4 \left( l_y^* - l_{y_k} \right)^2 + \\
& + c_5 \left( x_z^* - x_{z_k} \right)^2 + c_6 \left( y_z^* - y_{z_k} \right)^2.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Где  $\Delta r_{\text{ср}}^*, \Delta L_{\text{ср}}^*, l_x^*, l_y^*, x_z^*, y_z^*$  - параметры относительного положения, после численного интегрирования дифференциальных относительных уравнений,  $c_i$  - весовые коэффициенты.

Из решения функции  $F = 0$  градиентным методом следует, что начальное значение сопряженных параметров в краевой задаче может быть найдено.

### 1.5.2 Метод коллокации

Основная идея метода коллокации заключается в дискретизации непрерывной временной кривой в конечный временной ряд, что позволяет преобразовать задачу планирования траектории в масштабную нелинейную задачу планирования [67]. Сначала дискредитируются непрерывные траектории движения и переменные состояния:

$$\begin{aligned}
t & \rightarrow t_0 \dots t_k \dots t_N; \\
x & \rightarrow x_0 \dots x_k \dots x_N; \\
v & \rightarrow v_0 \dots v_k \dots v_N; \\
u & \rightarrow u_0 \dots u_k \dots u_N.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь  $t$  — время перелёта;  $x$  — вектор положения;  $v$  — вектор скорости;  $u$  — управления;  $N$  — степень дискретизации, чем больше  $N$ , тем меньше ошибка траектории после дискретизации.

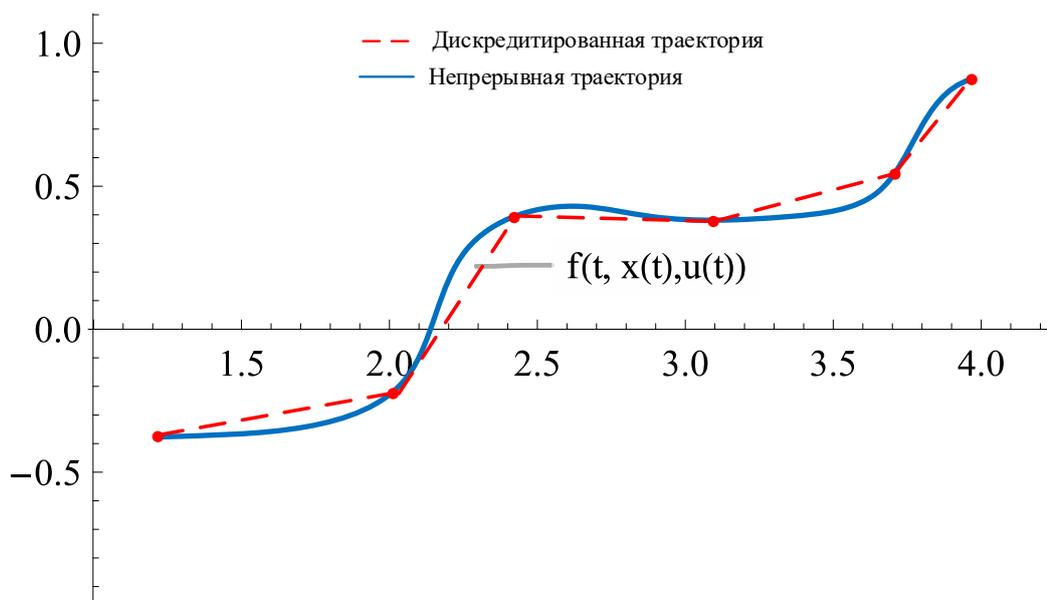


Рисунок 8 – Схема метода коллокации

Дискретизированная траектория разбивается на  $N$  сегментов с  $N+1$  дискретными точками. Интеграл уравнения дифференциальной динамики между каждыми двумя дискретными точками может быть аппроксимирован как:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_{k+1}) &= x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \end{aligned} \right\} \approx x_{k+1} = x_k + \frac{h_k}{2} (f_{k+1} + f_k) \quad (1.12)$$

Где  $h_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $u_k = u(t_k)$ ,  $x_k = x(t_k)$ ,  $f_k = f(t_k, x_k, u_k)$ .

### 1.5.3 Метод гомотопии

В задачах оптимизации метод гомотопии — это численный прием решения сложных задач. Он связывает исходную задачу с более трактуемой задачей путем построения траектории непрерывной функции. Цель решения сложных задач достигается путем постепенного изменения параметров или ограничений задачи и постепенного перехода от простой задачи к исходной. В методе гомотопии, управляя изменением параметров гомотопии, можно на каждом шаге находить относительно легко решаемую задачу и, используя решение предыдущего шага в качестве начального предположения для текущего шага, постепенно приближать решение исходной задачи.

В ходе исследования нетрудно обнаружить, что задача оптимизации по быстродействию решается относительно легче, чем задача оптимизации по моторному времени, что обусловлено дискретным характером функции переключения. Поэтому, решение задачи оптимального по быстродействию используется в качестве начального приближения для решения задачи оптимального по моторному времени и решение задачи оптимального по быстродействию поэтапно получается методом гомотопии. Кроме того, при сложном решении задачи оптимизации по быстродействию возможен постепенный переход от задачи оптимизации по быстродействию с большей тягой к задаче с малой тягой или на основе уже полученного набора решений постепенное изменение граничного условия с помощью метода гомотопии

## Выводы по первой главе

1. Анализ исследования по оптимизации траекторий и близкого сближения космических аппаратов свидетельствует о том, что многие ученые провели ряд исследований в этой области, достигнув значительных результатов. Однако исследования относительного движения космических аппаратов с малой тягой остаются недостаточно и требуют дальнейшего углубленного изучения и совершенствования. Кроме того, большинство научных работ основано на модели относительного движения, построенной с использованием уравнений Хилл-Клохесси-Уилтшира, а не на уравнениях относительного движения в полярной системе координат с более высокой точностью.

2. Прояснены существующие классификации двигателей малой тяги. Представлены современные области применения различных двигателей малой тяги в зависимости от их мощности и перспективные направления развития двигателей малой тяги. Предоставлены характеристики, такие как тяга, удельный импульс, потребляемая электрическая мощность, рабочее тело, а также принцип создания тяги для нескольких конкретных типов двигателей.

3. Представлены уравнения относительного движения космических объектов в геоцентрической инерциальной системе координат (уравнение Хилл-Клохесси-Уилтшира). Проведён анализ его преимуществ и недостатков. Данное уравнение обладает простой формой, однако оно применимо только в случае задач сближения, когда начальное относительное расстояние между двумя космическими аппаратами незначительно.

4. Решение задачи оптимального управления часто сводится к решению двухточечной краевой задачи. Представлен ряд методов для решения таких задач. В случае хорошей сходимости задачи метод Ньютона может быть использован непосредственно, в то время как в случае плохой сходимости необходимо применять другие методы для решения задачи.

## **2 Оптимальное управление со свободной ориентацией вектора тяги**

В данной главе диссертации рассматривается номинальное оптимальное управление со свободной ориентацией вектора тяги в задаче сближения двух космических аппаратов. С использованием принципа максимума Понтрягина определены оптимальные программы управления по критерию быстродействия, по критерию минимума моторного времени. Тяга активного космического аппарата считается свободной малой тягой. Решение задачи оптимального управления по критерию быстродействия используется в качестве начального приближения для решения задачи оптимального управления по критерию минимума моторного времени.

В данной главе рассматриваются три задачи:

- 1) Оптимальное управление в задаче пространственного сближения с типичными граничными условиями по критерию быстродействия.
- 2) Влияние начальных периодических переменных на затрату времени перелёта.
- 3) Оптимальное управление пространственным сближением по критерию минимума моторного времени.

### **2.1 Уравнения относительного движения в цилиндрической системе координат**

По сравнению с другими системами координат, уравнение движения в цилиндрической системе координат имеет более явный вид и чаще используется для анализа динамики КА. Численное интегрирование в этой системе координат относительно стабильно, что делает её более подходящей для описания задачи сближения, особенно в случае больших начальных расстояний между КА [4]. Кроме того, радиальная и трансверсальная тяги в этой системе координат не требуют преобразования координат.

Проведенный анализ в предыдущем разделе, показывает, что уравнение Хилл-Клохесси-Уилтшира применимо только для случая сближения с относительными расстояниями менее 50 км [63-65], в то время как уравнения, построенные в цилиндрической системе координат, имеют более лаконичный вид и обладают более высокой степенью точности [4].

Рассмотрим уравнение движение двух КА, один из которых активным (индекс 2, КА2), а другой пассивными (индекс 1, КА1) в цилиндрической системе координат  $r_{uz}$  ( $i=1,2$ ) [5, 21,58]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dr_i}{dt} &= V_{ri}; \\
 \frac{du_i}{dt} &= \frac{V_{ui}}{r_i}; \\
 \frac{dV_{ri}}{dt} &= \frac{V_{ui}^2}{r_i} - \frac{\mu}{r_i^2} + S_i; \\
 \frac{dV_{ui}}{dt} &= -\frac{V_{ri}V_{ui}}{r_i} + T_i; \\
 \frac{dz_i}{dt} &= V_{zi}; \\
 \frac{dV_{zi}}{dt} &= -\frac{\mu}{r_i^3} z_i + W_i;
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $r_i$  - расстояние от центра Земли до проекции КА на плоскость орбиты;  $u_i$  - угол, отсчитываемый в плоскости орбиты от некоторой начальной оси по направлению полета КА;  $z$  - расстояние от плоскости орбиты до КА;  $V_r, V_u, V_z$  - радиальная, трансверсальная и боковая скорость;  $\mu$  - гравитационный параметр;  $t$  - текущее время;  $S, T, W$  - проекции всех ускорений на оси орбитальной системы координат OS, OT, OW.

Для анализа характеристик динамики их относительного движения принимаются следующие допущения:

1. Начальное расстояние между центрами масс КА2 и КА1 мало по сравнению с вектором радиуса КА1.

2. Орбита КА1 составляет круговую или слабо эллиптическую с эксцентриситетом  $e < 0.01$ .

3. Величина ускорения от тяги КА2, отнесённая к гравитационному ускорению на орбите КА1, менее чем  $10^{-4}$ . Масса КА1 и КА2 постоянны. Расход топлива не учитывается.

4. Относительное движение рассмотрено в центральном гравитационном поле, влияние возмущающих сил не учитывается.

Из (2.1) с учётом сделанных допущений нетрудно записать уравнения относительного движения КА1 и КА2 в цилиндрической системе координат  $ruz$  [5, 21,58]:

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{r} &= \Delta V_r, \\
 \Delta \dot{u} &= \frac{V_{u2}}{r_2} - \frac{V_{u1}}{r_1}, \\
 \Delta \dot{z} &= \Delta V_z, \\
 \Delta \dot{V}_r &= \frac{V_{u2}^2}{r_2} - \frac{V_{u1}^2}{r_1} + \mu \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + a_S, \\
 \Delta \dot{V}_u &= -\frac{V_{r2}V_{u2}}{r_2} + \frac{V_{r1}V_{u1}}{r_1} + a_T, \\
 \Delta \dot{V}_z &= -\frac{\mu}{r_2^3} z_2 + \frac{\mu}{r_1^3} z_1 + a_W.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Где  $\Delta r$  – высотное отклонение от опорного движения,  $\Delta u$  – угловое отклонение,  $\Delta z$  – боковое отклонение,  $\Delta V_r, \Delta V_u, \Delta V_z$  – разность скоростей в радиальном, трансверсальном и боковом направлениях соответственно;  $a_T, a_S, a_W$  – ускорения от тяги КА2 в трансверсальном, радиальном и боковом направлениях.

Параметры эллиптической орбиты КА1 могут быть получены из законов Кеплера:

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad V_{r_1} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta, \quad V_{u_1} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta),$$

Где  $p$ ,  $e$ ,  $\vartheta$  – фокальный параметр, эксцентриситет и угол истинной аномалии орбиты КА1.

Исходя из относительной зависимости, параметры эллиптической орбиты КА2 можно записать в следующем виде [68]:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + \Delta r, \quad V_{r_2} = V_{r_1} + \Delta V_r, \\ u_2 &= u_1 + \Delta u, \quad V_{u_2} = V_{u_1} + \Delta V_u, \\ z_2 &= z_1 + \Delta z, \quad V_{z_2} = V_{z_1} + \Delta V_z. \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\Delta r, \Delta u, \Delta z, \Delta V_r, \Delta V_u, \Delta V_z$  можно определить из решения линеаризованной системы уравнений с учётом системы уравнения (2.2 и 2.3) [68]:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r} &= \Delta V_r, \\ \Delta \dot{u} &= \frac{\Delta V_u}{r_1} - \frac{V_{u_1}}{r_1^2} \Delta r, \\ \Delta \dot{z} &= \Delta V_z, \\ \Delta \dot{V}_r &= \left( \frac{\mu}{r_1^3} - \frac{V_{u_1}^2}{r_1^2} \right) \Delta r + 2 \frac{V_{u_1}}{r_1} \Delta V_u + a_S, \\ \Delta \dot{V}_u &= -\frac{V_{r_1} \Delta V_u + V_{u_1} \Delta V_r}{r_1} + \frac{V_{r_1} V_{u_1}}{r_1^2} \Delta r + a_T, \\ \Delta \dot{V}_z &= -\frac{\mu}{r_1^3} \Delta z + a_W. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Поскольку эксцентриситет орбиты КА1 достаточно мал ( $e < 0.01$ ), орбиту КА1 можно рассматривать как круговую и начальное расстояние между

центрами масс КА2 и КА1 мало относительно вектора радиуса КА1, уравнение (2.4) можно упрощаться в следующем виде [21, 68]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Delta r}{dt} &= \Delta V_r, \\
 \frac{d\Delta L}{dt} &= \Delta V_u - \lambda \Delta r, \\
 \frac{d\Delta V_r}{dt} &= 2\lambda \Delta V_u + \lambda^2 \Delta r + a_S, \\
 \frac{d\Delta V_u}{dt} &= -\lambda \Delta V_r + a_T, \\
 \frac{d\Delta z}{dt} &= \Delta V_z, \\
 \frac{d\Delta V_z}{dt} &= -\lambda^2 \Delta z + a_W.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Где  $\Delta L$  – смещение вдоль дуги опорной орбиты КА1,  $\Delta L = \Delta u \cdot r_1$  (рисунок 9);  $\lambda = \sqrt{\mu \frac{(1-e^2)^3}{p^3}}$  – средняя угловая скорость орбиты КА1,  $p$  – фокальный параметр орбиты КА1,  $e$  – эксцентриситет орбиты КА1.

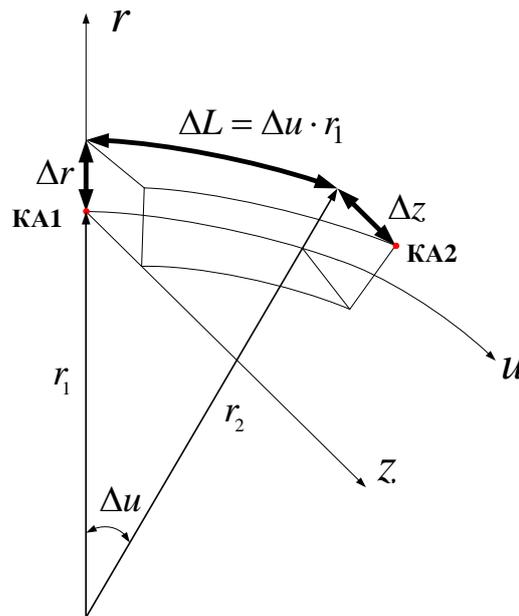


Рисунок 9 – Схема цилиндрической системы координат

Запишем систему уравнения относительного движения (2.5) в матричной форме:

$$\Delta \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (2.6)$$

Здесь:

$$\Delta \dot{\mathbf{X}} = [\Delta r \quad \Delta L \quad \Delta u \quad \Delta V_r \quad \Delta V_u \quad \Delta V_z]^T, \quad \mathbf{u} = [a_S \quad a_T \quad a_W]^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из уравнения (2.5, 2.6) видно, что в линейном приближении боковое движение (составляющие  $\Delta z$ ,  $\Delta V_z$ ) не зависит от продольного движения (составляющие  $\Delta r$ ,  $\Delta L$ ,  $\Delta V_r$  и  $\Delta V_u$ ). Следовательно, изменение составляющих  $\Delta z$ ,  $\Delta V_z$  в пассивном движении будет происходить по гармоническому закону. Анализ относительного движения в продольной плоскости показывает, что КА2 движется по эллипсу относительно КА1. Если центр эллипса находится ниже КА1, то центр эллипса движется в направлении движения с постоянной положительной скоростью; если центр эллипса лежит выше КА1, то центр эллипса движется против направления движения. Отношение полуоси эллипса равно 2:1, показанное на рисунке 10.

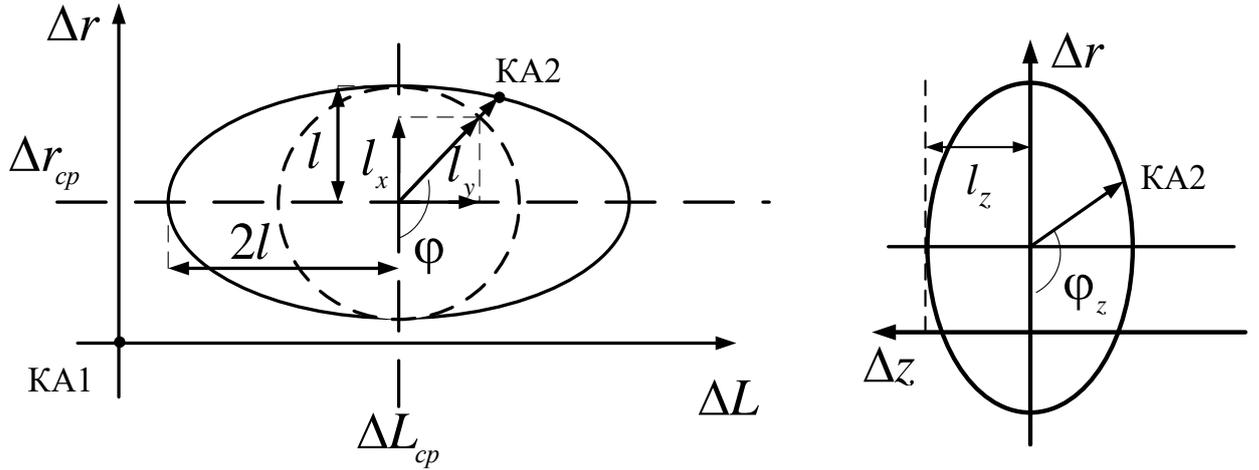


Рисунок 10 – Вековые и периодические переменные относительного движения [21]

При анализе уравнения (2.5, 2.6) можно разделить относительное движение на вековое и периодическое переменные в продольной плоскости и боковой. Характеристические параметры, определяющие смещение центра эллипса и величину его малой полуоси, будем рассматривать как вековые параметры  $(\Delta r_{cp}, \Delta L_{cp})$ , а положение КА2 на эллипсе относительно КА1 в продольной плоскости - как периодические параметры  $(l, \varphi)$ . В боковой плоскости в качестве периодических параметров рассматриваются амплитуда и фаза колебаний  $(l_z, \varphi_z)$ . Вековые и периодические показаны на рисунке 10. Введём переменные на основе геометрических отношений (рисунок 10): [6, 69, 70]

$$\Delta r_{cp} = 2 \left( \Delta r + \frac{\Delta V_u}{\lambda} \right), \quad \Delta L_{cp} = \Delta L - 2 \frac{\Delta V_r}{\lambda},$$

$$l = \sqrt{\frac{(\Delta L - \Delta L_{cp})^2}{4} + (\Delta r - \Delta r_{cp})^2}, \quad l_z = \sqrt{\Delta z^2 + \left( \frac{\Delta V_z}{\lambda} \right)^2}, \quad (2.7)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\Delta V_r}{\lambda \Delta r + 2 \Delta V_u}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_z) = \frac{\lambda \Delta z}{\Delta V_z}.$$

Где:  $\Delta r_{cp}$  – среднее смещение КА2 вдоль радиуса орбиты КА1,  $\Delta L_{cp}$  – среднее смещение КА2 вдоль орбиты КА1,  $l$  – малая полуось эллипса относительного движения в продольном плоскости,  $l_z$  – амплитуда колебаний в

боковой плоскости,  $\varphi$  и  $\varphi_z$  – углы, определяющие положение КА2 на эллипсе относительного движения и в боковой плоскости.  $\Delta r_{cp}$ ,  $\Delta L_{cp}$ , – вековые составляющие,  $l$ ,  $l_z$ ,  $\varphi$  и  $\varphi_z$  – периодические составляющие.

Продифференцируем правые и левые части системы уравнения (2.7) по времени и после преобразований получим дифференциальные уравнения для этих переменных: [21, 71]

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r}_{cp} &= \frac{2}{\lambda} a_T, & \Delta \dot{L}_{cp} &= -1,5\lambda \Delta r_{cp} - \frac{2}{\lambda} a_S, \\ \dot{l} &= \frac{1}{\lambda} (a_S \sin \varphi + 2a_T \cos \varphi), & \dot{l}_z &= \frac{1}{\lambda} a_W \cos \varphi_z, \\ \dot{\varphi} &= \lambda + \frac{a_S \cos \varphi - 2a_T \sin \varphi}{\lambda l}, & \dot{\varphi}_z &= \lambda - \frac{a_W \sin \varphi_z}{\lambda l_z}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Во многих случаях можем использовать уравнение (2.8) для упрощения описания относительного движения космических объектов в пространстве

Не трудно увидеть, что в правой части последней строки системы уравнений (2.8) имеются особенности. Когда  $l$  и  $l_z$  достаточно малы, поскольку они находятся в знаменателе, то приводит к вычислительным трудностям. Поэтому для решения этой проблемы введём новые переменные:

$$\begin{aligned} l_x &= l \cos(\varphi), & l_y &= l \sin(\varphi); \\ l_{zx} &= l_z \cos(\varphi_z), & l_{zy} &= l_z \sin(\varphi_z). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поставим переменные из (2.9) в систему уравнения (2.8) и после преобразования, запишем систему дифференциальных уравнений относительного движения в окончательном виде, которую тоже можно использовать для исследований, в том числе на околокруговых орбитах:

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{r}_{cp} &= \frac{2a_T}{\lambda}, & \Delta \dot{L}_{cp} &= -1,5\lambda \Delta r_{cp} - \frac{2a_S}{\lambda}, \\
\dot{i}_x &= -\lambda l_y + \frac{2a_T}{\lambda}, & \dot{i}_y &= \lambda l_x + \frac{a_S}{\lambda}, \\
\dot{i}_{zx} &= -\lambda l_{zy} + \frac{a_W}{\lambda}, & \dot{i}_{zy} &= \lambda l_{zx}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Система уравнений (2.10) имеет аналитическое решение с учётом отношением (2.9):

$$\begin{aligned}
\Delta r_{cp}(\lambda t) &= \Delta r_{cp0} + \frac{2}{\lambda^2} C, & \Delta L_{cp}(\lambda t) &= \Delta L_{cp0} - \frac{3}{2} \lambda t \Delta r_{cp0} - \frac{D}{\lambda^2}, \\
l_x(\lambda t) &= l_{x0} - \frac{B}{\lambda^2}, & l_y(\lambda t) &= l_{y0} + \frac{A}{\lambda^2}, \\
l_{zx}(\lambda t) &= l_{zx0} + \frac{E}{\lambda^2}, & l_{zy}(\lambda t) &= l_{zy0} + \frac{F}{\lambda^2}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Где:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\lambda t} [a_S \cos(\lambda t - \xi) + 2a_T \sin(\lambda t - \xi)] d\xi, \\
B &= \int_0^{\lambda t} [a_S \sin(\lambda t - \xi) - 2a_T \cos(\lambda t - \xi)] d\xi, \\
C &= \int_0^{\lambda t} a_T d\xi, \\
D &= \int_0^{\lambda t} [a_S + 3a_T(\lambda t - \xi)] d\xi, \\
E &= \int_0^{\lambda t} a_W \cos(\lambda t - \xi) d\xi, \\
F &= \int_0^{\lambda t} a_W \sin(\lambda t - \xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Проекции управляющего ускорения КА2  $a_T, a_S, a_W$  на оси координат имеют вид:

$$\begin{aligned}
a_T &= a_0 \cos(\alpha) \cos(\beta) \delta, \\
a_S &= a_0 \sin(\alpha) \cos(\beta) \delta, \\
a_W &= a_0 \sin(\beta) \delta.
\end{aligned}$$

Здесь  $\alpha$  – угол отклонения вектора тяги от трансверсального направления;  $\beta$  – угол отклонения тяги от плоскости орбиты;  $a_0$  – ускорение от тяги и принимается постоянными;  $\delta \in \{0, 1\}$  – функция переключения,  $\delta = 1$  соответствует включённой тяге, а  $\delta = 0$  соответствует выключенной тяге (пассивный участок).

Если рассмотрим, например оптимальное управление по моторному времени в задаче сближения, то к уравнениям соотношение (2.11) ещё нужно добавить соотношение:

$$i_{MOT} = \sqrt{a_S^2 + a_T^2 + a_W^2} = a_0 \delta \quad (2.12)$$

## **2.2 Безразмерные уравнения относительного пространственного движения**

Нормирование переменных уравнения осуществляется путем деления каждой переменной на характерную величину или масштабный коэффициент. Это позволяет избежать больших чисел и уменьшить ошибки вычислений, связанные с погрешностями масштабов.

Для упрощения вычислений и обеспечения точности в кинетической системе уравнения (2.10) необходимо провести нормировку переменных. Это позволит сделать значения переменных безразмерными и упростить анализ системы. Для этого разделим систему уравнения (2.10) на безразмерные коэффициенты:

$$K = 2 \frac{a_0}{\lambda^2}$$

$$\Delta \bar{r}_{cp} = \frac{\Delta r_{cp}}{K}, \Delta \bar{L}_{cp} = \frac{\Delta L_{cp}}{K},$$

$$\bar{l}_x = \frac{l_x}{K}, \bar{l}_y = \frac{l_y}{K},$$

$$\bar{l}_{zx} = \frac{l_{zx}}{K}, \bar{l}_{zy} = \frac{l_{zy}}{K}.$$

Для времени:

$$\bar{t} = \lambda t$$

Перепишем систему уравнения (2.10) в окончательном безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\bar{r}}_{cp} &= \delta_T, & \Delta \dot{\bar{L}}_{cp} &= -1,5 \Delta \bar{r}_{cp} - \delta_S, \\ \dot{\bar{l}}_x &= \delta_T - \bar{l}_y, & \dot{\bar{l}}_y &= \frac{\delta_S}{2} + \bar{l}_x, \\ \dot{\bar{l}}_{zx} &= \frac{\delta_W}{2} - \bar{l}_{zy}, & \dot{\bar{l}}_{zy} &= \bar{l}_{zx}, \\ \dot{\bar{t}}_{mot} &= \delta \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\text{Здесь: } \delta_T = \frac{a_T}{a_0} \delta, \delta_S = \frac{a_S}{a_0} \delta, \delta_W = \frac{a_W}{a_0} \delta.$$

### 2.3 Постановка задачи оптимизации управления относительным движением в задаче сближения

В задаче сближения космических аппаратов обычно рассматриваются два основных критериев: минимизация общего времени (критерий быстродействия) и минимизация времени работы двигателя (критерий моторного времени). Эти два критерия часто противоречат друг другу, что создает сложность в выборе оптимального решения.

Критерий быстродействия стремится минимизировать общее время сближения между КА, что может быть важно в случаях, когда требуется

быстрое достижение цели, например, для выполнения манёвров в условиях ограниченной доступности топлива или для обеспечения безопасности миссии.

С другой стороны, критерий минимизации времени работы двигателя направлен на экономию ресурсов и продлевает срок службы двигателя. Это особенно важно при долгих миссиях или при ограниченном запасе топлива. Выбор между этими двумя критериями зависит от конкретных целей миссии, ограничений и приоритетов.

Введём вектор величины  $\mathbf{X}(t) = [\Delta r_{cp}, \Delta L_{cp}, l_x, l_y, l_{zx}, l_{zy}]^T$  и его безразмерную величину  $\bar{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X}}{K}$ .

При решении оптимального управления в задаче сближения вектор  $\bar{\mathbf{X}}$  должны удовлетворяться граничными условиями:

$$\text{В начальный момент: } \bar{\mathbf{X}}(0) = \bar{\mathbf{X}}_0$$

$$\text{В конечный момент: } \bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_f) = 0$$

Где  $\bar{t}_f = \lambda t_f$ ,  $t_f$  – конечное время (общее время перелёта).

Для задачи оптимального управления по быстродействию  $\delta \equiv 1$  при всех  $t \in [t_0, t_f]$  и для задачи оптимального управления по минимуму моторному времени,  $\delta \in (0,1)$ , который определяться из условия максимума Гамильтониана для уравнения относительного движения.

Запишем оптимальное управление по критерию быстродействия:

$$u_{opt} = \arg \min_{u \in U} [ \bar{t}_f | \bar{\mathbf{X}}(0) = \bar{\mathbf{X}}_0, \bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_f) = 0 ]; \quad (2.14)$$

И по критерию минимума моторного времени:

$$u_{\text{ОПТ}} = \arg \min_{u \in U} [\bar{t}_{\text{мот}} | \bar{\mathbf{X}}(0) = \bar{\mathbf{X}}_0, \bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_f) = 0, \bar{t}_f = \bar{t}_{f\text{зад}} ], \quad (2.15)$$

Где  $\bar{t}_f$  – конечное время (общее время);  $\bar{t}_{\text{мот}}$  – моторное время,  $\dot{\bar{t}}_{\text{мот}} = \delta$ ;  $\bar{t}_{f\text{зад}}$  – заданное конечное время;  $u_{\text{ОПТ}}$  – оптимальное управление;  $u$  – управление КА2;  $U$  – область допустимых управлений КА2.

## 2.4 Оптимизация с использованием принципа максима Понтрягина

Для случая свободной ориентации вектора тяги проекции векторов ускорений на координаты имеют вид:

$$\delta_T = \cos(\alpha)\cos(\beta)\delta, \quad \delta_S = \sin(\alpha)\cos(\beta)\delta, \quad \delta_W = \sin(\beta)\delta. \quad (2.16)$$

Для упрощения записи, во второй и третьей главе верхний символ « $\dot{\bar{\phantom{x}}}$ » будем опускать. Запишем окончательное безразмерное уравнение относительного движения при свободной ориентации вектора тяги:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\bar{r}}_{\text{cp}} &= \cos(\alpha)\cos(\beta), & \Delta \dot{\bar{L}}_{\text{cp}} &= -1,5\Delta \bar{r}_{\text{cp}} - \sin(\alpha)\cos(\beta); \\ \dot{\bar{l}}_x &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \bar{l}_y, & \dot{\bar{l}}_y &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{2} + \bar{l}_x; \\ \dot{\bar{l}}_{zx} &= \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{2} - \bar{l}_{zy}, & \dot{\bar{l}}_{zy} &= \bar{l}_{zx}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Запишем Гамильтониан уравнение (2.17) с использованием принципа максимума Понтрягина с учётом моторного времени  $\dot{\bar{t}}_{\text{мот}} = \delta$ :

$$\begin{aligned} H &= \Psi_{\Delta r_{\text{cp}}} \delta \cos(\alpha)\cos(\beta) - \Psi_{\Delta L_{\text{cp}}} (1,5\Delta \bar{r}_{\text{cp}} + \delta \sin(\alpha)\cos(\beta)) + \\ &+ \Psi_{l_x} (\delta \cos(\alpha)\cos(\beta) - \bar{l}_y) + \Psi_{l_y} \left( \frac{\delta \sin(\alpha)\cos(\beta)}{2} + \bar{l}_x \right) + \\ &+ \Psi_{l_{zx}} \left( \frac{\delta \sin(\beta)}{2} - \bar{l}_{zy} \right) + \Psi_{l_{zy}} \bar{l}_{zx} + \Psi_m \delta. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь  $\Psi = [\Psi_{\Delta r_{cp}}, \Psi_{\Delta L_{cp}}, \Psi_{l_x}, \Psi_{l_y}, \Psi_{l_{zx}}, \Psi_{l_{zy}}]$  – сопряжённые переменные,

определяются из условия:

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.19)$$

Сопряжённые переменные  $\Psi$  имеют аналитические решения:

$$\begin{aligned} \Psi_{\Delta r_{cp}}(t) &= \Psi_{\Delta r_{cp0}} + 1.5t\Psi_{\Delta L_{cp0}}, \quad \Psi_{\Delta L_{cp}}(t) = \Psi_{\Delta L_{cp0}}, \\ \Psi_{l_x}(t) &= \sqrt{\Psi_{l_{x0}}^2 + \Psi_{l_{y0}}^2} \cos\left(t + \arctg\left(\frac{\Psi_{l_{y0}}}{\Psi_{l_{x0}}}\right)\right), \\ \Psi_{l_y}(t) &= \sqrt{\Psi_{l_{x0}}^2 + \Psi_{l_{y0}}^2} \sin\left(t + \arctg\left(\frac{\Psi_{l_{y0}}}{\Psi_{l_{x0}}}\right)\right), \\ \Psi_{l_{zx}}(t) &= \sqrt{\Psi_{l_{zx0}}^2 + \Psi_{l_{zy0}}^2} \cos\left(t + \arctg\left(\frac{\Psi_{l_{zy0}}}{\Psi_{l_{zx0}}}\right)\right), \\ \Psi_{l_{zy}}(t) &= \sqrt{\Psi_{l_{zx0}}^2 + \Psi_{l_{zy0}}^2} \sin\left(t + \arctg\left(\frac{\Psi_{l_{zy0}}}{\Psi_{l_{zx0}}}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из необходимых условий максимума функции Гамильтониана можно определить оптимальные управляющие угол  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_{\text{опт}}) &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, & \cos(\alpha_{\text{опт}}) &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ \sin(\beta_{\text{опт}}) &= \frac{\Psi_{l_{zx}}}{\sqrt{\Psi_{l_{zx}}^2 + 4(A^2 + B^2)}}, & \cos(\beta_{\text{опт}}) &= \frac{4(A^2 + B^2)}{\sqrt{\Psi_{l_{zx}}^2 + 4(A^2 + B^2)}}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь  $A = \frac{\Psi_{l_y}}{2} - \Psi_{\Delta L_{cp}}$ ,  $B = \Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{cp}}$ .

функция переключения двигателей определяется также из условия максимума Гамильтониана:

$$\delta = \begin{cases} 0 & \Delta < 0 \\ 1 & \Delta > 0 \end{cases}, \quad (2.22)$$

$$\text{Где } \Delta = -1 + \Psi_m + C, C = \sqrt{\Psi_{l_{zx}}^2 / 4 + (A^2 + B^2)}$$

Для задачи оптимального управления по быстродействию  $\delta \equiv 1$  так как  $\Psi_m(t) \geq 1$ , при всех  $t \in [0, t_f]$  и для задачи оптимального управления по минимуму моторному времени  $\delta = (0,1)$  определяется по форме (2.22).

Проверим необходимое условие максимума Гамильтониана (2.18) при управлении (2.21). Вторые производные Гамильтониана по управлению равны:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} H = -\frac{A^2 + B^2}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Psi_{l_{zx}}^2}}, \\ c &= \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} H = -\sqrt{A^2 + B^2 + \Psi_{l_{zx}}^2}, \\ b &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} H = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Согласно теории, если  $ac - b^2 > 0$  и  $a < 0$ , то функция  $H$  достигает максимума по управлению в любой момент времени. Поставим (2.21) в (2.23) и нетрудно видеть, что слагаемое  $a$  и  $c$  может принимать только отрицательные значения, их произведение только положительно, следовательно при управлении (2.21) Гамильтониан (2.18) достигает максимальное значение в любой момент времени.

Таким образом, можно свести задачу оптимального управления к двухточечной краевой задаче для дифференциального уравнения относительного движения (2.17) с управлением (2.21) и функцией переключения (2.22). Решение краевой задачи сводится, по существу, к определению начальных значений сопряженных переменных  $\Psi$  (2.20)

## 2.5 Оптимальное управление по быстродействию

При планировании оптимальной траекторий КА существует множество критериев оптимизации. Один из наиболее распространенных критериев - оптимизация быстродействия, которая направлена на достижение максимальной скорости аппарата, что позволяет сократить время перелёта к цели или достигнуть её как можно быстрее. Этот критерий особенно важен для решения задачи, например, для доставки грузов или обслуживания космических объектов.

Критерий быстродействия имеет вид:

$$J = \int_0^{t_f} 1 dt \rightarrow \min. \quad (2.24)$$

Запишем уравнение для Гамильтониана относительного движения (2.18) согласно принципу максимума Гамильтониана по критерию быстродействия:

$$\begin{aligned} H = & \Psi_{\Delta r_{cp}} \delta \cos(\alpha) \cos(\beta) - \Psi_{\Delta L_{cp}} (1.5 \Delta \bar{r}_{cp} + \delta \sin(\alpha) \cos(\beta)) + \\ & + \Psi_{l_x} (\delta \cos(\alpha) \cos(\beta) - \bar{l}_y) + \Psi_{l_y} \left( \frac{\delta \sin(\alpha) \cos(\beta)}{2} + \bar{l}_x \right) + \\ & + \Psi_{l_{zx}} \left( \frac{\delta \sin(\beta)}{2} - \bar{l}_{zy} \right) + \Psi_{l_{zy}} \bar{l}_{zx} - 1. \end{aligned} \quad (2.25)$$

И соответствующая функция переключения имеет вид:

$$\delta = 1 \quad (2.26)$$

Таким образом, мы можем свести задачу оптимального управления по критерию быстродействию к двухточечной краевой задаче для дифференциального уравнения относительного движения (2.18) с управлением (2.21) и функцией переключения (2.26).

Траектория движения и управление космическим аппаратом зависят от различных начальных граничных условий. В диссертации рассматривается

несколько наборов типичных граничных условий для сближения и управления космическими аппаратами с малой тягой.

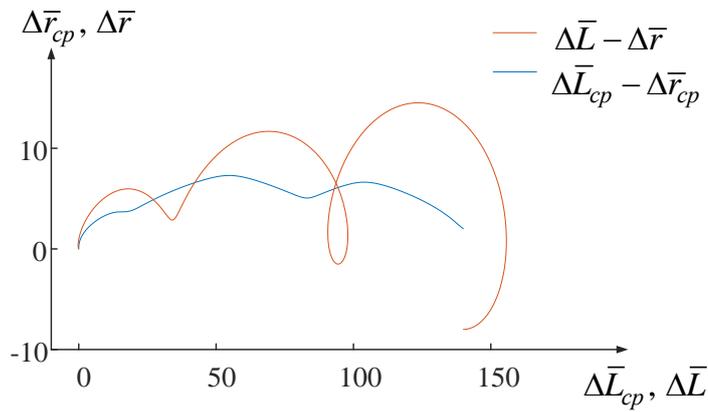
### 2.5.1 Численное моделирование при типовых условиях

Рассмотрим оптимальные управления на линейной модели (2.17) при свободной ориентации вектора тяги для трёх типовых граничных условий, показанных в таблице 2: 1) доминирование требования коррекции периодического движения – граничное условие 1; 2) доминирование требования коррекции бокового движения - граничное условие 2; 3) доминирование требования коррекции векового движения - граничное условие 3. Конечные параметры относительного движения принимаются равными нулю, хотя, нужно отметить, что для задачи сближения космических аппаратов они могут и должны быть отличными от нуля исходя из требований безопасности стыковки. Начальные фазы  $\varphi$  и  $\varphi_z$  при моделировании будем считать равными 0.

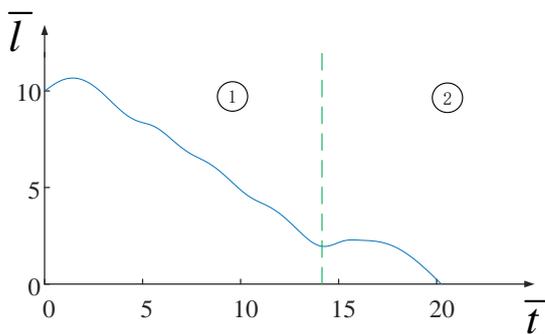
**Таблица 2 – Граничные условия задач управления и затраты общего времени**

Начальные граничные условия	$\Delta \bar{r}_{cp_0}$	$\Delta \bar{L}_{cp_0}$	$\bar{l}_0$	$\bar{l}_{z_0}$	Затраты времени
1	2	140	10	2	20,2447
2	2	140	2	10	31,7952
3	20	2800	2	10	72,4283

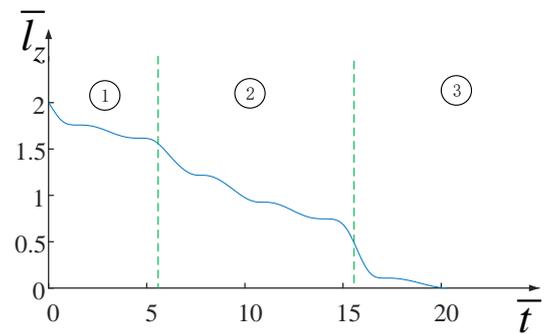
Рассматриваются типовые траектории в задаче оптимального управления. На рисунках 11 – 13 показаны траектории и оптимальные управления, где доминирует коррекция малой полуоси эллипса относительного движения (граничное условие №1), коррекция амплитуды боковых колебаний (граничное условие №2), коррекция векового движения (граничное условие №3).



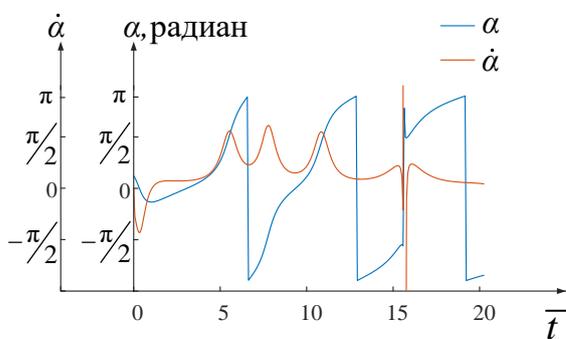
а) Траектория векового движения



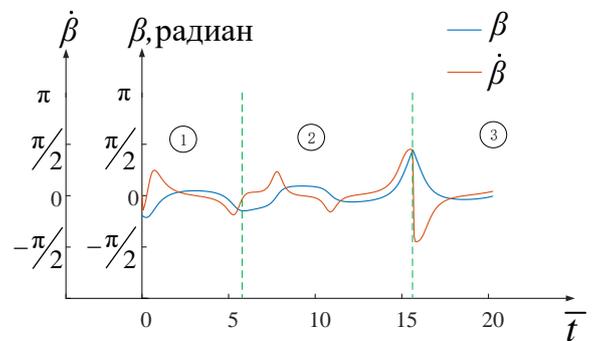
б) Зависимость малой полуоси эллипса относительного движения от времени



в) Зависимость амплитуды боковых колебаний от времени



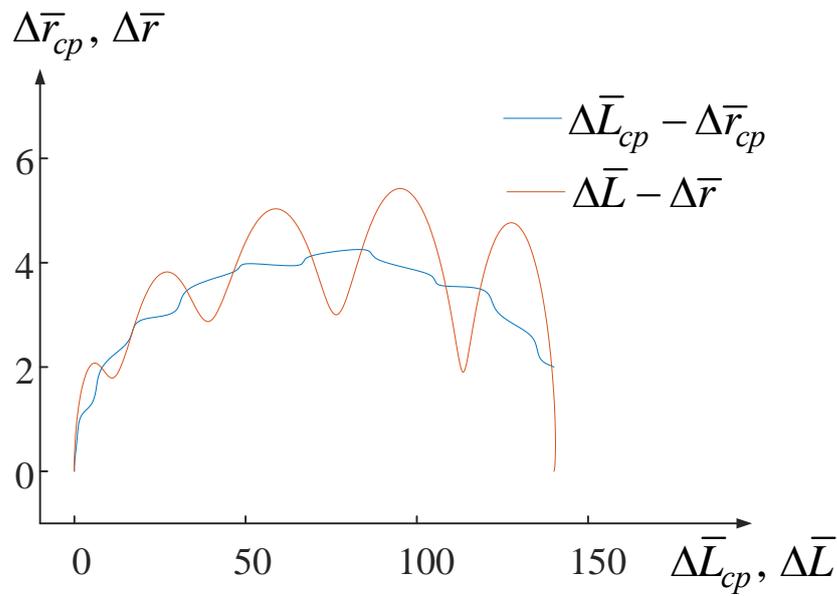
г) Зависимость угла отклонения тяги от трансверсального направления в плоскости орбиты  $\alpha$  и его производная от времени



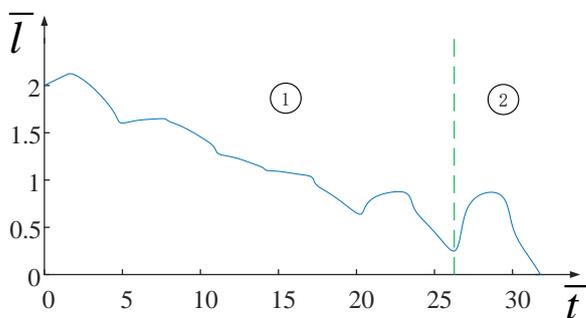
д) Зависимость угла отклонения тяги от плоскости орбиты  $\beta$  и его производная от времени

Рисунок 11 – Полученное оптимальное управление (г, д) и траектория движения (а, б, в) для граничного условия 1 со свободной ориентацией вектора тяги (доминирование требования коррекции малой полуоси относительного движения)

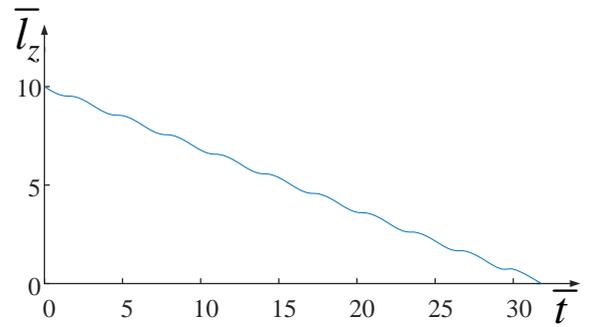
Как следует из рисунка 11, оптимальная программа для угла отклонения вектора тяги от радиус-вектора  $\alpha$  изменяется от  $-180$  до  $180$  градусов по времени. Такое управление возникает, когда доминирует коррекция малой полуоси эллипса относительного движения, в результате которой малая полуось эллипса практически на всём интервале времени монотонно уменьшается. Нарушение этого принципа возникает в интервале от 14 (по безразмерному времени), где происходит одновременная подстройка периодического и векового движения. Наибольшее уменьшение амплитуды боковых колебаний происходит при прохождении маневрирующего КА апогея орбиты при безразмерной величине  $\Delta L_{cp}$  равной 120, 70 и 20, что соответствуют безразмерному времени 5, 10 и 15, в эти же моменты времени угол отклонения вектора тяги от плоскости орбиты  $\beta$  достигает наибольших по модулю значений. В эти же моменты времени происходит «рывки» уменьшения амплитуды боковых колебаний. Нужно обратить внимание на разрыв производной угла  $\alpha$  в момент безразмерного времени 15. Он возникает из-за переключения режима указанного угла с коррекции периодического движения на коррекцию векового. В момент времени 15 скорость изменения угла  $\beta$  резко возрастает.



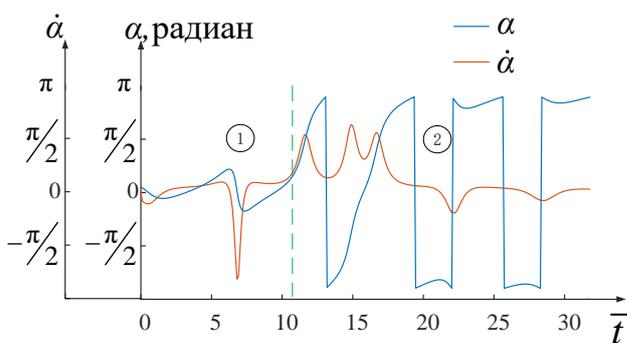
а) Траектория векового движения



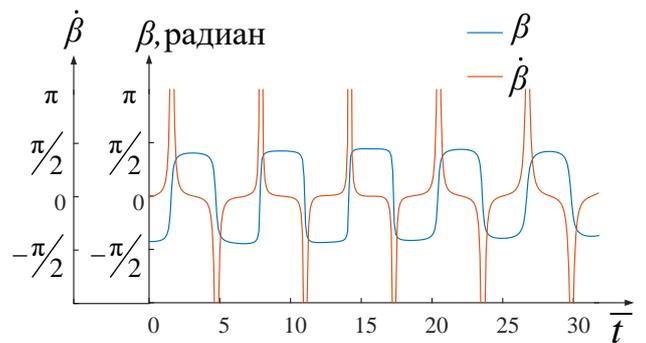
б) Зависимость малой полуоси эллипса относительного движения от времени



в) Зависимость амплитуды боковых колебаний от времени



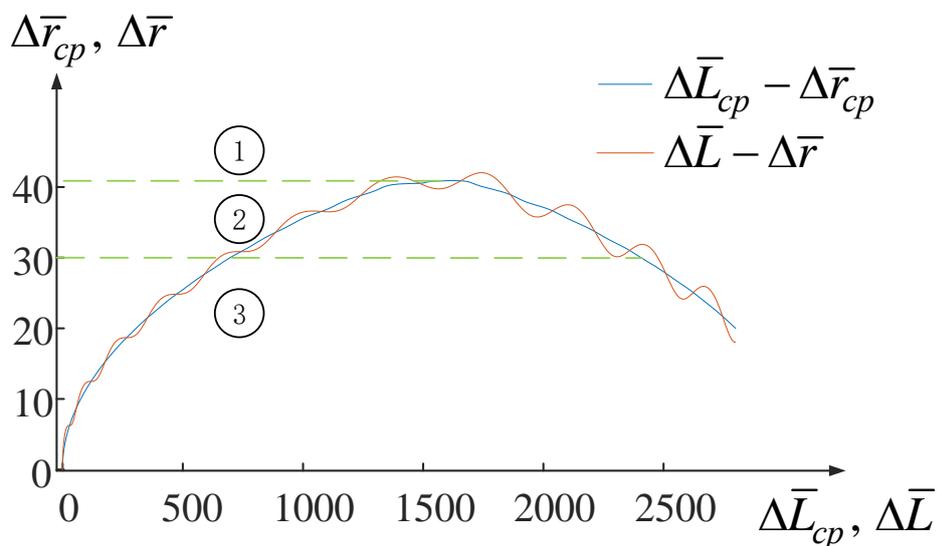
г) Зависимость угла отклонения тяги от трансверсального направления в плоскости орбиты  $\alpha$  и его производная от времени



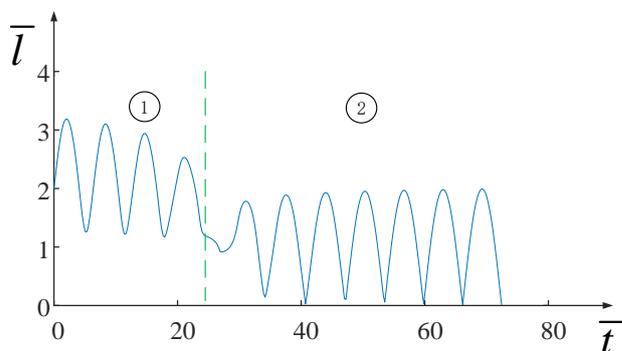
д) Зависимость угла отклонения тяги от плоскости орбиты  $\beta$  и его производная от времени

Рисунок 12 – Полученное оптимальное управление (г, д) и траектория движения (а, б, в) для граничного условия 2 со свободной ориентацией вектора тяги (доминирование требования коррекции бокового движения)

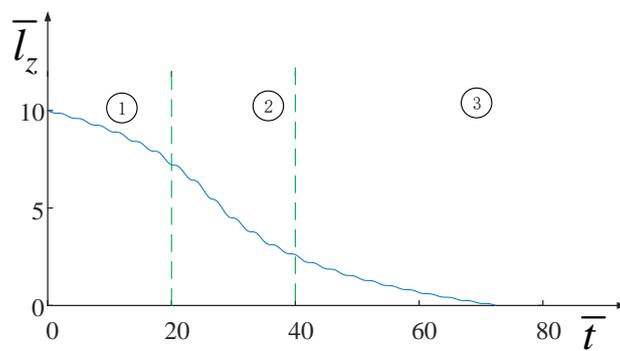
Как следует из рисунка 12, угол  $\alpha$  имеет две характерных области. Первая область находится в интервале безразмерного времени от 0 до 12 (или безразмерная величина  $\Delta L_{cp}$  от 140 до 120) и от 20 до 31.7952 (или безразмерная величина  $\Delta L_{cp}$  от 40 до 0), а вторая находится в интервале безразмерного времени от 12 до 20. В первой области угол  $\alpha$  сначала близок к 0 градусам, затем к 180 градусам. Во второй области угол  $\alpha$  изменяется от -180 градусов до 180 градусов. Такое управление характерно для доминирования требования коррекции бокового движения. В первой области изменение вековых составляющих движения представляет собой близко монотонное, а изменение малой полуоси эллипса относительного движения - колебательно. Во второй области изменение векового движения представляет собой колебательно, а изменение малой полуоси относительного движения - монотонно. На времени всего перелёта угол  $\beta$  колеблется между амплитудными значениями – от -90 градусов до 90 градусов, а соответственное изменение амплитуды боковых колебаний – представляет собой монотонное, в отличие от приведенного граничного условия 1, близкое к равномерному, без «рывков» при прохождении маневрирующим КА апогея орбиты. Разрыв производной угла  $\alpha$  в момент безразмерного времени  $t$  возникает из-за переключения режима оптимального угла  $\alpha$  с коррекции векового движения на коррекцию периодического. Необходимо обратить внимание на разрывы производной угла  $\beta$ . Они происходят при «скачкообразном» переключении угла  $\beta$  с минус 90 на плюс 90 градусов.



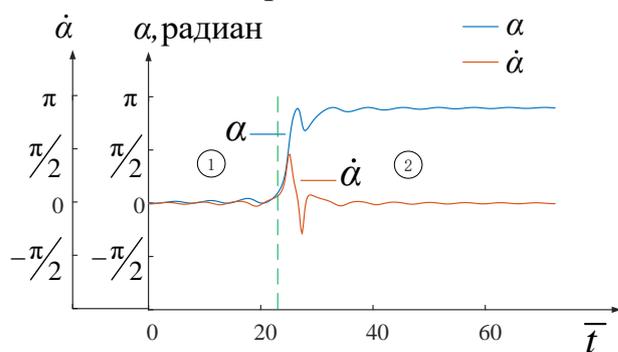
а) Траектория векового движения



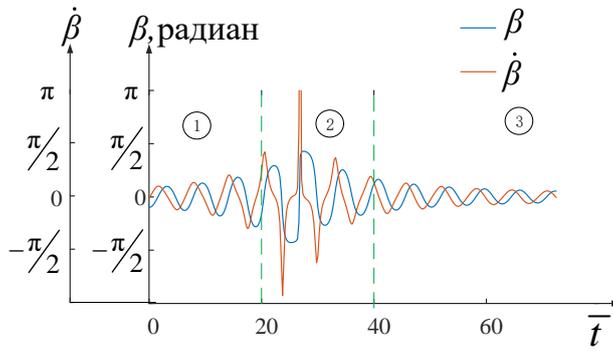
б) Зависимость малой полуоси эллипса относительного движения от времени



в) Зависимость амплитуды боковых колебаний от времени



г) Зависимость угла отклонения тяги от трансверсального направления в плоскости орбиты  $\alpha$  и его производная от времени



д) Зависимость угла отклонения тяги от плоскости орбиты  $\beta$  и его производная от времени

Рисунок 13 – Полученное оптимальное управление (г, д) и траектория движения (а, б, в) для граничного условия 3 со свободной ориентацией вектора тяги (доминирование требования коррекции векового движения)

Как следует из рисунка 13, угол  $\alpha$  содержит две характерных области. Первая находится в интервале безразмерного времени от 0 до 25, угол  $\alpha$  близок к 0 градусам. Вторая область находится в интервале безразмерного времени от 25 до 71,3974, угол  $\alpha$  близок к 180 градусам. Такой вид управления характерен для доминирования требования коррекции векового движения. В указанных областях изменение малой полуоси эллипса относительного движения представляет собой колебательное, а изменение векового движения – монотонное. Амплитуда боковых колебаний уменьшается до заданного значения практически монотонно, наиболее быстрое её изменение приходится в интервале безразмерного времени от 20 до 40, когда угол  $\beta$  достигает наибольших по модулю значений. В это же время безразмерная величина  $\Delta r_{cp}$  изменяется от 30 до 42, где проходит наибольшее удаление КА2 от центра Земли, соответственно КА2 имеет минимальную скорость. Изменение угла  $\beta$  от времени похож на случай граничного условия 2 (доминирование требования коррекции бокового движения), но только отличается от того, что здесь угол  $\beta$  не достигает амплитудных значений.

По результатам численного моделирования можно сделать вывод, что целесообразно ввести пассивные участки на траектории при следующих случаях:

1. Когда режим оптимального угла  $\alpha$  переключается с коррекции векового движения на коррекцию периодического движения.
2. Когда угол  $\beta$  переключается между амплитудными значениями и доминируют требование коррекции бокового движения.

Введение пассивных участков в эти моменты времени может снизить требования к угловой скорости космического аппарата для ориентации тяги в требуемом направлении и позволить установить более простое оборудование для управления угловым движением рассматриваемого аппарата.

## 2.5.2 Влияние начальных фаз $\varphi$ и $\varphi_z$

Начальные фазы  $\varphi$  и  $\varphi_z$  являются периодическими переменными. Рассматривается влияние начальных фаз  $\varphi$  и  $\varphi_z$  на затрату времени сближения в критерии минимума общего времени при решении оптимального управления. Принимает типовое граничное условие-1 как начальное граничное условие.  $\varphi$  и  $\varphi_z$  изменяют от 0 до  $360^\circ$ .

На рисунке14 показаны результаты моделирования и зависимость общего времени от  $\varphi$  и  $\varphi_z$  на линейной модели (2.17).

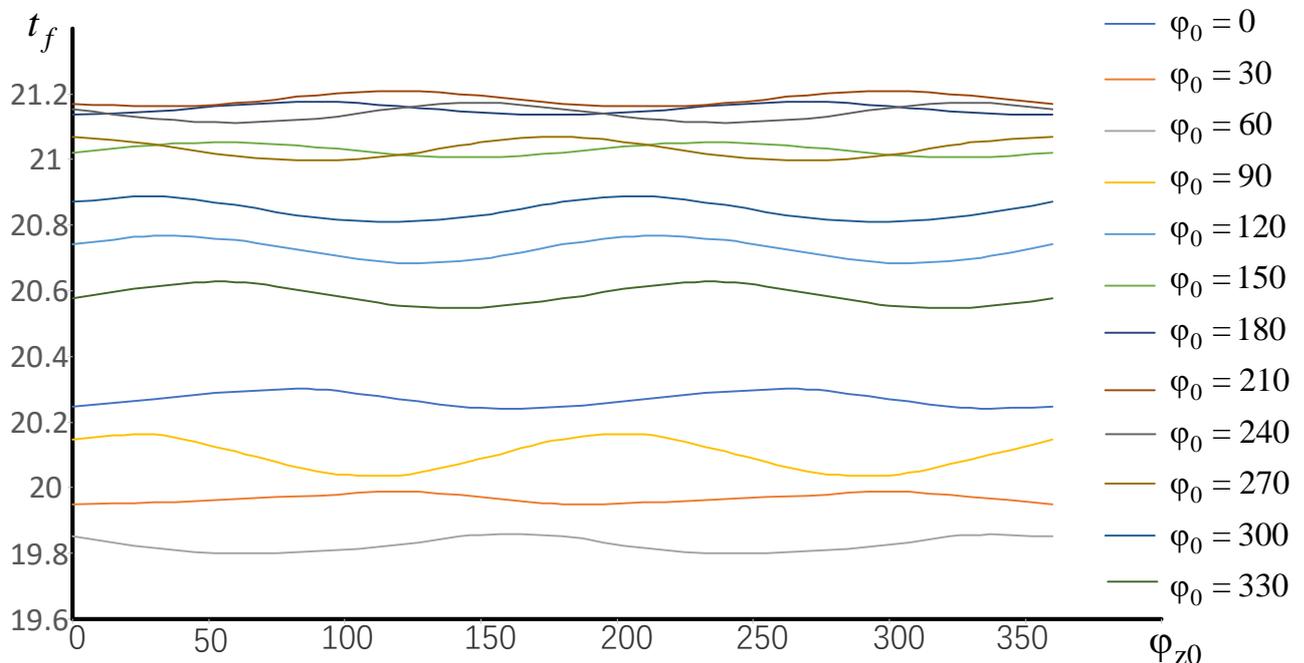


Рисунок 14 – Зависимость затраты времени сближения от начальных фазовых углов

Как следует из рисунка14, начальные фазовые углы слабо влияют на общее время сближения и имеют периодический закон. Период изменения по  $\varphi$  составляет  $\pi$ , а по  $\varphi_z$  -  $2\pi$ . Поэтому при исследовании характеристик траектории относительного движения и оптимального управления в задаче сближения КА влияние начального фазового угла можно не рассматриваться.

### 2.5.3 Влияние начальных значениях $l_0$ и $l_{z0}$

Приведенные исследования показывают, что малая полуось  $l_0$  эллипса и боковое отклонение  $l_{z0}$  в некоторой степени определяют структуру управления. Далее рассматривается их влияние на общее время на линейной модели (2.17) при трёх типовых граничных условиях, которые показаны в таблице 3 в безразмерном виде, по критерию быстродействия:

1) доминирование требования коррекции смещения вдоль орбиты (граничное условие 1);

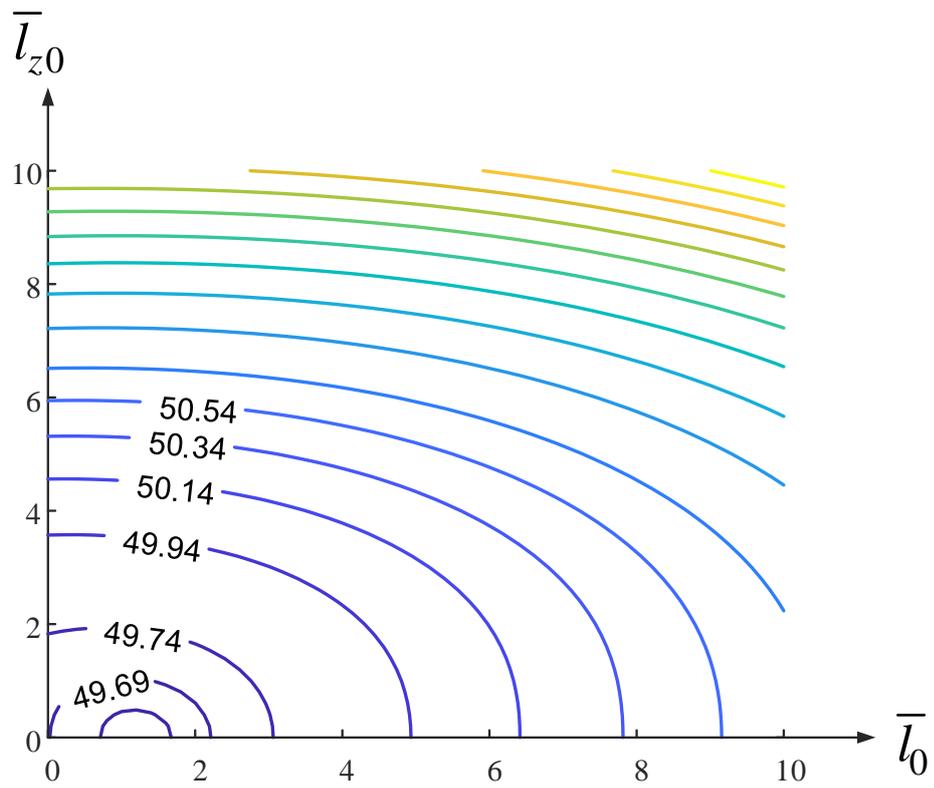
2) доминирования требования коррекции смещения вдоль радиуса орбиты и смещения вдоль орбиты эквивалентны (граничное условие 2);

3) доминирование требования коррекции смещения вдоль радиуса орбиты (граничное условие 3).

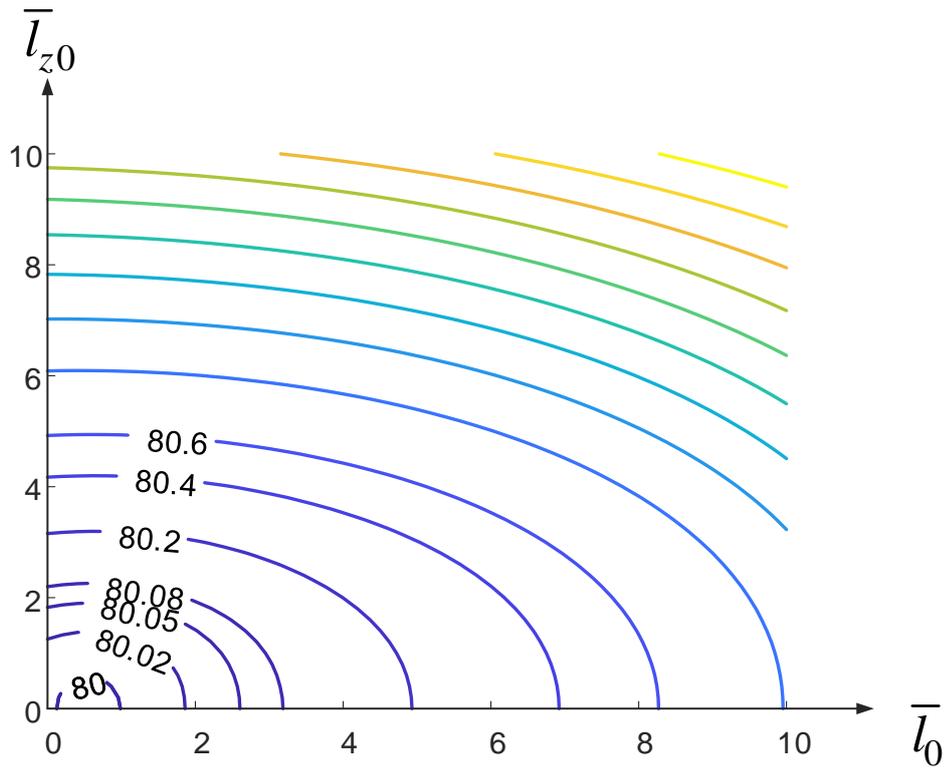
**Таблица 3 – Граничные условия (ГУ)**

Начальные граничные условия	$\Delta \bar{r}_{\text{ср}0}$	$\Delta \bar{L}_{\text{ср}0}$
1	2	1000
2	40	60
3	20	0

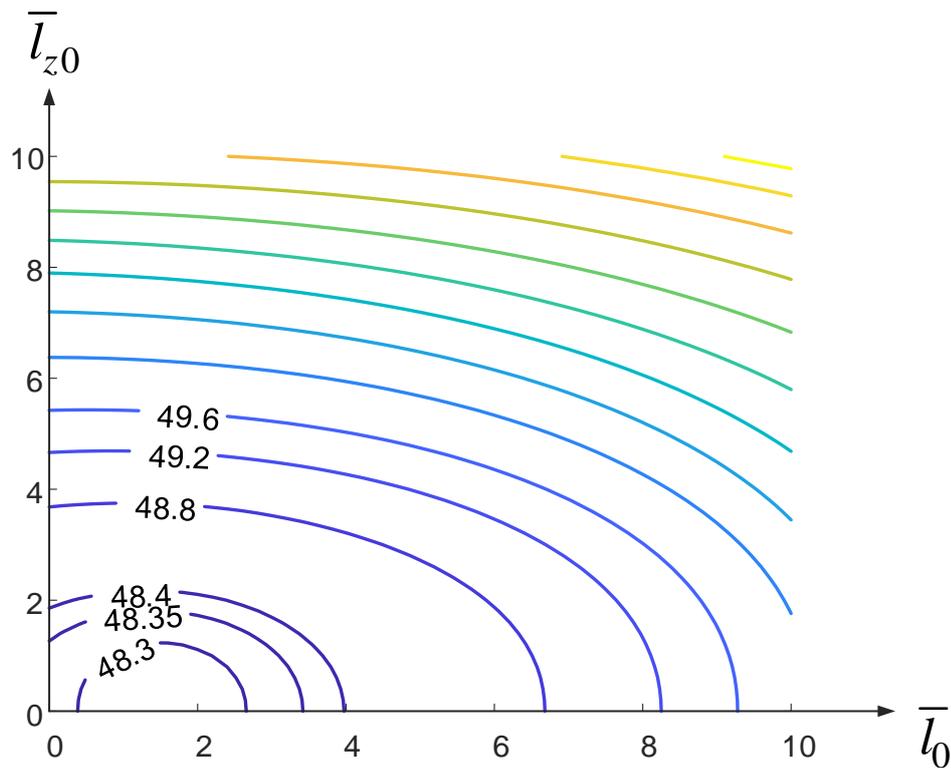
Предлагают, что  $\bar{l}_0$  и  $\bar{l}_{z0}$  изменяются от 0 до 10 и на рисунке 15 показаны контурные линии  $\bar{l}_0$  и  $\bar{l}_{z0}$  по затрате времени.



15.1) Начальное ГУ-1:  $\Delta \bar{r}_{cp} = 2$  и  $\Delta \bar{L}_{cp} = 1000$



15.2) Начальное ГУ-2:  $\Delta \bar{r}_{cp} = 40$  и  $\Delta \bar{L}_{cp} = 60$



15.3) Начальное ГУ-3:  $\Delta \bar{r}_{cp} = 20$  и  $\Delta \bar{L}_{cp} = 0$

Рисунок 15 – Контурный график зависимости времени сближения от  $\bar{l}_0$  и  $\bar{l}_{z0}$

Как следует из рисунка 15 можно сделать следующие выводы:

- 1) Контурные графики имеют схожие свойства, Контурные линии представляют собой субэллиптические дуги;
- 2) Минимальное значение моторного времени не находится в начале координат;
- 3) Разреженность контуров показывает, что  $\bar{l}_{z0}$  оказывает большее влияние на моторное время, чем  $\bar{l}_0$ .

Когда  $l = 0$  и  $l_z = 0$  из системы уравнения (2.7) можно найти:

$$\begin{aligned} \Delta r &= \Delta r_{cp}; \Delta L = \Delta L_{cp}; \\ \Delta z &= 0; \Delta V_z = 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Следовательно:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = -\frac{2\Delta V_u}{\lambda}, \quad (2.28)$$

$$\Delta V_r = 0.$$

Из законов Кеплера знаем, что текущая разница трансверсальных скоростей в это момент составляет половину теоретического значения при невозмущенном движении. Т.е. КА2 имеет тенденцию удаляться от пассивного, и поэтому двигатели должны совершать дополнительную работу и времени, чтобы преодолеть эту тенденцию. Поэтому минимальное значение общего времени не находится в начале координат.

### 2.5.4 Поэтапное управление

Приведённые исследования показывают, что можно отдельно рассматривать продольное движение от бокового. Поэтому представляется разумным разделить управления на этапы. На первом этапе происходит коррекция продольного движения, а на втором — коррекция бокового.

На первом этапе рассматривается оптимальное управление по быстродействию ( $\delta=1$ ). Соответственные дифференциальные уравнения относительного движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\bar{r}}_{cp} &= \cos(\alpha), & \Delta \dot{\bar{L}}_{cp} &= -1,5\Delta \bar{r}_{cp} - \sin(\alpha), \\ \dot{\bar{l}}_x &= \cos(\alpha) - \bar{l}_y, & \dot{\bar{l}}_y &= \frac{\sin(\alpha)}{2} + \bar{l}_x, \end{aligned} \quad (2.29)$$

Запишем уравнение Гамильтониана (2.29) с использованием принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned} H &= \Psi_{\Delta r_{cp}} \cos(\alpha) - \Psi_{\Delta L_{cp}} (1,5\Delta \bar{r}_{cp} + \sin(\alpha)) + \\ &+ \Psi_{l_x} (\cos(\alpha) - \bar{l}_y) + \Psi_{l_y} \left( \frac{\sin(\alpha)}{2} + \bar{l}_x \right) - 1. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Сопряжённые переменные  $\Psi = [\Psi_{\Delta r_{cp}}, \Psi_{\Delta L_{cp}}, \Psi_{l_x}, \Psi_{l_y}]$  определяются из условия максимума Гамильтониана и имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{\Delta r_{cp}} &= 1.5\Psi_{\Delta L_{cp}}, & \dot{\Psi}_{\Delta L_{cp}} &= 0, \\ \dot{\Psi}_{l_x} &= -\Psi_{l_y}, & \dot{\Psi}_{l_y} &= \Psi_{l_x}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

И оптимальное управление:

$$\sin(\alpha_{\text{опт}}) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos(\alpha_{\text{опт}}) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.32)$$

$$\text{Здесь } A = \frac{\Psi_{l_y}}{2} - \Psi_{\Delta L_{cp}}, \quad B = \Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{cp}}.$$

На втором этапе рассматривается только боковое движение, и дифференциальные уравнения относительного движения имеют вид:

$$\dot{\bar{l}}_{zx} = \frac{\delta_W}{2} - \bar{l}_{zy}, \quad \dot{\bar{l}}_{zy} = \bar{l}_{zx}. \quad (2.33)$$

$$\text{Здесь } \delta_W = \{-1, 1\}.$$

Запишем уравнение Гамильтониана (2.33) согласно принципу максимума Гамильтониана:

$$H = \Psi_{l_{zx}} \left( \frac{\delta_W}{2} - \bar{l}_{zy} \right) + \Psi_{l_{zy}} \bar{l}_{zx} - 1. \quad (2.34)$$

Сопряжённые переменные определяются из условия максимума Гамильтониана и имеют вид:

$$\dot{\Psi}_{l_{zx}} = -\Psi_{l_{zy}}, \quad \dot{\Psi}_{l_{zy}} = \Psi_{l_{zx}}. \quad (2.35)$$

И оптимальное управление:

$$\delta_{W_{\text{опт}}} = \text{sign}(\Psi_{l_{zx}}). \quad (2.36)$$

Для анализа характера поэтапного управления принимают типовые граничные условия, показанные в таблице 2. В таблице 4 приведены результаты решения задач управления для введённых граничных условий на основе метода совместного и поэтапного управления.

**Таблица 4 – Результат решения задач совместное и поэтапное управления (затраты времени)**

Начальные граничные условия	Совместное управление	Поэтапное управление		
		Коррекция продольного движения	Коррекция бокового движения	Суммарные затраты
1	20,2447	19,9914	6,2832	26,2746
2	31,7952	17,9401	31,4159	49,3560
3	72,4283	70,9021	31,4159	102,3180

Из таблицы 4 можно сделать вывод: проигрыш по времени коррекции составляет 30% - 40% при поэтапном управлении.

## **2.6 Оптимальное управление по критерию моторного времени**

Кроме критерия по быстродействию одним из наиболее часто используемых критериев оптимизации является минимизация моторного времени. При использовании этого критерия в задаче сближения обычно фиксируется общее время перелёта. Выбор такого критерия обусловлен стремлением к оптимизации времени работы двигателя с целью экономии топлива или продления его срока службы. В этом случае, важно минимизировать суммарное время работы двигателя, что приводит к оптимальному использованию его ресурсов и сокращению износа.

Из-за дискретного характера функции переключения задача оптимального по моторному времени часто оказывается сложнее, чем задача оптимального по быстродействию при тех же граничных условиях. Это связано с необходимостью учёта дискретных переключений управления, которые могут значительно усложнить процесс оптимизации и уменьшить сходимость задачи. При этом прямое решение граничной задачи с использованием методов градиента или коллокации точек становится крайне сложным из-за дискретной природы переключений.

Поэтому для пошагового решения задачи оптимизации по минимизации моторного времени часто используется метод гомотопии, который становится мощным инструментом для решения сложных задач оптимизации в космической навигации, где требуется учёт различных критериев и ограничений. Этот метод позволяет постепенно преодолевать сложности дискретных переключений, начиная с относительно более простой задачи оптимизации по быстродействию. Идея заключается в том, что решение задачи оптимизации по быстродействию используется в качестве начального приближения для последующего пошагового уточнения решения задачи оптимизации по минимизации моторного времени. Этот подход позволяет избежать сложностей прямого решения задачи оптимизации по минимизации моторного времени и повысить эффективность численного метода.

Критерий оптимизации по моторному времени имеет вид:

$$J = \int_0^{t_f} \delta dt \rightarrow \min. \quad (2.37)$$

Запишем уравнение Гамильтониана относительного движения принципом максимума Гамильтониана с учётом времени работы двигателя:

$$\begin{aligned}
H = & \Psi_{\Delta r_{cp}} \delta \cos(\alpha) \cos(\beta) - \Psi_{\Delta L_{cp}} \left( 1.5 \Delta \bar{r}_{cp} + \delta \sin(\alpha) \cos(\beta) \right) + \\
& + \Psi_{l_x} \left( \delta \cos(\alpha) \cos(\beta) - \bar{l}_y \right) + \Psi_{l_y} \left( \frac{\delta \sin(\alpha) \cos(\beta)}{2} + \bar{l}_x \right) + \\
& + \Psi_{l_{zx}} \left( \frac{\delta \sin(\beta)}{2} - \bar{l}_{zy} \right) + \Psi_{l_{zy}} \bar{l}_{zx} - \delta.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

В соответствии с идеей метода гомотопии, введём параметр гомотопии  $\varepsilon$  для постепенного перехода от оптимальной по быстродействию к оптимальной по моторному времени. Когда  $\varepsilon$  достаточно мало, примерно  $\varepsilon < 10^{-8}$ , можно считать  $\varepsilon$  равным 0. Тогда в качестве критерия оптимальности принимают:

$$J = \int_0^{t_f} 1 - \varepsilon(1 - \delta) dt \tag{2.39}$$

Соответственная функция переключения имеет вид:

$$\delta^* = \begin{cases} 0 & \Delta < \varepsilon, \\ \frac{\varepsilon + \Delta}{2\varepsilon} & -\varepsilon \leq \Delta \leq \varepsilon, \\ 1 & \Delta > \varepsilon, \end{cases} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \tag{2.40}$$

Где  $\Delta = -1 + \Psi_m + C$ ,  $C = \sqrt{\Psi_{l_{zx}}^2 / 4 + (A^2 + B^2)}$

В задаче оптимизации по быстродействию начальное значение параметра  $\varepsilon$  должны обеспечивать условие  $\Delta > \varepsilon$ .

Таким образом, можем свести задачу оптимального управления по быстродействию к двухточечной краевой задаче для дифференциального уравнения относительного движения (2.17) с управлением (2.21) и приближительной функцией переключения (2.40).

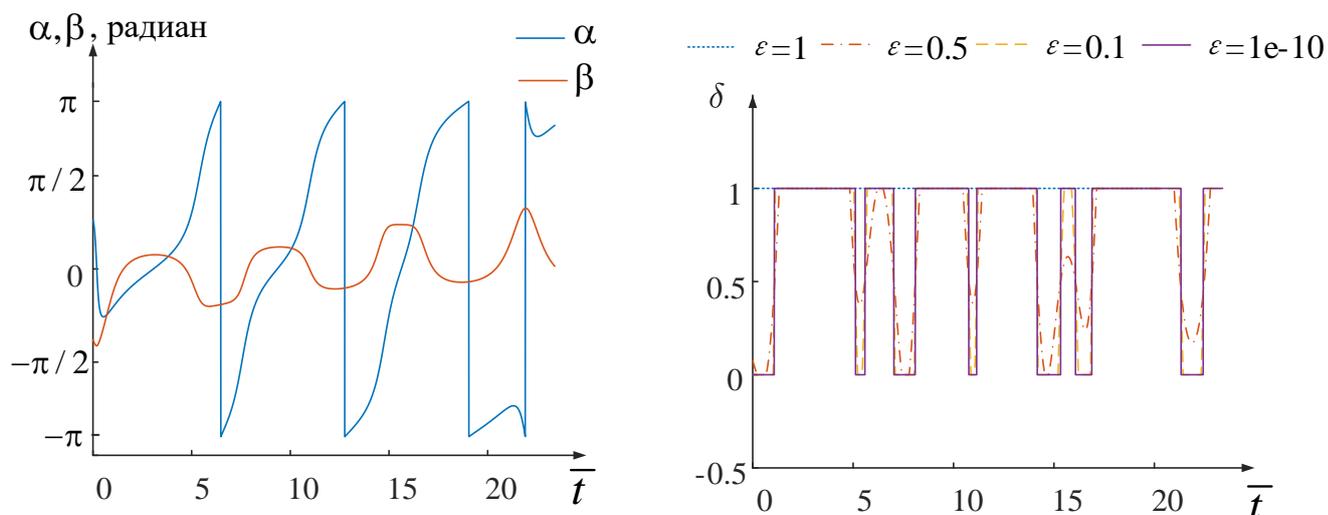
Выполнен расчёт оптимальных траекторий по критерию минимума моторного времени на линейной модели (2.17) при фиксированном общем времени перелёта с граничными условиями, показанными в таблице 5 в безразмерном виде.

**Таблица 5 – Моторное времени при фиксированном общем времени перелёта**

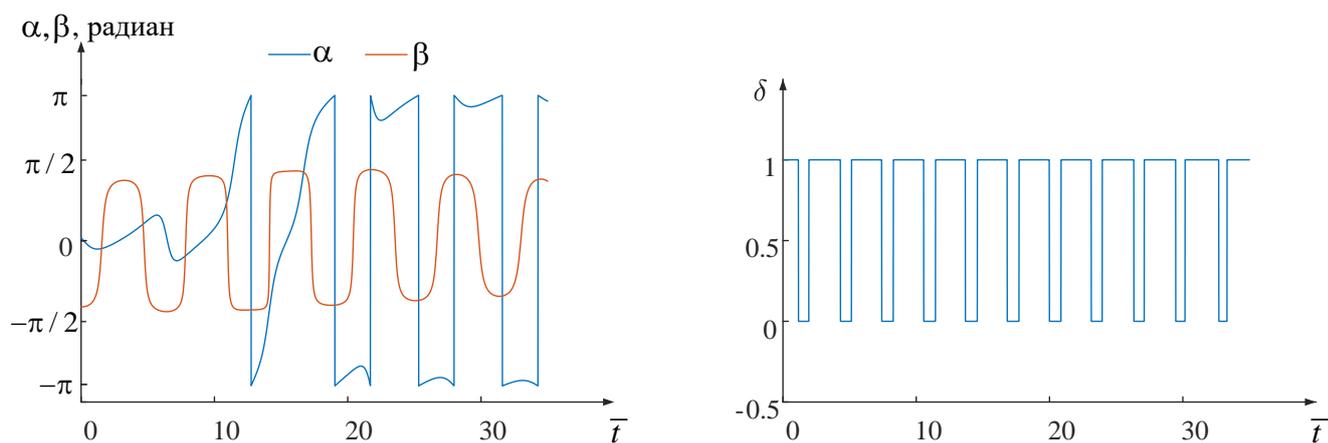
Начальные граничные условия	$\Delta \bar{r}_{cp_0}$	$\Delta \bar{L}_{cp_0}$	$\bar{l}_0$	$\bar{l}_{z_0}$	Фиксированное общее время	Моторное время
1	2	140	10	2	23,4	17,3
2	2	140	2	10	35	26,1
3	20	2800	2	10	74	63,3

Как показано в таблице 5, по сравнению с результатами в задачи сближения по критерию быстродействия добавление пассивного участка может уменьшать моторное время перелёта для любых типовых граничных условий:

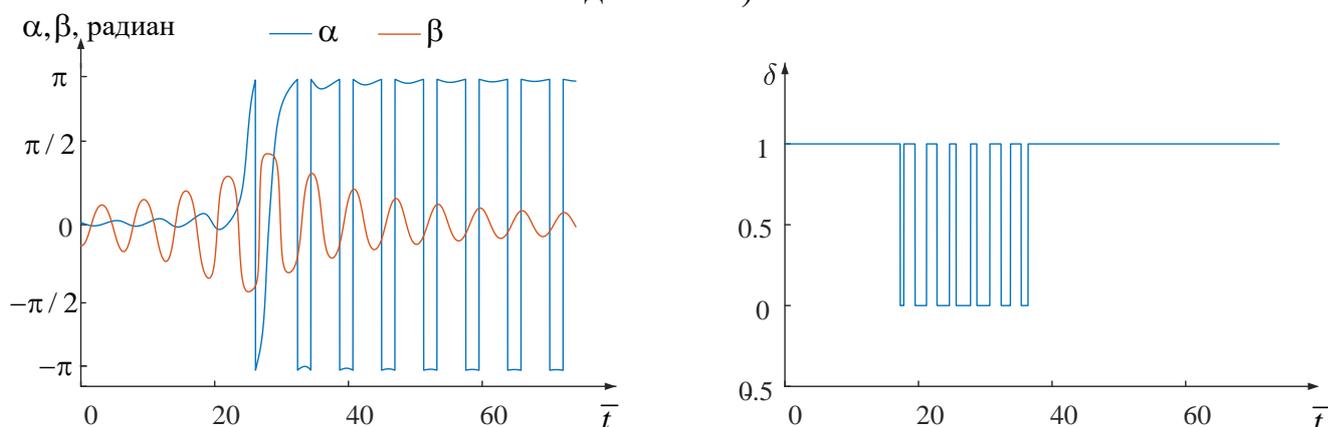
На рисунке 16 приведены результаты решения с применением метода гомотопии. Оптимальные управления для граничных условий 1-3 показаны на рисунках 16.а-16.в. Иллюстрация применения метода гомотопии показана на рисунке 16.а.



а) граничное условие 1 (доминирование требования коррекции малой полуоси эллипса)



б) граничное условие 2 (доминирование требования коррекции бокового движения)

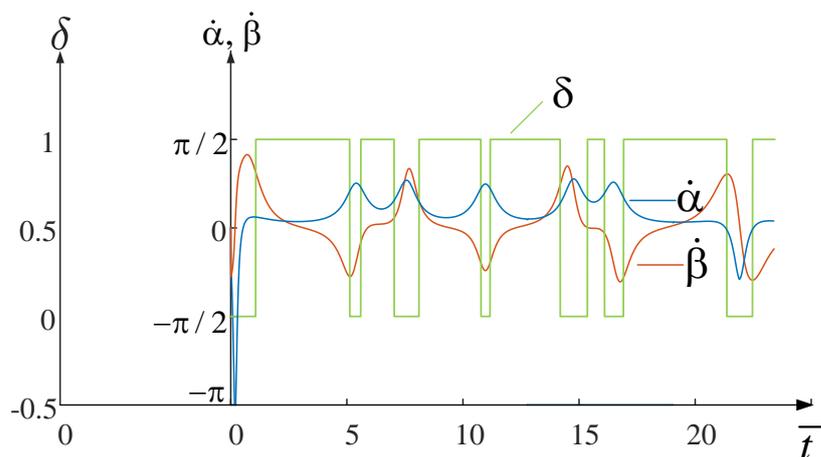


в) граничное условие 3 (доминирование требования коррекции векового движения)

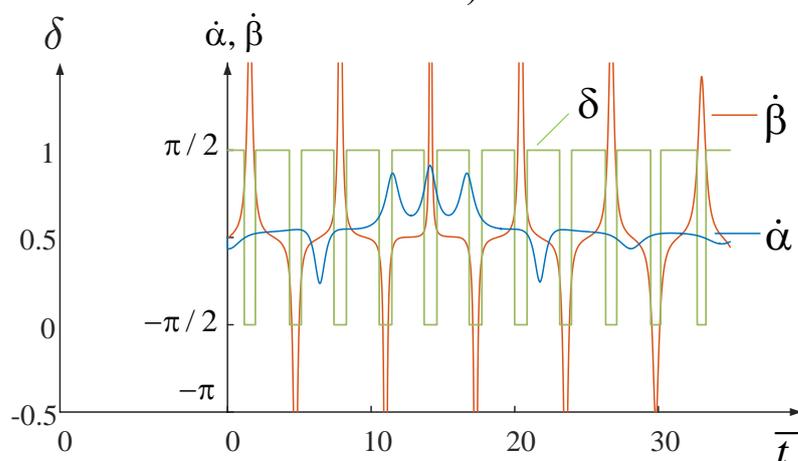
Рисунок 16 – Оптимальные управления и иллюстрация применения метод продолжения по гомотопическому параметру для граничных условий 1-3

Из рисунке 16.а видно, что по мере уменьшения гомотопического параметра  $\varepsilon$  от 1 до  $10^{-10}$  функция переключения постепенно приближается к стандартной функции переключения с формой  $[0, 1]$ , т.е. функция переключения постепенно переходит от гладкой линейной функции к нелинейной дискретной функции. Численные расчёты показывают, что метод гомотопии обладает хорошей сходимостью в критерии минимума моторного времени, что закладывает основу для следующих исследований. Добавление пассивного участка в основном влияет на структуру управления угла  $\beta$ .

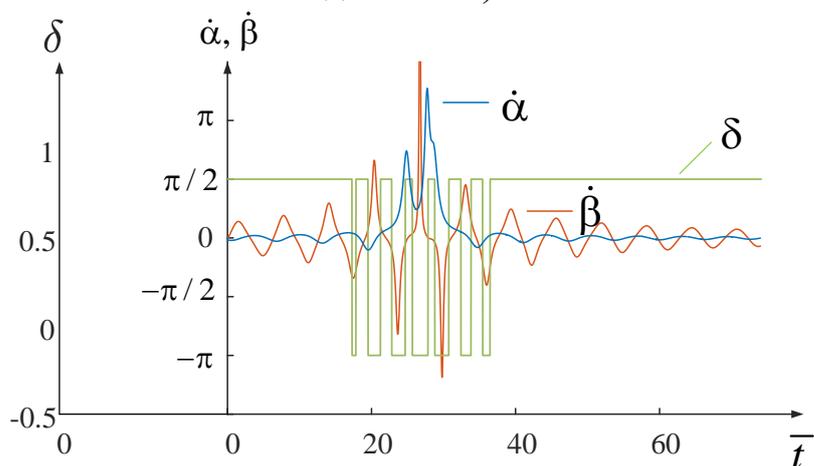
На рисунке 17 проведен анализ отношения между производными оптимального управления и их функцией переключения при типовых граничных условиях.



а) Граничное условие-1 (доминирование требования коррекции малой полуоси эллипса)



б) Граничное условие-2 (доминирование требования коррекции бокового движения)



в) Граничное условие-3 (доминирование требования коррекции векового движения)

Рисунок 17 – Угловые скорости оптимальных углов  $\alpha$  и  $\beta$  и функция переключения для граничных условий 1-3

Из рисунка 17 видно, что для случая доминирования требования коррекции периодического движения изменения по модулям производных двух оптимальных углов в основном совпадают в значительной степени: либо скоординировано увеличиваются, либо уменьшаются. Интервалы, в которых появляются пассивные участки, соответствуют интервалам, когда производные двух управляющих углов достаточно велики; Для случая доминирования требования коррекции бокового движения изменение производного угла  $\beta$  имеет разрыв в интервале от 20 до 40 по безразмерному времени, а в интервале от 0 до 20 и от 40 до конца представляет собой колебательное. В интервале от 6 до 23 производная угла  $\alpha$  достигает максимального значения; Интервалы, в которых появляются пассивные участки, соответствуют интервалам, когда только производная угла  $\beta$  достаточно велика. Для случая доминирования требования коррекции векового движения изменения по модулям производных двух оптимальных углов в основном противоположны и представляют собой колебательные. Интервалы, в которых появляются пассивные участки, соответствуют интервалам, когда также производная угла  $\beta$  достаточно велика.

## Выводы по второй главе

В данной главе исследованы структуры управления для двух различных критериев оптимизации при отсутствии ограничения на направления тяги двигателя и получены следующие выводы:

1. В задаче сближения двух КА начальные граничные условия задачи можно разделить на три типа: доминирование коррекции периодического движения; доминирования коррекции векового и периодического движения; доминирования коррекции векового движения. Оптимальное управление имеет сложную структуру при разных типовых граничных условиях и обычно состоит из 2 характерных областей;

2. В компоненте периодических составляющих влияние относительной фазы КА  $(\varphi, \varphi_z)$  на продолжительность сближения КА имеет периодический характер (период  $\pi$ ), причем это влияние мало по сравнению с другими составляющими;

3. Контурная линия затраты времени по  $l$  и  $l_z$  представляет собой эллиптическую, причем минимальное значение находится не в начале координат, а на оси  $l_0$ ;

4. Используя метод коллокации, метод градиента и метод гомотопии, удалось эффективно решить краевую задачу в задаче относительного движения КА с хорошей сходимостью;

5. Количество переключателей функции переключения и его интервалы, в которых появляются пассивные участки, зависят от угла отклонения тяги от плоскости орбиты - угла  $\beta$ . Когда угол  $\beta$  достаточно велик, появляется пассивный участок.

### 3 Оптимальное управление ориентации тяги в плоскости местного горизонта

При пространственном относительном движении космических аппаратов условие свободной ориентации вектора тяги часто становится трудно выполнимым на практике. Кроме того, существуют определенные ограничения на ориентацию тяги, которые могут быть вызваны техническими соображениями. Исследования, посвященные случаям ограничений на ориентацию вектора тяги, встречаются нечасто, что обусловлено сложностью таких моделей и их применением в реальных космических миссиях. Однако, понимание и учёт этих ограничений важны для разработки более реалистичных и надежных алгоритмов управления.

В данной главе исследуется случай, когда ориентация вектора тяги в плоскости местного горизонта. Это означает, что направление тяги может изменяться только в пределах горизонтальной плоскости, параллельной поверхности планеты. Такое управление является одноканальным, что проще с точки зрения практической реализации.

Исследование этого случая управления позволяет более полно оценить влияние ограничений на ориентацию тяги на динамику и управление пространственным относительным движением КА. Это важно как для теоретических исследований, так и для практического применения в реальных космических миссиях

Для случая ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта проекции векторы ускорения на оси координаты имеют вид:

$$\delta_T = \cos(\alpha)\delta, \delta_S = 0, \delta_W = \sin(\alpha)\delta. \quad (3.1)$$

Здесь:  $\alpha$  – угол отклонения тяги от плоскости орбиты.

Соответственно выпишем уравнение относительного движения при ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта:

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{\bar{r}}_{cp} &= \cos(\alpha), & \Delta \dot{\bar{L}}_{cp} &= -1,5\Delta \bar{r}_{cp}, \\
\dot{\bar{l}}_x &= \cos(\alpha) - \bar{l}_y, & \dot{\bar{l}}_y &= \bar{l}_x, \\
\dot{\bar{l}}_{zx} &= \frac{\sin(\alpha)}{2} - \bar{l}_{zy}, & \dot{\bar{l}}_{zy} &= \bar{l}_{zx}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

С применением принципа максимума Понтрягина запишем Гамильтониан системы уравнения (3.2) с учётом времени работы двигателя:

$$\begin{aligned}
H &= \Psi_{\Delta r_{cp}} \delta \cos(\alpha) - 1,5\Psi_{\Delta L_{cp}} \Delta \bar{r}_{cp} + \Psi_{l_x} (\delta \cos(\alpha) - \bar{l}_y) + \Psi_{l_y} \bar{l}_x + \\
&+ \Psi_{l_{zx}} \left( \frac{\delta \sin(\alpha)}{2} - \bar{l}_{zy} \right) + \Psi_{l_{zy}} \bar{l}_{zx} + \Psi_m \delta.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь  $\Psi = [\Psi_{\Delta r_{cp}}, \Psi_{\Delta L_{cp}}, \Psi_{l_x}, \Psi_{l_y}, \Psi_{l_{zx}}, \Psi_{l_{zy}}]$  – сопряжённые переменные, определяются из условия:

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}. \tag{3.4}$$

Система уравнения сопряжённых переменных имеет аналитическое решение:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\Delta r_{cp}}(t) &= \Psi_{\Delta r_{cp0}} + 1,5t\Psi_{\Delta L_{cp0}}, & \Psi_{\Delta L_{cp}}(t) &= \Psi_{\Delta L_{cp0}}, \\
\Psi_{l_x}(t) &= \sqrt{\Psi_{l_{x0}}^2 + \Psi_{l_{y0}}^2} \cos\left(t + \arctg\left(\frac{\Psi_{l_{y0}}}{\Psi_{l_{x0}}}\right)\right), \\
\Psi_{l_y}(t) &= \sqrt{\Psi_{l_{x0}}^2 + \Psi_{l_{y0}}^2} \sin\left(t + \arctg\left(\frac{\Psi_{l_{y0}}}{\Psi_{l_{x0}}}\right)\right), \\
\Psi_{l_{zx}}(t) &= \sqrt{\Psi_{l_{zx0}}^2 + \Psi_{l_{zy0}}^2} \cos\left(t + \arctg\left(\frac{\Psi_{l_{zy0}}}{\Psi_{l_{zx0}}}\right)\right), \\
\Psi_{l_{zy}}(t) &= \sqrt{\Psi_{l_{zx0}}^2 + \Psi_{l_{zy0}}^2} \sin\left(t + \arctg\left(\frac{\Psi_{l_{zy0}}}{\Psi_{l_{zx0}}}\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Оптимальное управление определяется из условия максимума Гамильтониана:

$$\sin(\alpha_{\text{опт}}) = \frac{\Psi_{l_{zx}}}{\sqrt{\Psi_{l_{zx}}^2 + 4(\Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{cp}})^2}}, \quad \cos(\alpha_{\text{опт}}) = \frac{2(\Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{cp}})}{\sqrt{\Psi_{l_{zx}}^2 + 4(\Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{cp}})^2}}. \quad (3.6)$$

Проверим необходимое условие максимума Гамильтониана (3.3) при управлении (3.6). Вторые производные Гамильтониана по управлению равны:

$$a = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} H = -\sqrt{\left(\frac{\Psi_{l_{zx}}}{2}\right)^2 + (\Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{cp}})^2}.$$

Согласно теории, если  $a < 0$ , то функция Гамильтониана достигает максимума по управлению в любой момент времени. В рассматриваемом случае слагаемое  $a$  может принимать только отрицательные значения, следовательно, управление (3.6) доставляет максимум Гамильтониана (3.3) в любой момент времени.

### 3.1 Оптимальное управление по быстродействию

Для случая, когда имеется только один угол управления, также рассматриваются критерии оптимальности по быстродействию. Гамильтониан системы уравнения (3.2) имеет вид:

$$H = \Psi_{\Delta r_{cp}} \delta \cos(\alpha) - 1.5 \Psi_{\Delta L_{cp}} \Delta \bar{r}_{cp} + \Psi_{l_x} (\delta \cos(\alpha) - \bar{l}_y) + \Psi_{l_y} \bar{l}_x + \Psi_{l_{zx}} \left( \frac{\delta \sin(\alpha)}{2} - \bar{l}_{zy} \right) + \Psi_{l_{zy}} \bar{l}_{zx} - 1. \quad (3.7)$$

И соответственная функция переключения имеет вид:

$$\delta = 1 \quad (3.8)$$

Таким образом, можно свести задачу оптимального управления по быстродействию к двухточечной краевой задаче для дифференциального

уравнения относительного движения (3.2) с управлением (3.6) и функцией переключения (3.8). Решение краевой задачи сводится, по сути, к определению начальных значений сопряженных переменных (3.5)

Выполнены расчёты на линейной модели (3.2) для критерия моторного времени при типовых ГУ, показанных в таблице 2. В таблице 6 сравниваются степени неоптимальности программ управления при свободной ориентации вектора тяги и ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта.

**Таблица 6 – Степень неоптимальности для критерия быстродействия**

Начальные граничные условия	1	2	3
Управление без ограничения	20,24	31,80	72,43
Управление с ограничением	23,22	31,84	72,48
Степень неоптимальности	14%	0.12%	0.06%

Оптимальное управление КА имеет сложную структуру при различных типах ГУ. На рисунках 18-20 приведены моделирования для случая ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта.

На рисунках 18-20 показаны траектории и управления для случая доминирования коррекции малой полуоси эллипса относительного движения (граничное условие №1), доминирования коррекции амплитуды боковых колебаний (граничное условие №2) и доминирования коррекции векового движения (граничное условие №3).

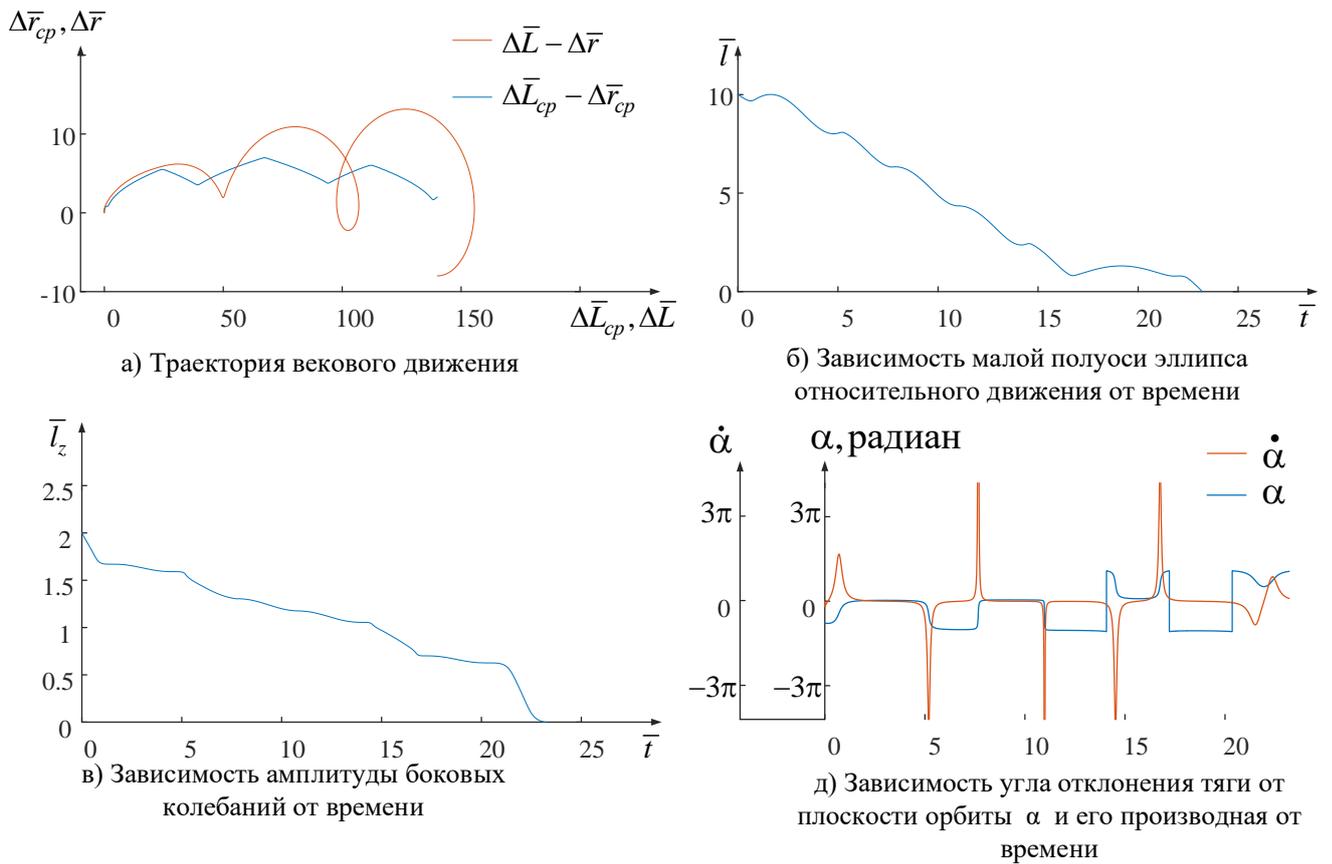


Рисунок 18 – Оптимальное управление (д) и траектория движения (а, б, в) для начального ГУ 1 с вектором тяги, лежащим в плоскости местного горизонта

Как видно из рисунка 18, при доминировании требования коррекции малой полуоси относительного движения  $l_0$  оптимальная программа угла  $\alpha$  содержит две характерных области. Первая область находится в интервале безразмерного времени от 0 до 14, угол  $\alpha$  колеблется между  $0^\circ$  и  $-180^\circ$ . Вторая область находится в интервале безразмерного времени от 14 до конца, угол  $\alpha$  колеблется между  $0^\circ$  и  $180^\circ$ . В момент безразмерного времени 7.7 и 11 производная угла  $\alpha$  большая, но конечная. В моменты безразмерного времени 14, 17.2 и 20.3 возникают разрывы производной угла  $\alpha$  из-за переключения угла  $\alpha$  с минус  $180^\circ$  на плюс  $180^\circ$ .

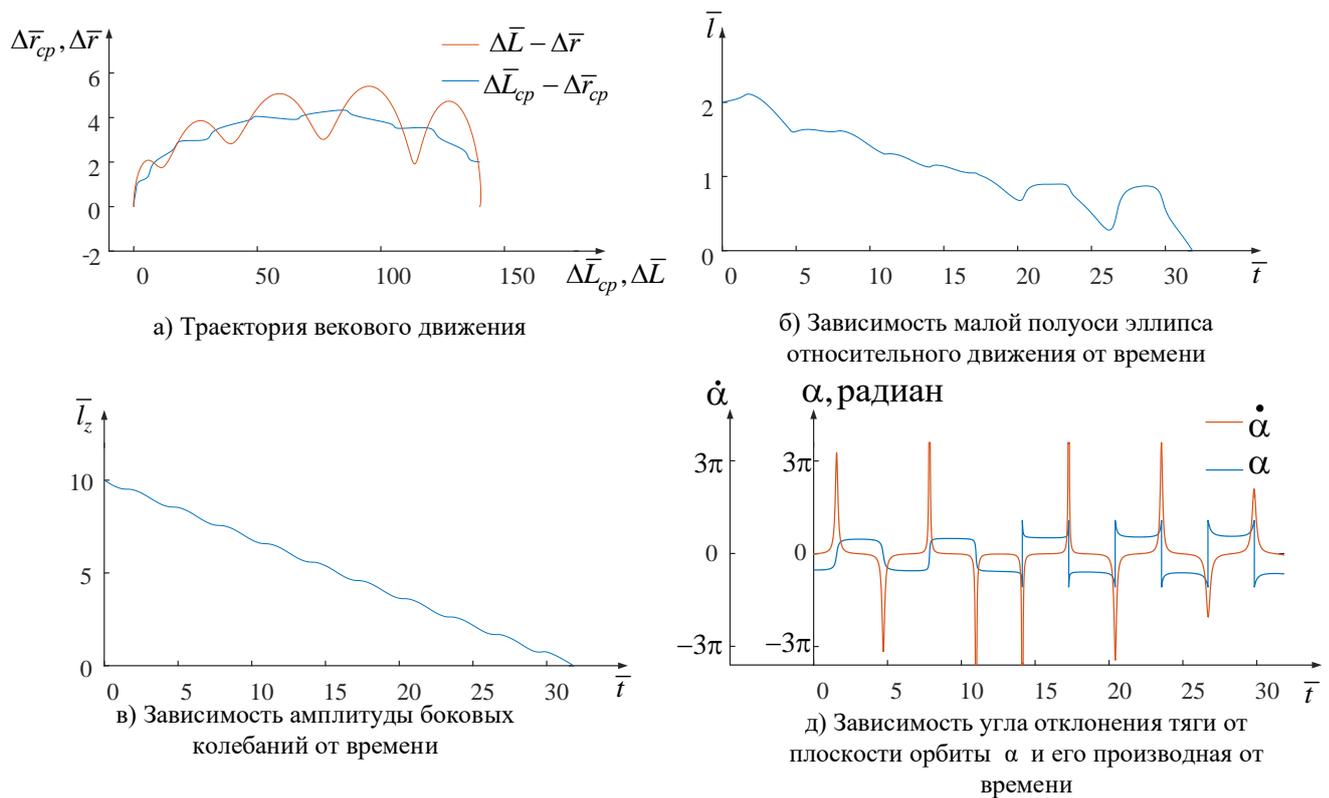


Рисунок 19 – Оптимальное управление (д), траектория движения (а, б, в) и относительные скорости (г) для начального ГУ 2 с вектором тяги, лежащим в плоскости местного горизонта

Как видно из рисунка 19, при доминировании требования коррекции амплитуды боковых колебаний  $l_{z0}$  оптимальная программа угла  $\alpha$  содержит две характерных области. Первая область находится в интервале безразмерного времени от 0 до 14, угол  $\alpha$  колеблется между  $-100^\circ$  и  $100^\circ$ . Вторая область находится в интервале безразмерного времени от 15 до конца, угол  $\alpha$  колеблется между  $100^\circ$  и  $260^\circ$ . В моменты безразмерного времени 7.9 и 11 производная угла  $\alpha$  большая, но конечная. В моменты безразмерного времени 14.1, 17.3, 20.5, 23.6 и 30 возникают разрывы производной угла  $\alpha$  из-за переключения угла  $\alpha$  с минус  $180^\circ$  на плюс  $180^\circ$ .

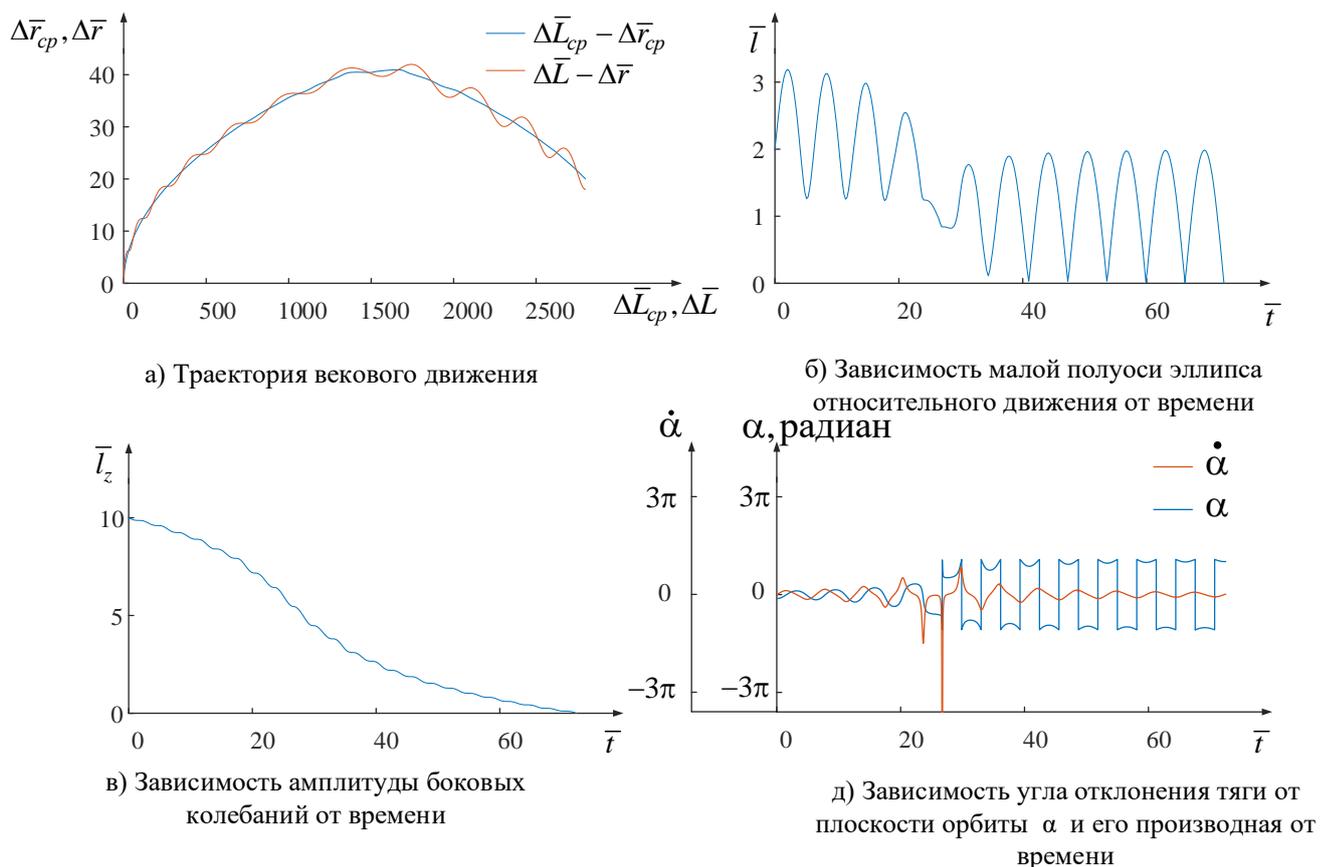


Рисунок 20 – Оптимальное управление (д), траектория движения (а, б, в) и относительные скорости (г) для начального ГУ 3 с вектором тяги, лежащим в плоскости местного горизонта

Как видно из рисунка 20, при доминировании требования коррекции амплитуды боковых колебаний  $l_{z_0}$  оптимальная программа угла  $\alpha$  содержит две характерных области. Первая область находится в интервале безразмерного времени от 0 до 26.7, угол  $\alpha$  демонстрирует явление вынужденных колебаний около  $0^\circ$ . Вторая область расположена в интервале безразмерного времени от 15 до конца, угол  $\alpha$  демонстрирует явление затухающих колебаний около  $180^\circ$ . После момента безразмерного времени 26.9 возникают несколько раз разрыва производной угла  $\alpha$ . Это связано с преобразованием угла  $\alpha$  с минус 180 на плюс 180 градусов.

Сравнивая характеристики структуры управления при свободной ориентации вектора тяги, можно заметить, что при доминировании требования коррекции

векового движения изменение угла управления при ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта происходит более плавно. Это делает его более простым в реализации в реальных пространственных сближениях. Однако, когда требуется коррекция периодического или бокового движения, изменение угла управления при ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта происходит более резко, что может привести к большому количеству разрывов. В таких ситуациях целесообразнее использовать управление с полной свободой ориентации вектора тяги, поскольку это позволяет более гибко и точно реагировать на изменения вектора скорости и динамику полёта космического аппарата.

Таким образом, выбор между свободной ориентацией вектора тяги и ориентацией вектора тяги в плоскости местного горизонта зависит от конкретных требований и характеристик миссии, включая типы доминирования требования коррекций, степень точности и технические ограничения.

Проведены решения оптимального управления на линейной модели (2.17) и (3.2) с разными критериями. На рисунке 21 показаны зависимости общего времени  $t_f$  от моторного времени  $t_{mot}$  при двух видах управлений для типовых граничных условий- 1,2 и 3 в таблице 2.

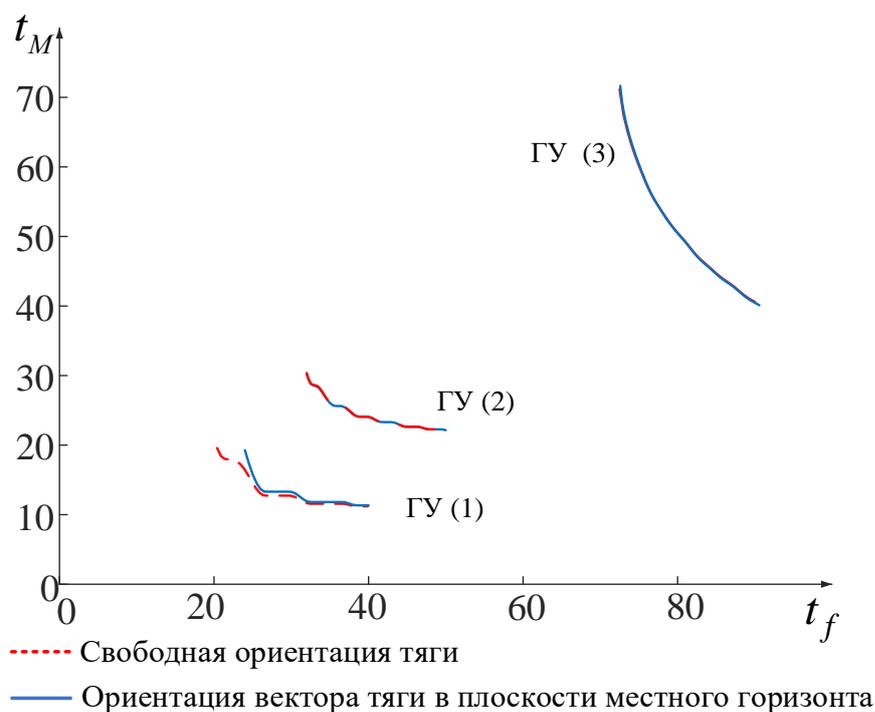


Рисунок 21 – Зависимости общего времени от моторного времени

Из рисунке 21 нетрудно увидеть, что: 1) для различных режимов управления зависимость между общим временем и моторным временем аппроксимируется в виде гиперболы при различных типовых граничных условиях, особенно при доминировании требования коррекции векового движения. 2) С увеличением степени доминирования требования коррекции малой полуоси относительного движения в продольной плоскости увеличивается разница моторного времени при заданном общем времени. 3) Для различных типовых граничных условий, когда общее время стремится к бесконечности, моторное время имеет наименьшее предельное значение.

### 3.2 Оптимальное управление по моторному времени

Критерий по моторному времени имеет вид:

$$J = \int_0^{t_f} \delta dt \rightarrow \min. \quad (3.9)$$

Запишем Гамильтониан для системы уравнения (3.2) принципом максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned}
 H = & \Psi_{\Delta r_{cp}} \delta \cos(\alpha) - 1.5 \Psi_{\Delta L_{cp}} \Delta \bar{r}_{cp} + \\
 & + \Psi_{l_x} (\delta \cos(\alpha) - \bar{l}_y) + \Psi_{l_y} \bar{l}_x + \\
 & + \Psi_{l_{zx}} \left( \frac{\delta \sin(\alpha)}{2} - \bar{l}_{zy} \right) + \Psi_{l_{zy}} \bar{l}_{zx} - \delta.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

В соответствии с идеей метода гомотопии, вводим параметр гомотопии  $\varepsilon$  для постепенного перехода от оптимальной по быстродействию к оптимальной по моторному времени. Когда  $\varepsilon$  достаточно мало, примерно  $\varepsilon < 10^{-8}$ , можно считать  $\varepsilon$  равным 0

$$\delta^* = \begin{cases} 0 & \Delta < \varepsilon, \\ \frac{\varepsilon + \Delta}{2\varepsilon} & -\varepsilon \leq \Delta \leq \varepsilon, \\ 1 & \Delta > \varepsilon, \end{cases} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \tag{3.11}$$

где  $\Delta = -1 + \Psi_m + C$ ,  $C = \sqrt{\Psi_{l_{zx}}^2 / 4 + (A^2 + B^2)}$

В задаче оптимизации по быстродействию начальное значение параметра  $\varepsilon$  должны обеспечивать условие  $\Delta > \varepsilon$ .

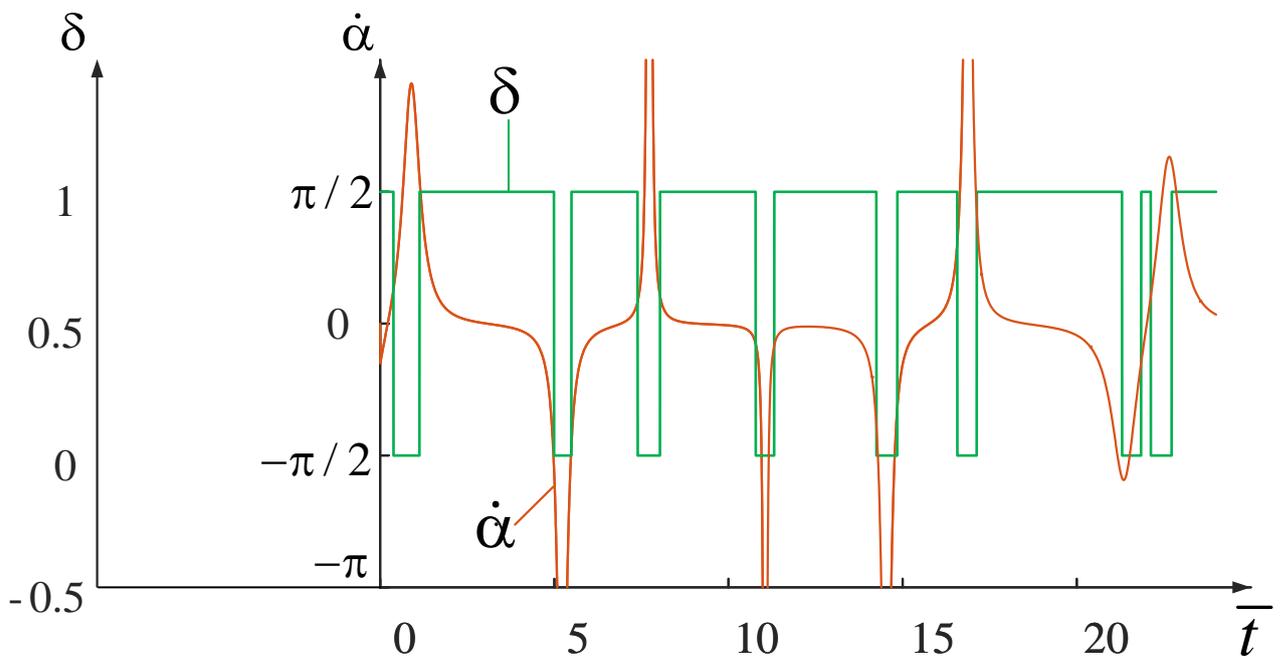
Таким образом, можно свести задачу оптимального управления по быстродействию к двухточечной краевой задаче для дифференциального уравнения относительного движения (3.2) с управлением (3.6) и функцией переключения (3.11). Решение краевой задачи сводится, по сути, к определению начальных значений сопряженных переменных (3.5).

Для анализа характера динамики относительного движения выполнены расчёты оптимального управления на линейной модели (3.2) по моторному времени принимают граничные условия, показанные в таблице 7

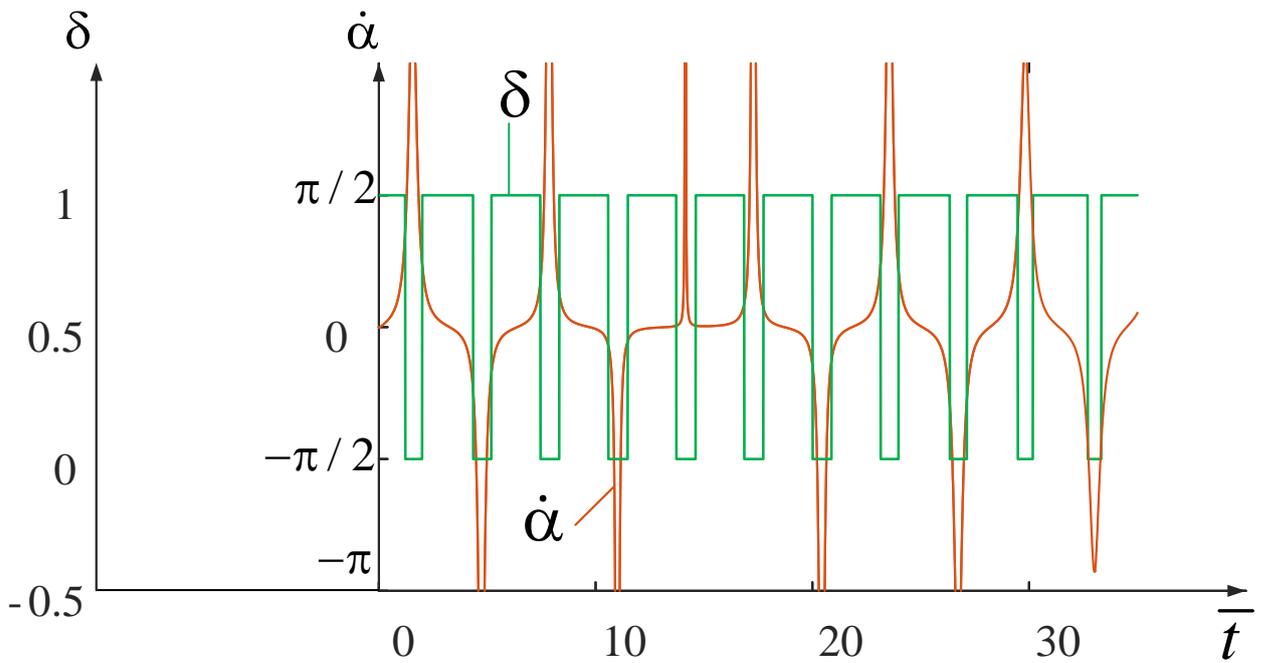
**Таблица 7 – Моторное времени при фиксированном общем времени перелёта**

Начальные граничные условия	$\Delta \bar{r}_{cp_0}$	$\Delta \bar{L}_{cp_0}$	$\bar{l}_0$	$\bar{l}_{z_0}$	Общее время	Моторное время
1	2	140	10	2	24	19,27
2	2	140	2	10	35	26,05
3	20	2800	2	10	74	63,3

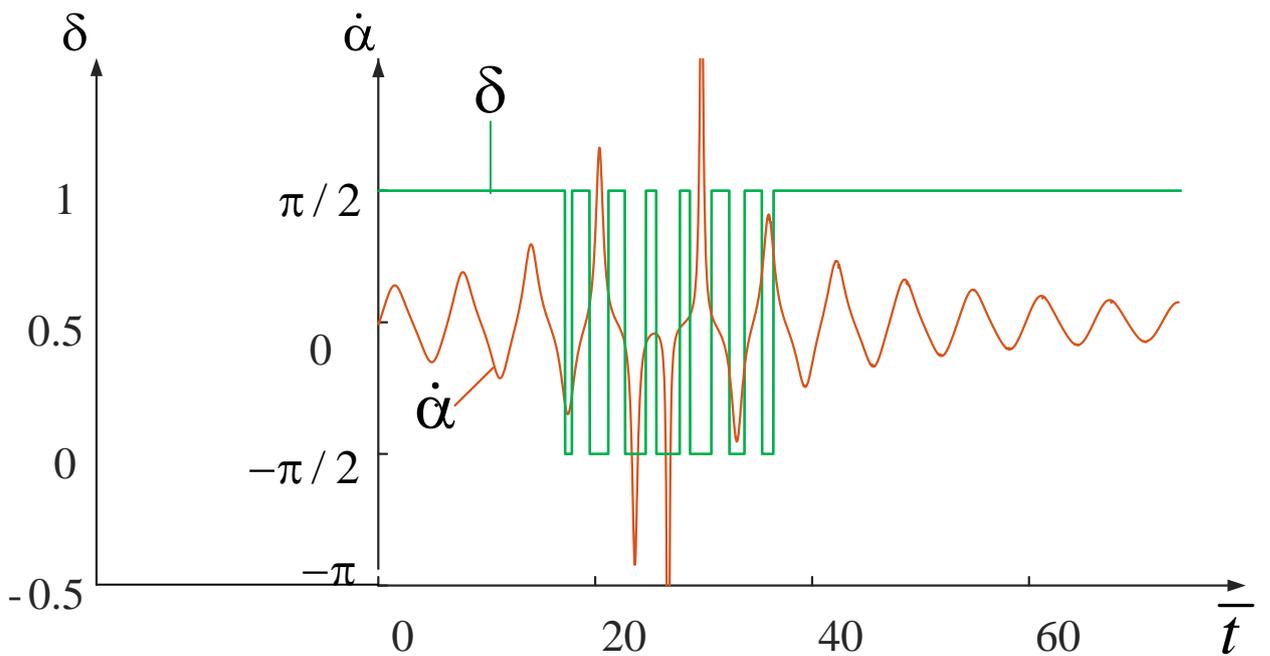
Как видно из таблицы, моторное время составляет только от 74,4 до 85,6 процента общего времени. На рисунке 22 представлены решения производных оптимального управления и соответствующего переключения при типовых граничных условиях.



1) Начальное ГУ- 1. (доминирование требования коррекции малой полуоси эллипса)



2) Начальное ГУ-2. (доминирование требования коррекции бокового движения)



3) Начальное ГУ-3. (доминирование требования коррекции векового движения)

Рисунок 22 – Траектория и управление относительного движения

Как видно из рисунке 22, интервалы, в которых появляются пассивные участки, соответствуют интервалам, когда производные управляющего угла  $\dot{\alpha}$  достаточно велики. Добавление пассивного участка почти не влияет на характер структуры управления.

## Выводы по третьей главе

В данной главе исследуются структуры управления при ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта по критерию быстродействия, по критерию минимума моторного времени и получены следующие выводы:

1. В задаче сближения двух КА для каждого типового граничного условия оптимальное управление при ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта имеет сложную структуру и его угловая скорость большая.

2. Для случая доминирования требований коррекции периодического движения или бокового движения степень неоптимальности управления при ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта по критерию быстродействия наихудшая. Для случая доминирования требования коррекции векового движения степень неоптимальности такого управления невелика.

3. Для различных режимов управления зависимость между общим временем и моторным временем аппроксимируется в виде гиперболы. Моторное время имеет наименьшее предельное значение.

4. Интервалы, в которых появляются пассивные участки, соответствуют интервалам, когда производные управляющего угла  $\dot{\alpha}$  достаточно велики.

#### 4 Номинальное управление в задаче сближения космического аппарата и пассивного объекта

В данной главе рассматривается задача определения номинального управления на этапе дальнего и ближнего сближения активного КА с двигателем малой тяги с пассивным объектом.

Баллистический анализ данной задачи показывает, что для её решения необходимо использование совокупности различных моделей, учитывающих возможное большое начальное фазовое рассогласование между сближающимися объектами и требования по точности приведения в конечную точку. Данной главе разрабатывается методика формирования номинального управления КА с двигателем малой тяги, в задаче сближения с пассивным объектом, находящейся на низкой околоземной орбите, с учётом фазирования на этапах дальнего и ближнего наведения. Предложенная методика имеет практическое значение для решения таких задач, как стыковка КА с космическими станциями, захват космического мусора и т.д.

Выполним расчёт относительной траекторий сближения двух КА на низкой орбите, один из которых является маневрирующим (индекс 2, КА2) на круговой орбите, а другой - пассивным (индекс 1, КА1) на эллиптической орбите.

Для начальных значений параметров орбит КА1 и КА 2 (таблица 8) выполнено сквозное моделирование движения КА2 на всех участках перелёта в окрестность КА1. Ускорение от тяги КА2 принималось постоянным, равным  $a = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2$ .

**Таблица 8 – Начальные значения орбитальных параметры КА1 и КА2**

Параметр	КА1	КА2
большая полуось, км	7347,5	6611
эксцентриситет	0,002	0
аргумент широты, град	0	неизвестно
истинная аномалия, град	0	0
наклонение, град	82,9	82,85
долгота восходящего узла, град	7,11	7,12

В соответствии с начальным фазовым рассогласованием между сближающимися КА1 и КА2 и требованием по точности приведения в конечную точку предлагается решать поэтапно на разных моделях и разделить траекторию перелёта на участки.

#### **4.1 Методика формирования номинального управления**

В диссертации предложена методика формирования номинального управления в следующем виде:

1. Траектория делится на три участка:
  - а) Участок формирования большой полуоси орбиты КА2 (А) близкой (несколько меньшей) большой полуоси орбиты КА1;
  - б) Участок фазирования, на котором дополнительно решается задача удовлетворения условия по взаимному фазовому положению КА2 и КА1;
  - в) Участок точного наведения, на котором происходит точное приведение КА2 в близкую окрестность КА1;
2. Управление вектором тяги на участке формирования большой полуоси осуществляется в плоскости орбиты либо по тангенциальному, либо по трансверсальному закону управления без учёта фазового рассогласования;
3. Рассчитывается участок фазирования для уменьшения начального фазового рассогласования между КА1 и КА2;
4. После окончания участка фазирования необходимо уменьшать рассогласование по большей полуоси в соответствии с выбранной программой управления вектором тяги;
5. После достижения определённого значения  $\Delta r_{cp}$ , что соответствует началу участка точного наведения, осуществляется предварительная коррекция  $l$  и  $l_z$  в соответствии с выбранной программой.

6. Начало участка точного наведения должно соответствовать необходимому значению  $\Delta L_{cp}$ , чтобы обеспечить необходимую плавную стыковку участка точного наведения и участка причаливания. На этом участке корректируются все параметры относительного движения и происходит приведение КА2 в близкую окрестность КА1, которая необходима для причаливания. На участке точного наведения предполагается, в том числе, и коррекция боковой составляющей относительного движения.

На первых двух участках при расчётах предлагается использовать исходную нелинейную модель (2.2). На участке точного наведения оптимальное управление строится на линейной модели (2.17), а расчёт траектории относительного движения происходит на нелинейной модели (2.2).

#### **4.1.1 Участок формирования большой полуоси орбиты КА2**

Задачу орбитального сближения можно проводить либо по схеме сближения непосредственно с участка выведения активного КА на орбиту (прямое выведение), либо по схеме сближения с промежуточной орбиты. Но схема прямого выведения на орбиту требует достаточно жесткие ограничения на начальные значения углов некомпланарности (углов между плоскостями орбиты пассивного и траектории активного КА) и на время запуска активного КА, поэтому при решении задачи сближения КА предпочтём схему сближения с промежуточной орбиты.

Для приведения КА на промежуточную орбиту при большей начальной дальности ориентация оптимального управления по критерию быстродействия близко к трансверсальной, поэтому на участке формирования большой полуоси орбиты КА2 принимаем трансверсальную малую тягу ( $a_T = a$ ). Большая полуось промежуточной орбиты  $A_{np}$  определяется по следующей формуле:

$$A_{np} = A_{KA1} - k \cdot (A_{KA1} - A_0), \quad (4.1)$$

где  $A_{КА1}, A_0$  - значение большой полуоси КА1 и начальное значение большой полуоси КА2;  $k$  - безразмерный параметр.

После окончания участка формирования большой полуоси должно удовлетворяться граничное условие:

$$A_{КА2}(t_{f1}) = A_{np}. \quad (4.2)$$

Здесь:  $t_{f1}$  - продолжительность участка формирования большой полуоси орбиты КА2;  $A_{КА2}$  - большая полуось КА2.

Знак трансверсальной малой тяги на участке формирования большой полуоси постоянно "+", поэтому продолжительность  $t_{f1}$  можно определить, проинтегрировав систему уравнений (2.1) и удовлетворив граничному условию (4.2).

#### 4.1.2 Участок фазирования

Для уменьшения начального фазового рассогласования между КА1 и КА2 с точки зрения экономии расходов рабочего тела введём участок фазирования с пассивным участком. В принципе можно ввести несколько пассивных участков на участке фазирования. В диссертации рассматривается случай введения только одного пассивного участка, который начинается в начале участка фазирования. После пассивного участка происходит локальная коррекция вековых переменных  $\Delta r_{cp}$  и  $\Delta L_{cp}$ . На рисунке 23 представлена зависимость большей полуоси орбиты КА2 ( $A$ ) от витка.

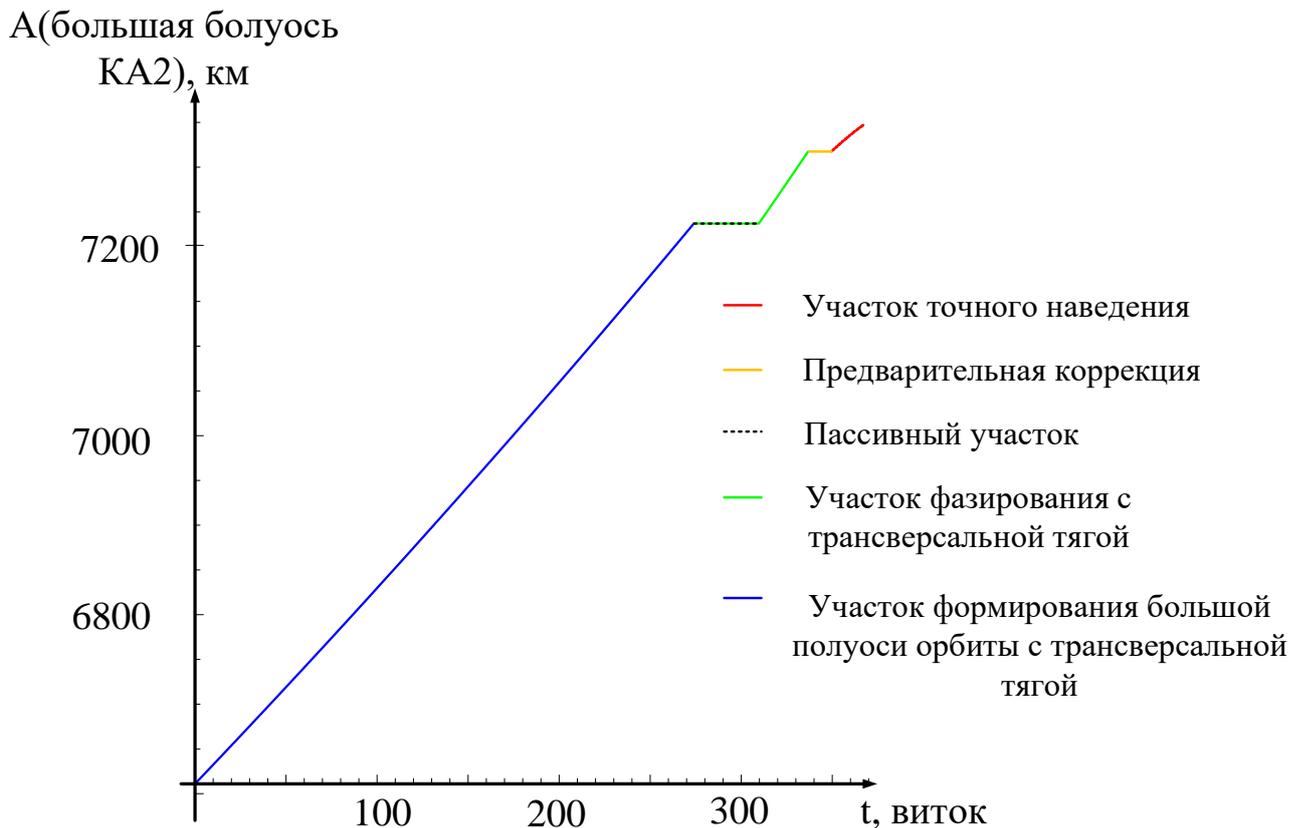


Рисунок 23 – Изменение большой полуоси КА2 от витка при  $k=0.15$

На участке фазирования исходная нелинейная модель (2.2) и (2.3) принимаются в качестве уравнения относительного движения.

На пассивном участке изменение разницы аргумента широты  $\Delta u$  может быть от 0 до  $2\pi$ . Рассмотрим предельные случаи фазирования. Для наилучшего случая пассивного участка отсутствует, следовательно, участок фазирования состоит только из разгонного участка.

$$\Delta u_{II} - \Delta u_1 = 0 \quad (4.3)$$

Для наихудшего случая изменение  $\Delta u$  составляет  $2n\pi$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) на пассивном участке, и траектория состоит из пассивного и разгонного участка.

$$\Delta u_{II} - \Delta u_1 = 2n\pi, \quad (4.4)$$

где  $\Delta u_{II}$ ,  $\Delta u_1$  - разницы аргумента широты в конечный и начальный моменты времени пассивного участка.

Полученные конечные граничного условия участка формирования большой полуоси орбиты КА2 на нелинейной модели являются начальными ГУ участка фазирования. Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} X_2(0) &= X_1(t_{f1}); \\ X_2(t_{f2}) &= [\Delta r_{cp2k}, \Delta L_{cp2k}, l_{x2k}, l_{y2k}, x_{z2k}, y_{z2k}]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь  $t_{f2}$  - продолжительность участка фазирования.

На участке фазирования только корректируем переменные  $\Delta r_{cp}$  и  $\Delta L_{cp}$ . После окончания участка фазирования необходимо обеспечивать выведение КА2 в заданную окрестность КА1. Ещё нужно учитывать значения порогов допустимых скоростей сближения.

Участок причаливания начинается с момента, когда дальность составит 350 м, а скорость сближения не превысит величину  $-2\text{ м/с}$ , угловая скорость линии визирования должна быть близка к нулю. Поэтому в начале участка причаливания должно удовлетворять граничными условиями:

$$\Delta r_{cp} = 0 \text{ м}, \Delta L_{cp} = -350 \text{ м}, l = 0, l_z = 0. \quad (4.6)$$

В таблице 11 приведены расчёты затрат общего и моторного времени на перелёт КА2 на участке фазирования от момента достижения большой полуоси промежуточного значения  $A_{np}$  до конца. Анализировалось влияние  $A_{np}$  на затраты моторного и общего времени для наиболее неблагоприятного значения начального фазового угла равным  $2\pi$ .

**Таблица 9 – Затраты времени на перелёт в зависимости от большой полуоси промежуточной орбиты**

k	$A_{np}$ , км	Затраты на участке фазирования		
		Затрата времени на пассивный участок, витков	Затрата моторного времени, витков	Общие затраты времени, витков
0,05	7310,68	132,31	14,79	147,1
0,1	7273,85	65,70	29,67	95,37
0,15	7237,03	43,49	44,68	88,17
0,2	7200,2	32,44	59,80	92,24
0,25	7163,38	25,77	75,04	100,81

Как следует из таблицы 9, размер пассивного участка уменьшается при уменьшении  $A_{np}$ , а моторное время в тоже время увеличивается. В результате общее время участка фазирования сначала уменьшается, а затем увеличивается. При  $k=0.15$  общие затраты времени достигают минимума. С другой стороны, при уменьшении значения  $k$  сходимость численного решения краевой задачи на участке фазирования ухудшается из-за увеличения времени перелёта. Так что вариант  $k=0.15$  можно выбрать в качестве рекомендуемого. На рисунке 24 представлена зависимость  $\Delta u$  от витка при  $k=0.15$ .

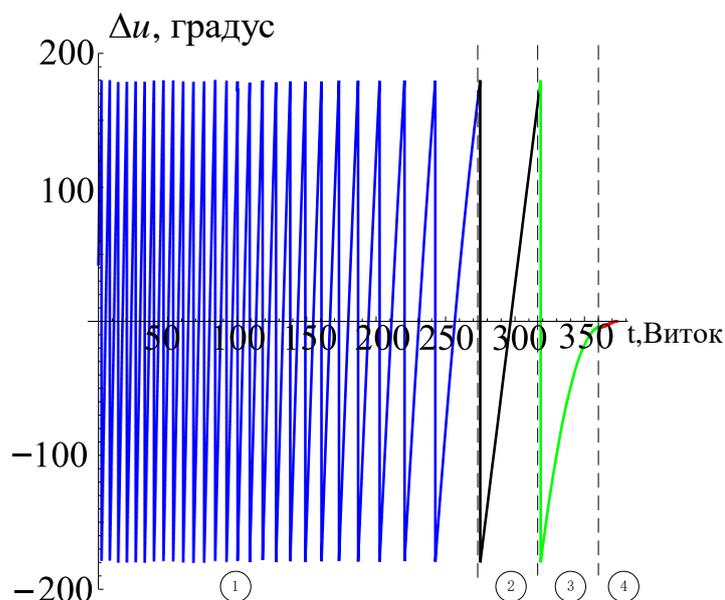


Рисунок 24 – Изменение  $\Delta u$  от витка: 1-разгонный участок; 2-пассивный участок участка фазирования; 3-разгонный участок участка фазирования; 4-участок точного наведения при  $k=0.15$ ;

Как следует из рисунка 24 на участке формирования большой полуоси орбиты КА2 (участок 1)  $\Delta u$  изменяется от минуса  $2\pi$  до плюса  $2\pi$ , на пассивном этапе участка фазирования (участок 1) изменение  $\Delta u$  равно  $2\pi$ .

На рисунке 25 показана траектория на участке фазирования при различных значениях  $k$  для наиболее неблагоприятного случая, т.е., для случая изменения  $\Delta u$  равным  $2\pi$ .

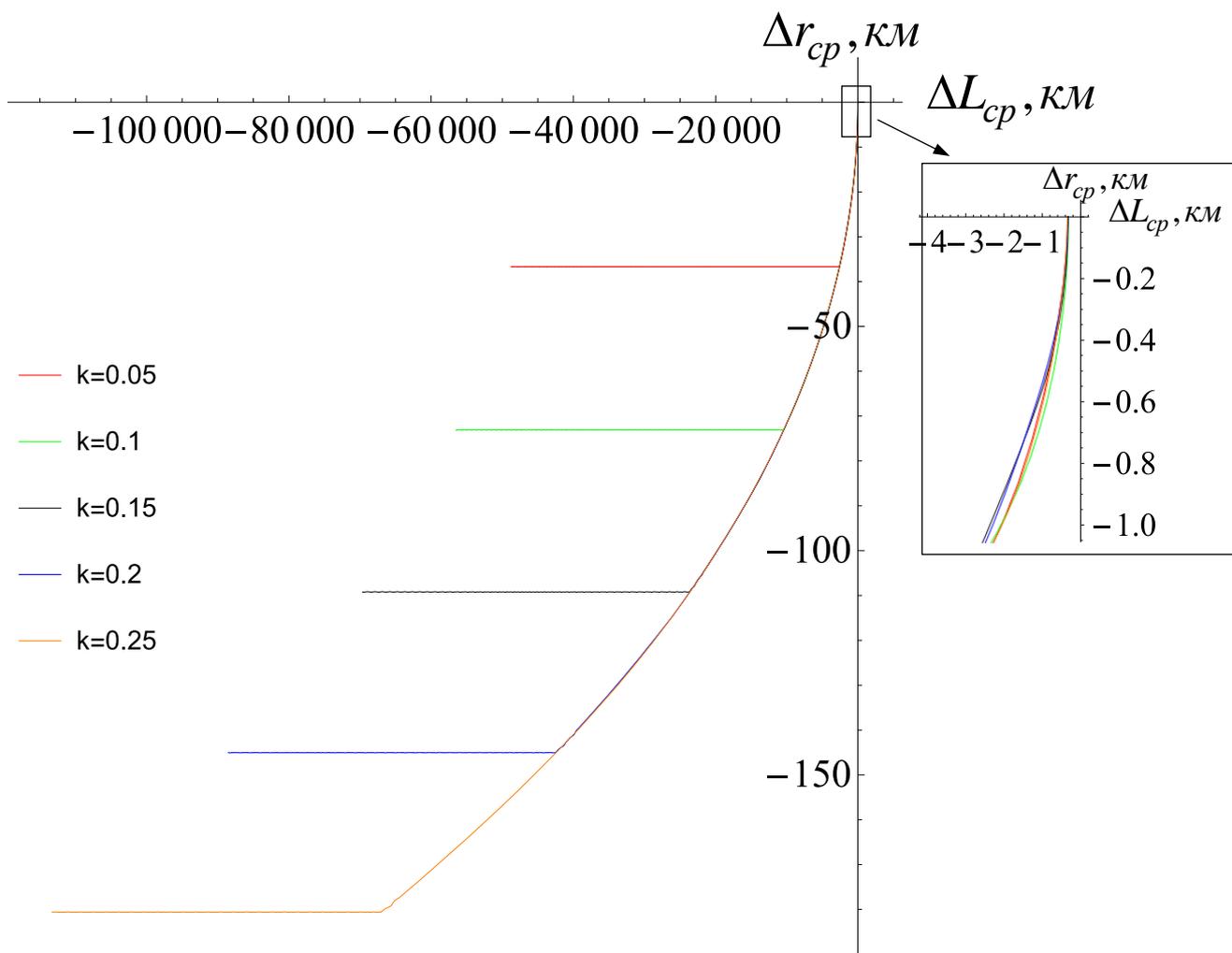


Рисунок 25 – Траектория относительного движения на участке фазирования

Из рисунка 25 очень видно, что траектория состоит из пассивного участка и разгонного. Для разных значений  $k$  их размеры пассивного участка одинаковые, равные  $2\pi r_1$ , но с разными затратами времени.

#### 4.1.2.1 Выбор упреждающей точки на участке фазирования

На участке фазирования при достижении определённого значения по  $\Delta r_{cp}$  начинается участок точного наведения. Поскольку на участке точного наведения ещё нужны коррекции  $l$  и  $l_z$ . В этом случае выполнены совокупности предварительных расчётов траектории относительного движения на исходной нелинейной модели на участке точного наведения, результаты которых показывают, что относительная траектория  $\Delta r_{cp} - \Delta L_{cp}$  в системе фазовых координат пересекает первый и четвертый квадранты.

Наиболее плодотворной для решения этой проблемы представляется идея выбора упреждающей точки на участке фазирования, т.е. при решении краевой задачи для участка фазирования конечное граничное условие не в точке  $(-0.35, 0)$ , а в точке слева от нее  $(-0.35-\Delta, 0)$ , здесь  $\Delta > 0$ , упреждение конечной точки на участке фазирования. В таблице 10 приведены предварительные моделирования траектории относительного движения на исходной нелинейной модели на участке точного наведения когда начало участка точного наведения в продольной плоскости в точке  $\Delta r_{cp} = -5$  км и конечная точка (упреждающая точка) участка фазирования в точке  $(-100,0)$ ,  $(-200,0)$  и  $(-300,0)$  (км).

**Таблица 10 – Затраты времени при разных упреждающих точках**

Упреждающие точки /км	Затрата времени на участке фазирования /виток	Затрата времени на участке точного наведения /виток	Общая время /виток
$(-0.35,0)$	86,19	12,70	98,89
$(-100,0)$	86,20	12,33	98,53
$(-200,0)$	86,12	12,04	98,13
$(-300,0)$	86,23	12,35	98,60

Из таблицы 10 видно, что суммарные затраты времени на участке фазирования и участке точного наведения почти не изменяются при разных упреждающих точках. Это связано с тем, что в конце участка фазирования малая

полуось  $l$  и амплитуда бокового колебания  $l_z$  относительно большие и на участке точного наведения в основном проводятся коррекции  $l$  и  $l_z$ .

#### 4.1.2.2 Предварительные коррекции малой полуоси $l$ и амплитуды бокового колебания $l_z$ .

Поскольку в момент начала участка точного наведения малая полуось  $l$  и амплитуда бокового колебания  $l_z$  велики, которые приведут к снижению точности решения на участке точного наведения, наиболее плодотворной для решения этой проблемы представляются предварительные коррекции малую полуось  $l$  и амплитуду бокового колебания  $l_z$  на пассивном участке. При достижении определённого значения по  $\Delta r_{cp}$  начинаются предварительные коррекции в соответствии с выбранной программой. На рисунке 26 показана траектория на участке фазирования с упреждающей точкой (-5, 0) км.

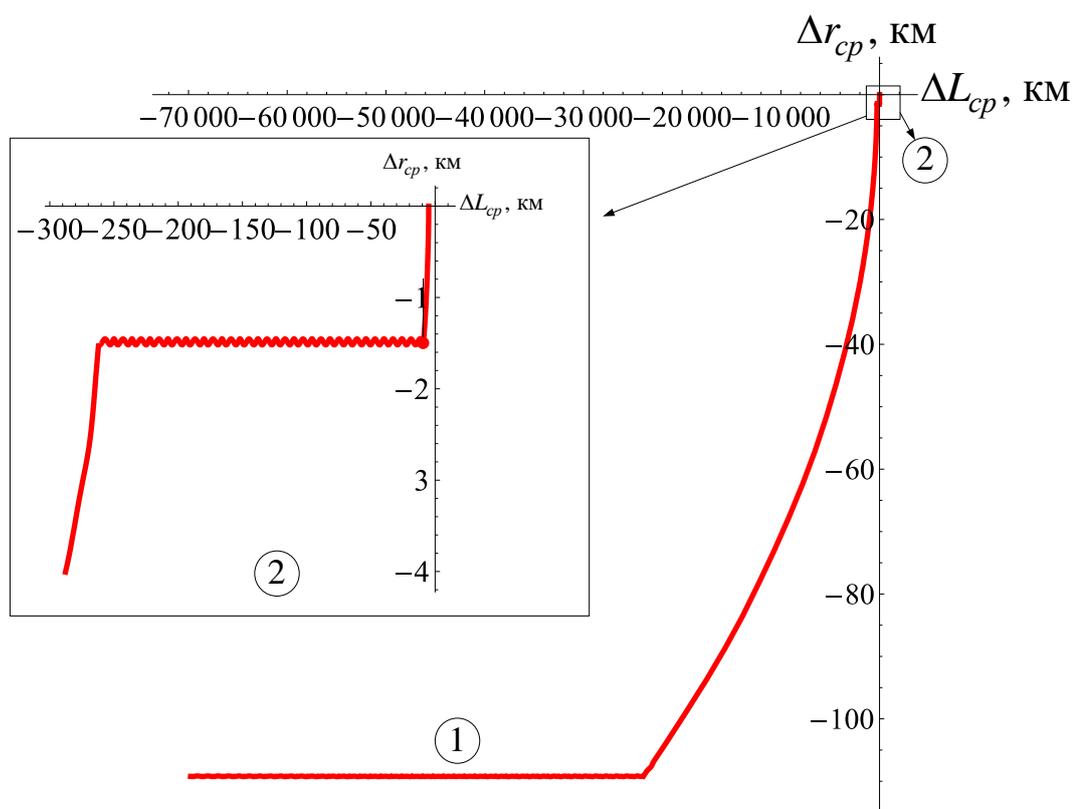


Рисунок 26 – Траектория на участке фазирования с упреждающей точкой (-5, 0) км

На втором пассивном участке введём два этапа: 1) этап коррекции амплитуды бокового колебания, 2) этап коррекции малой полуоси. Расположение двух этапов коррекции показано на рисунке 27. Время на коррекцию амплитуды бокового колебания  $t_1$  и время на коррекцию малой полуоси  $t_2$ .

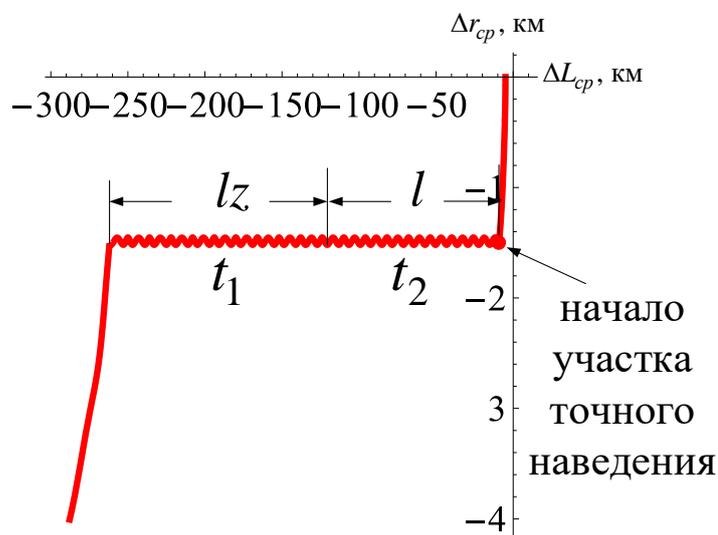


Рисунок 27 – Коррекция бокового составляющего и малой полуоси,  $t_1, t_2$  - продолжительности коррекции.

Для коррекции амплитуды бокового колебания принимают программу управления  $a_w = -\text{sign}(\cos \varphi_z)$ , здесь  $\varphi_z$  – фаза колебаний в боковом направлении [46].

Поскольку периодические и вековые члены связаны между собой через параметры управления, то на линейной модели коррекция  $l$  не должна приводить к изменению  $\Delta r_{cp}$  и  $\Delta L_{cp}$ . Из работы [46] известно, что на основе линейной модели для случая трансверсальной тяги управление  $a_T = -a \text{sign}(\cos \varphi)$  не даёт вековых изменений  $\Delta r_{cp}$  и  $\Delta L_{cp}$  только в случае, если интервал коррекции кратен витку:  $\lambda \Delta t = 2\pi n$ , а начальный фазовый угол  $\varphi$  (угол, определяющий положение КА2 на эллипсе относительного движения) в относительном движении кратен  $\pi$ , т.е.  $\varphi_0 = \pi n$ .

### 4.1.3 Участок точного наведения

Начало участка точного наведения должно соответствовать необходимому значению  $\Delta L_{cp}$ , чтобы обеспечить необходимую плавную стыковку участка точного наведения и участка причаливания.

На участке точного наведения система уравнения относительного движения КА2 и КА1 рассматривается на линейной модели (2.10) и ранее проведённые исследования позволяют определить оптимальное управление КА2.

Критерием оптимизации является минимум общего времени (быстродействия). В конце участка точного наведения должно выполняться начальное граничное условие причаливания КА2 и КА1. Конечные условия движения, полученные на нелинейной модели в конце участка фазирования, являются начальными участка точного наведения. Граничные условия на участке точного наведения имеют вид:

$$\begin{aligned} X_3(0) &= X_2(t_{f2}); \\ X_3(t_{f3}) &= \left[ 0, -350 \text{ м}, l_{x_{3k}}, l_{y_{3k}}, x_{z_{3k}}, y_{z_{3k}} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь  $t_{f3}$  - продолжительность участка точного наведения.

На участке точного наведения получим оптимальное управление от линейной модели и построим траекторию относительного движения на нелинейной модели.

Для проведения расчётов на участке точного наведения необходимо осуществить переход от окулирующей системы координат к цилиндрической системе координат и далее определить безразмерный вектор состояния  $\bar{X}$  и время для модели (2.10):

$$\bar{X} = X / \left( \frac{2a}{\lambda^2} \right), \quad \bar{t} = \lambda t.$$

где  $a$  - ускорение тяги КА2,  $\lambda$  - средняя угловая скорость КА1.

## 4.2 Численные расчёты

Рассмотрим управление относительным движением на участке формирования большой полуоси, участке фазирования и участке предварительной коррекции на нелинейной модели (2.4) а также оптимальное управление на участке точного наведения на линейной модели (2.10).

Начало участка точного наведения в продольной плоскости на заключительном этапе участка фазирования выбирается в точке при  $\Delta r_{cp} = -1.5$  км и упреждающей точке  $(-5,0)$  (км). Необходимо отметить, что для обеспечения стыковки участка точного наведения и участка причаливания конечный параметр  $\Delta L_{cp}$  принимают  $-0.35$  км и остальные конечные параметры относительного движения - нулевыми.

Численные расчёты параметров относительного движения и затрат времени на реализацию перелёта по участкам представлены в таблице 12. На участке точного наведения оптимальное управление получено на линейной модели, а моделирование относительной траектория проведено на нелинейной модели. Результаты моделирования процесса перелёта приходятся с учётом наихудшего случая при  $k=0.15$ .

**Таблица 11 – Затраты времени по участкам для выбранных параметров перелёта**

Наименование участка		Затрата времени на перелёт на каждом участке, суток	Начальный вектор состояния для каждого участка, км					
			$\Delta r_{cp}$	$\Delta L_{cp}$	$l_x$	$l_y$	$l_{zx}$	$l_{zy}$
Участок формирования большой полуоси		19,88	-676,10	5804,8	44,90	-0,002	-3,8	-4,91
Участок фазирования		7,65	-109,23	-69791	-13,70	3,53	-0,58	6,41
Предварительная коррекция	Коррекция амплитуды бокового колебания	0,62	-1,50	-261,95	14,29	-5,05	6,16	-1,61
	Коррекция малой полуоси	0,69	-1,52	-141,26	-15,20	0	0,15	-0,15
Участок точного наведения		0,06	-1,43	-6,43	0,02	-0,41	0,05	0,14
Окончание участка точного наведения		28,9	0	-0,37	-0,01	0	0	0

Последняя строка таблицы 11 характеризует общие затраты на выполнение всей транспортной операции и точность выполнения граничных условий.

На рисунках 28 и 29 показаны изменения  $l$  и  $l_z$  на этапе коррекции, рассчитанные на нелинейной и линейной модели.

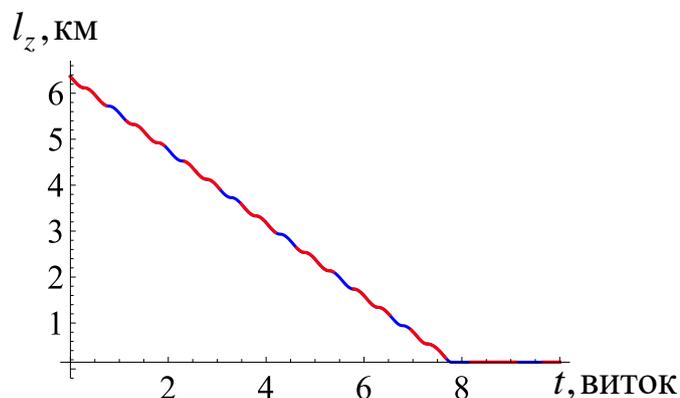


Рисунок 28 – Коррекция амплитуды бокового колебания от витка

Как следует из рисунка 28, ошибка между линейной и нелинейной моделями при коррекции амплитуды бокового колебания очень мала. Амплитуда бокового колебания уменьшается от 6 км до 0,15 км. В момент 7.5 витков достигает минимального значения.

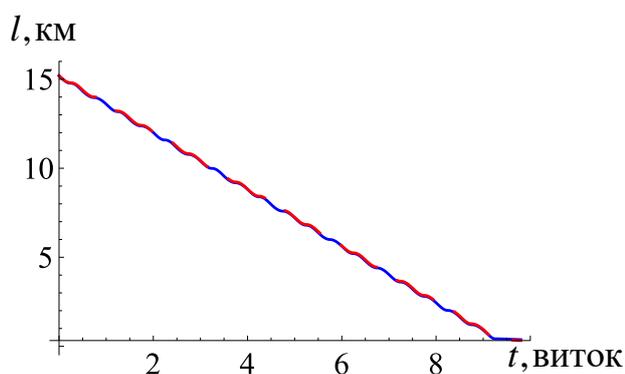


Рисунок 29 – Коррекция малой полуоси от витка

Как следует из рисунка 29, ошибка между линейной и нелинейной моделями при коррекции малой полуоси очень мала. Малая полуось уменьшается от 15 км до 0,4 км. В момент 9.5 витков достигает минимума.

На рисунке 30 показано изменение параметров относительного движения на заключительном этапе сближения по виткам для нелинейной и линейной модели.

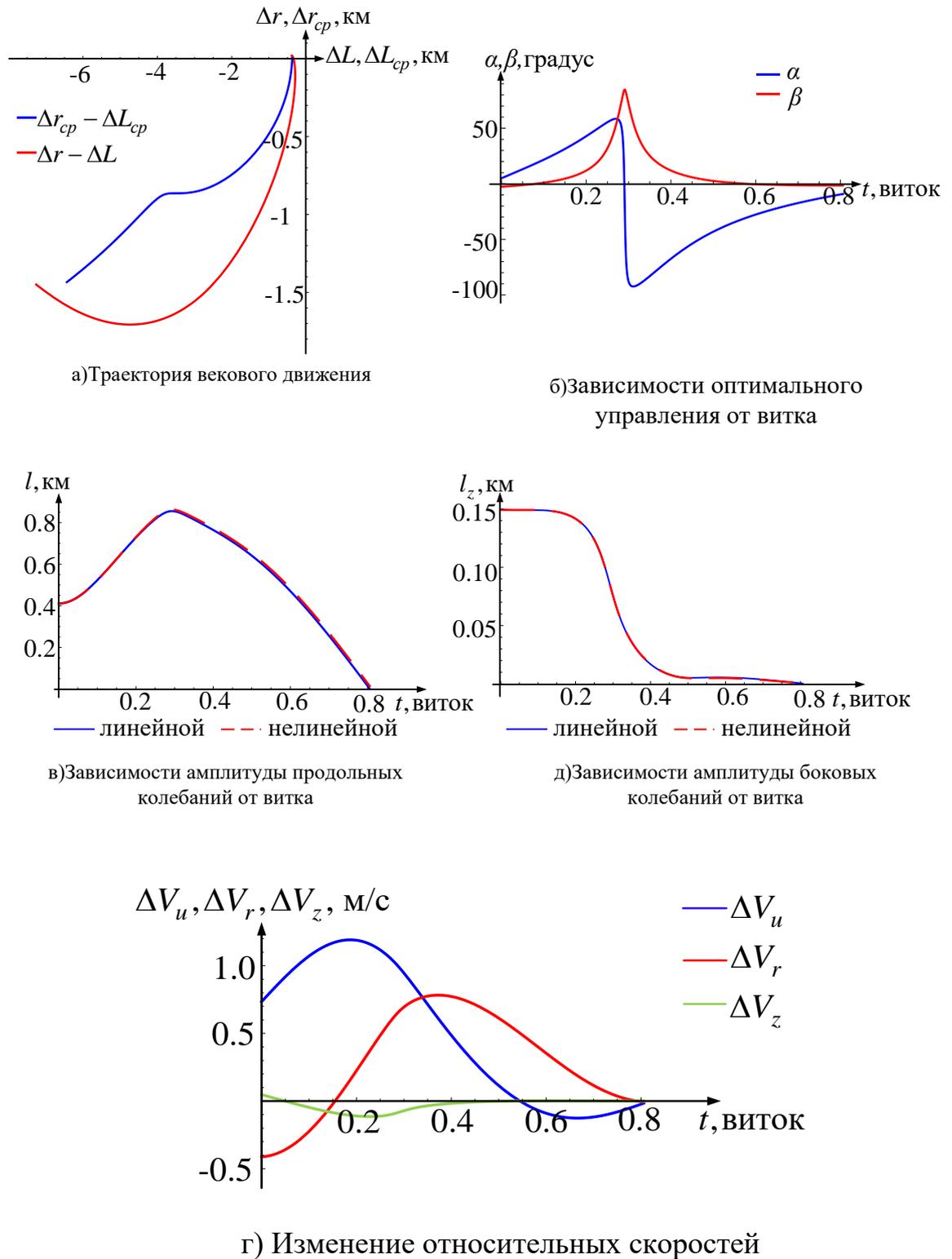


Рисунок 30 – Изменение параметров относительного движения на заключительном этапе сближения.

Как следует из рисунка 30, оптимальная программа угла отклонения вектора тяги от радиус-вектора (угол  $\alpha$ ) в интервале от 0 до 0.35 витка монотонно увеличивает до 60 градусов, в районе 0.35 витка быстро изменяется от 60 градусов до минуса 60 градусов. В эти же моменты времени можно наблюдать, что малая полуось растёт и достигает экстремального значения. Потом угол  $\alpha$  монотонно уменьшается. Наибольшее уменьшение амплитуды боковых колебаний происходит в районе 0.2-0.4 витка. В эти же моменты времени угол отклонения вектора тяги от плоскости орбиты (угол  $\beta$ ) достигает наибольшего значения. Наблюдается, что ошибка по малой полуоси ещё существует, но очень мала, относительно ошибка по амплитуде бокового колебания почти отсутствует.

Модель пространственного относительного движения играет важную роль в исследовании задач сближения, и её точность не только влияет на управление ориентацией КА, но и напрямую связана с успехом миссии перелёта. Выполнена оценка точности линейной модели пространственного относительного движения в цилиндрической системе координат в задаче сближения по быстродействию при различных начальных условиях сближения с помощью численного моделирования.

Анализ методических ошибок при использовании линейной модели (2.10) при решении задачи сближения показывает, что ошибки в основном определяются следующими факторами: 1) Ошибки, обусловленные точностью решения краевой задачи. 2) Ошибки, возникающие при линеаризации модели относительного движения. Поскольку при линеаризации нелинейные уравнения (2.4), орбиты считаются круговыми, а начальные отклонения малыми. Это приводит к определенной ошибке между нелинейной и линейной моделями. Ошибка в основном отражается на относительном движении в продольной плоскости и накапливается с увеличением времени движения.

В соответствии с задачей сближения КА2 с пассивным объектом КА1, параметры которого приведены в таблице 8, оценим точность уравнений

движения для разных начальных граничных условиях по  $\Delta r_{cp}$ ,  $\Delta L_{cp}$  и  $l_0$ . Для оценки точности линейной модели точность решения краевой задачи принималась равной  $10^{-7}$ . Выполнены некоторые расчёты ошибок параметров ( $\Delta r_{cp}$ ,  $\Delta L_{cp}$  и  $l_0$ ) использующей модели относительного движения (таблица 12).

**Таблица 12 – Результаты расчёта оценок точности использующей линейной модели**

$\Delta r_{cp0}$ , км	$\Delta L_{cp0}$ , км	$l_0$ , км	Ошибка по $\Delta r_{cp0}$ , %	Ошибка по $\Delta L_{cp0}$ , %	Ошибка по $l$ , %
0	20	1	-	0,7463	4,4866
0	30	1	-	0,5895	6,6662
0	50	1	-	0,5375	11,1818
0	100	1	-	0,4435	22,1471
1	20	1	-0,0551	0,2115	4,3760
1	20	5	-3,2175	3,5639	0,9986
1	20	10	-8,0802	16,2035	0,6648
2	20	1	0,2842	-0,2431	4,4120
4	20	1	0,4182	-2,3472	4,8191
5	20	1	0,4153	-4,2035	5,4110
0	-20	1	-	-0,3036	4,5966
2	-20	1	0,2552	1,1572	4,5171
-2	-20	1	1,0938	-1,1775	4,8299
-3	-20	1	0,9991	-1,8113	5,2114
-1	20	1	1,4068	1,5688	4,5614
-2	20	1	1,1029	3,0169	4,6531
-3	20	1	0,9862	5,2115	4,5385
-4	20	1	0,9490	8,0188	4,9546

Из таблицы 12 можно сделать вывод:

1) Для данной задачи сближения с пассивным объектом КА1 допустимая область начальных граничных условиях является:

$$-2 \text{ км} \leq \Delta r_{cp0} \leq 2 \text{ км};$$

$$-20 \text{ км} \leq \Delta L_{cp0} \leq 20 \text{ км};$$

$$0 \text{ км} \leq l_0 \leq 5 \text{ км};$$

2) В начале заключительного участка малая полуось обычно больше, чем 5 км. При этом случае необходимо заранее корректировать малую полуось  $l$ .

Результаты проведённого моделирования показывают, что разработанная методика формирования номинального управления может быть использована для перелётов КА с малой тягой на этапах дальнего и ближнего наведения на пассивный объект.

## Выводы по четвёртой главе

Проведённые исследования программы оптимального управления относительного движения в задаче о перелёте космического аппарата с малой тягой, с низкой орбиты выведения на высокую на околоземную орбиту в окрестность пассивного объекта с учётом фазирования на этапах дальнего и ближнего сближения, позволяют сформулировать следующие выводы:

1. Разработана методика формирования номинального управления КА с двигателем малой тяги, в задаче сближения с пассивным объектом, находящейся на низкой околоземной орбите с учётом фазирования на этапах дальнего и ближнего наведения;

2. Путём введения пассивного участка некоторой продолжительности решена задача удовлетворения условия по взаимному фазовому положению КА2 и КА1 и обеспечено выведение КА2 в заданную окрестность КА1;

3. Показана необходимость введения упреждающих точек и предварительных коррекций, обеспечивающих необходимую плавную стыковку участка точного наведения и участка причаливания;

4. Результаты проведённого моделирования показывают, что разработанная методика формирования номинального управления может быть использована для перелётов КА с малой тягой на этапах дальнего и ближнего наведения на пассивный объект.

5. Получена оценка точности линейной модели при решении краевой задачи на заключительном участке. Построена допустимая область для начальных граничных условий в окрестности пассивного объекта для использования линейной модели.

## Заключение

1. Разработана безразмерная математическая модель пространственного относительного движения космического аппарата, инвариантная к параметрам опорной орбиты и величине ускорения от тяги маневрирующего космического аппарата, которая позволяет получить универсальные решения задачи построения пространственного номинального оптимального управления, зависящее только от безразмерных граничных условий сближения;

2. С использованием принципа максимума Понтрягина построены оптимальные программы управления со свободной ориентацией вектора тяги по критерию быстродействия, по критерию минимума моторного времени для трёх типовых граничных условий.

3. Применены метод Ньютона и метод гомотопии для решения краевой задачи. Результаты расчёта показали, что такие методы имеют хорошую сходимость для задачи сближения.

4. Проанализированы влияния начальных значений относительной фазы КА и значений начальных периодических переменных на продолжительность сближения КА

5. Получены оптимальные программы управления для случая ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта. Проведен анализ характера угловой скорости оптимального управления и степени неоптимальности полученного управления в зависимости от начальных граничных условий. Сравнение результатов расчёта программ управления показало, что максимальное отличие по затрате времени при учёте ограничения на ориентацию тяги возникает при доминировании требования коррекции малой полуоси относительного движения

6. Разработана методика формирования номинального управления КА с двигателем малой тяги, в задаче сближения с пассивным объектом, находящейся на низкой околоземной орбите с введением участка фазирования.

7. Показана необходимость введения упреждающих точек и предварительных коррекций, обеспечивающих необходимую плавную стыковку участка точного наведения и участка причаливания. Получена оценка точности линейной модели в задаче сближения с пассивным объектом при решении краевой задачи на заключительном участке.

## Список литературы

1. Wang Y, Ji H. Integrated relative position and attitude control for spacecraft rendezvous with ISS and finite-time convergence[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 85: 234-245.
2. Ogundele A D, Agboola O A, Sinha S C. Mathematical modeling and simulation of nonlinear spacecraft rendezvous and formation flying problems via averaging method[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, 95: 105668.
3. Coverstone-Carroll V, Prussing J E. Optimal cooperative power-limited rendezvous between coplanar circular orbits [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1994, 17(5): 1096-1102.
4. Аппазов, Р. Ф. Сытин, О. Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли / Р. Ф. Аппазов, О. Г. Сытин. – М.: Наука, 1987. – 440 с.
5. Константинов М. С., Каменков Е. Ф., Перелыгин Б. П., et al. Механика космического полета[J]. М.: Машиностроение, 1989.
6. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полёта искусственных спутников Земли. / П. Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1965. – 540 с.
7. Clohessy W H, Wiltshire R S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous [J]. *Journal of the Aerospace Sciences*, 1960, 27(9):653-658.
8. Балахонцев В. Г., Иванов В. А., Шабанов В. И. Сближение в космосе. / В. Г. Балахонцев, В. А. Иванов, В. И. Шабанов. – М.: Воениздат, 1973. – 240 с.
9. Баранов А. А. Маневрирование в окрестности круговой орбиты. / А. А. Баранов. – М.: Издательство «Спутник», 2016. – 512 с.
10. Улыбышев, Ю. П. Оптимизация многорежимных траекторий сближения с ограничениями. / Ю. П. Улыбышев // Космические исследования. – 2008. – Т.

46. –№ 2. – С. 135-147.

11. Zhou B, Lin Z, Duan G R. Lyapunov Differential Equation Approach to EllipticalOrbital Rendezvous with Constrained Controls [J]. Journal of Guidance, Control, andDynamics,2011,34(2):345-358.
12. Breger L., How J. P. Safe Trajectories for Autonomous Rendezvous of Spacecraft [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2008, 31(5):1478-1489.
13. Wang H., Tang G., Lei Y. The framework of distributed interactive simulation for space projects[C]//AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit. 2003: 5608.
14. Sun Songtao and Zhang Qiuhua. Numerical Solution of a Pursuit-Evasion Differential Game Involving Two Spacecraft in Low Earth Orbit [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 11 (4):1127–1147, 2015.
15. Sharma R., Sengupta P., Vadali S. R. Near-Optimal Feedback Rendezvous in EllipticOrbits Accounting for Nonlinear Differential Gravity [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics,2007, 30(6):1803-1813.
16. Sengupta P., Vadali S. R. Analytical Solution for Power-Limited Optimal Rendezvous Near an Elliptic Orbit]. Journal of Optimization Theory and Application,2008.138:115-137
17. Wall B. J., Conway B A. Shape-Based Approach to Low-Thrust Rendezvous Trajectory Design [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(1):95-101.
18. Понтрягин Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. / Л. С. Понтрягин, В. Е. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1969. – 384 с

19. Баранов, А. А., Ролдугин, Д. С. Шести импульсные маневры встречи космических аппаратов на околокруговых некомпланарных орбитах. / А. А. Баранов, Д. С. Ролдугин // Космические исследования. – 2012. – Т. 50. – № 6. – С. 472- 480.
20. Баранов, А. А., Терехова, Е., О. Оптимальная четырех-импульсная встреча на компланарных почти круговых орбитах. / А. А. Баранов, Е. О. Терехова // Космические исследования. – 1995. – Т. 33. – № 4. – С. 420-425.
21. Ишков С. А. Сближение космических аппаратов с малой тягой на около-круговых орбитах / С. А. Ишков // Космические исследования. – 1992. – Т. 30. – № 2. – С. 165-179.
22. Лебедев, В. Н. Расчёт движения космического аппарата с малой тягой. / В. Н. Лебедев. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1968. – 108 с.
23. Миронов, В. И., Миронов, Ю. В., Фоминов, И. В. Энергетически оптимальное управление сближением космических аппаратов в нецентральной гравитационном поле Земли на этапе дальнего наведения / В. И. Миронов, Ю. В. Миронов, И. В. Фоминов. // Труды СПИИРАН. – 2019. – Т. 18. – № 1. – С. 202-229.
24. Салмин, В. В. Оптимизация космических перелётов с малой тягой: проблемы совместного управления траекторным и угловым двигателем. / В. В. Салмин. – М.: Машиностроение, 1987. – 208 с.
25. Салмин, В. В., Четвериков, А. С. Управление плоскими параметрами орбиты геостационарного космического аппарата с помощью двигателя малой тяги / В. В. Салмин, А. С. Четвериков. // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2015. – Т. 14. – № 4. – С. 92-101.

26. Беллман, Р. Динамическое программирование. /Р. Беллман; пер. с англ. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.
27. LI Junfeng, JIANG Fanghua. Survey of low-thrust trajectory optimization methods for deep space exploration [J]. Mechanics in Engineering, 2011, 33( 3) : 1—6.
28. LI Junfeng, BAOYIN Hexi, JIANG Fanghua, et al. Dynamics and control of interplanetary flight [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2014.
29. Hargraves C. R., Paris S W. Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation [J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 1987, 10(4):338-342.
30. Greenwood D. T, Kern E. A. Minimum-fuel thrust limited transfer trajectories between coplanar elliptic orbits [J]. AIAA Journal, 1970, 8(10):1772-1779.
31. Miele A., Weeks M. W., Ciarcia M. Optimal Trajectories for Spacecraft Rendezvous [J]. Journal of Optimization Theory and Application, 2007, 132:353-376.
32. Miele A., Ciarcia M., Weeks M. W. Guidance Trajectories for Spacecraft Rendezvous [J]. Journal of Optimization Theory and Application, 2007, 132:377-400.
33. Carter T. E. Optimal Power-Limited Rendezvous for Linearized Equations of Motion [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1994, 17(5):1082-1086.
34. Carter T. E., Pardis C J. Optimal Power-Limited Rendezvous with Upper and Lower Bounds on Thrust [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1996. 19(5):1124-1133.
35. Carter T. E. State Transition Matrices for Terminal Rendezvous Studies: Brief

- Survey and New Example [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998.21(1): 148-155.
36. Cho H., Park S. Y., Choi K. H. Application of Analytic Solution in Relative Motion to Spacecraft Formation Flying in Elliptic Orbit [J]. *Journal of Astronomy and Space Sciences*, 2008, 25(3): 255-266.
37. Войсковский, А. П., Красильщиков, М. Н., Малышев, В. В., Федотов, А. В. Автономная реализация динамических операций на геостационарной орбите. II. Синтез алгоритмов управления / А. П. Войсковский, М. Н. Красильщиков, В. В. Малышев, А. В. Федотов // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2016. – № 6. – С. 107-128.
38. Красильщиков, М. Н., Малышев, В. В., Федотов А. В. Автономная реализация динамических операций на геостационарной орбите. I. Формализация задачи управления. / М. Н. Красильщиков, В. В. Малышев, А. В. Федотов // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2015. – № 6. – С. 82-96.
39. Luo Y., Zhang J., Tang G. Survey of orbital dynamics and control of space rendezvous [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2014, 27(1): 1-11.
40. Luo, Y. Z., Tang, G. J., Li, H. Y. Optimization of multi-impulse minimum-time rendezvous using a hybrid genetic algorithm / Y. Z. Luo, G. J. Tang, H. Y. Li // *Aerospace Science and Technology* 2006; 10(6): 534-540
41. Luo, Y. Z., Tang, G. J., Lei, Y. J. Optimization of multiple-impulse multiple revolution rendezvous phasing maneuvers / Y. Z. Luo, G. J. Tang, Y. J. Lei // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 2007. – № 30(4). – С. 946–952.
42. Gatland, Kenneth (1976). *Manned Spacecraft, Second Revision*. New York: Macmillan Publishing Co., Inc. pp. 117–118. ISBN 0-02-542820-9.

43. Hall R., David S. The rocket men: Vostok & Voskhod. The first soviet manned spaceflights[M]. Springer Science & Business Media, 2001.
44. Flores-Abad A, Ma O., Pham K., et al. A review of space robotics technologies for on orbit servicing [J]. Progress in Aerospace Sciences, 2014.68: 1-26
45. Reynerson C. M. Spacecraft modular architecture design for on-orbitservicing[C]//Aerospace Conference Proceedings, 2000 IEEE. IEEE,2000.4:227-238.
46. Кубасов, В. Н., Данков, Г. Ю., Яблонько, Ю. П. Методы сближения на орбите. / В. Н. Кубасов, Г. Ю. Данков, Ю. П. Яблонько. – М.: Машиностроения, 1985. –184 с.
47. Carter T. E. Optimal impulsive space trajectories based on linear equations [J]. Journal of Optimization Theory & Applications, 1991, 70(2): 277-297.
48. Carter T. E., Brient, et al. Fuel-optimal rendezvous for linearized equations of motion [J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 1992,15(6): 1411-1416.
49. Bevilacqua R., Hall J. S., Romano M. Multiple Spacecraft Rendezvous Maneuvers by Differential Drag and Low Thrust Engines [J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy,2010,106(1):69-88.
50. Epenoy R. Fuel Optimization for Continuous-Thrust Orbital Rendezvous with Collision Avoidance Constraint [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2011.34(2):493-503.
51. Ulybyshev Y. Spacecraft Trajectory Optimization based on Discrete Sets of Pseudo impulses [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(4):1209-1217.
52. Гришин, С. Д. Электрические ракетные двигатели/С. Д. Гришин, Л. В.

- Лесков, Н. П. Козлов. - М.: Машиностроение, 1975.- 272 с.
53. Морозов, А. И., Космические электрореактивные двигатели:Новое в жизни, науке, технике. Сер. Космонавтика, астрономия, № 7//А. И. Морозов, А. П. Шубин. – М.: Знание, 1975. – 64 с, ил.
54. Гусев Ю. Г., Пильников А. В. Роль и место электроракетных двигателей в Российской космической программе [J]. Труды МАИ, 2012 (60): 22.
55. Ерисов А. А., Евтух А. В., Крылов, А. С. Перспективные направления развития электрореактивных двигателей. / А. А. Ерисов, А. В. Евтух, А. С. Крылов //Решетневские чтения. – 2013, – Т. 1. – С. 126-128.
56. Квасников Л А, Латышев Л А, Пономарев-Степной Н. Н., et al. Теория и расчёт энергосиловых установок космических летательных аппаратов[J]. М.: Изд-во МАИ, 2001.
57. Гуров, А. Ф., Конструкция и расчёт на прочность космических электроракетных двигателей/А. Ф. Гуров, Д. Д. Севрук, Д. Н. Сурнов. - М.: Машиностроение 1970. - 492 с
58. Основы теории полета космических аппаратов. / Под ред. д-ра физ.-мат. наук Г. С. Нариманова и д-ра техн. наук М. К. Тихонравова. – М.: Машиностроение, 1972. – 600с.
59. Hill G. W. Researches in the Lunar Theory [J]. American Journal of Mathematics,1878,1(1):5-26.
60. lida H., Bishop R. H. Analysis of the Targeting Error Induced by Hill's Guidance(C/) AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Monterey, CA, Aug. 9-11.1993:1431-1441.
61. Melton R. G., Time-Explicit Representation of Relative Motion between

- Elliptical Orbits [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, 23(4):604-611.
62. Yamanaka K., Ankersen F. New State Transition Matrix for Relative Motion on an Arbitrary Elliptical Orbit [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2002.25(1):60-66.
63. Alfriend K. T., Han Y. Evaluation and Comparison of Relative Motion Theories [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2005, 28(2):254-261.
64. Euler E. A., Shulman Y. Second-Order Solution to the Elliptic Rendezvous Problem [J]. *AIAA Journal*. 1967,5(5):1033-1035.
65. Sengupta P., Sharma R., Vadali S. R. Periodic Relative Motion Near a General Keplerian Orbit with Nonlinear Differential Gravity [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006,29(5):1110-1121.
66. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. П. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. — М.: Высшая школа, 1994. — 544 с.: ил. — ББК 32.97 А62. — УДК 683.1(G). — ISBN 5-06-000625-5.
67. Максимов Ю. А., Филипповская Е. А. Алгоритмы решения задач нелинейного программирования. — М.: МИФИ, 1982.
68. Константинов М. С., Мин Тхейн Метод оптимизации траекторий выведения КА с электроракетной двигательной установкой на ГСО / М. С. Константинов, Мин Тхейн // Вестник Московского авиационного института. — 2009. — Т. 16. — № 5. — С. 282-290.
69. Ishkov S. A., Filippov G. A., Xiao Z., et al. Pareto-optimal control of relative motion in the orbital maneuvering problem of spacecraft with finite thrust [J]. *Xibei Gongye Daxue Xuebao/Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2023, 41(3): 529-536.

70. Ishkov, S. A., Filippov, G. A., Khramov, A. A. Autonomous Control Program for Special Spacecraft Debris Collector Rendezvous Transfer with Fragment of Space Debris with Low-thrust / S. A. Ishkov, G. A. Filippov, A. A. Khramov // Procedia Engineering. – 2017. – Vol. 185. – С. 388-395.
71. Сяо Чжоу, Ишков С. А., Филиппов Г. А. Оптимальное управление относительным движением космического аппарата по критерию быстродействия на околокруговых орбитах // Вестник Московского авиационного института. 2023. Т. 30. № 3. С. 2-12.