

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»

На правах рукописи

Савельева Александра Александровна

**Расчет топологического заряда суперпозиции вихревых лазерных пучков**

1.3.6. Оптика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
Котляр Виктор Викторович,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Самара – 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЗАРЯД СУПЕРПОЗИЦИИ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ .....	10
1.1 Геометрическая прогрессия оптических вихрей .....	10
1.2 Топологический заряд суперпозиции параллельных однокольцевых пучков Лагерра-Гаусса .....	30
1.3 Когерентная суперпозиция пучков Лагерра-Гаусса с разными длинами волн: цветные оптические вихри .....	41
Выводы к главе 1 .....	58
ГЛАВА 2. СУПЕРПОЗИЦИИ ПУЧКОВ ЛАГЕРРА-ГАУССА И БЕССЕЛЯ-ГАУССА.....	61
2.1 Квадратные и двойные пучки Лагерра-Гаусса.....	61
2.2 Пучки Лагерра-Гаусса с увеличенной темной областью и автофокусировкой.....	70
2.3 Топологический заряд суперпозиции пучков Бесселя-Гаусса .....	79
Выводы к главе 2.....	90
ГЛАВА 3. СПИРАЛЬНЫЕ ЗОННЫЕ ПЛАСТИНКИ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ В ОСТРОМ ФОКУСЕ .....	92
3.1 Сравнение фазовой зонной пластинки, освещенной оптическим вихрем, со спиральной зонной пластинкой.....	92
3.2 Спиральные зонные пластинки для фокусировки оптических вихрей .....	101
3.3 Измерение распределения интенсивности в остром фокусе амплитудной зонной пластинки .....	107
Выводы к главе 3 .....	120
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	122
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	124

## ВВЕДЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена расчету топологического заряда суперпозиции вихревых лазерных пучков, а также поиску новых Фурье-инвариантных вихревых лазерных пучков.

**Актуальность.** Лазерные оптические вихри, известные в науке с начала 80х годов прошлого века, до сих пор вызывают интерес ученых из-за их широкого применения в зондировании турбулентной атмосферы, передаче и обработке информации с уплотнением информационных каналов, субволновой микроскопии, квантовой информатике, микроманипулировании. Основными характеристиками параксиальных вихревых лазерных пучков является орбитальный угловой момент (ОУМ) и топологический заряд (ТЗ).

Световые поля с фазовой сингулярностью, то есть с точками неопределенности фазы, в которых световое поле имеет изолированный ноль интенсивности, ввели в рассмотрение J. Nye и M. Berry (1974). Точки фазовой сингулярности также называются винтовыми дислокациями. В известной работе L. Allen и соавторов (1992), установлено, что пучок Лагерра-Гаусса обладает орбитальным угловым моментом. Причем каждый фотон в пучке обладает ОУМ, равным  $n\hbar$ , где  $n$  – топологический заряд пучка,  $\hbar$ -постоянная Планка. Топологический заряд вихревого пучка по определению M. Berry (2004) равен алгебраической сумме всех скачков фазы на  $2\pi$  при обходе в сечении пучка по окружности бесконечного радиуса. Орбитальный угловой момент вихревого пучка сохраняется при распространении пучка в свободном пространстве. Топологический заряд тоже сохраняется за исключением начальной плоскости, в которой ТЗ может быть задан произвольно. Оптические элементы, которые преобразуют гауссов пучков в пучок с сингулярностью в фазе, известны давно. Это элементы бессель-оптики (Сойфер В.А., 1984), амплитудные голограммы с вилочками (Соскин М.С., 1991), модовые конверторы (Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г., 1991), спиральные фазовые пластинки (Котляр В.В., Хонина С.Н., 1992), жидкокристаллические модуляторы света (Forbes A., 2016). Вихревые

оптические пучки, амплитуды которых являются точными решениями параксиального уравнения Гельмгольца, хорошо известны в оптике. Это пучки Лагерра-Гаусса (Siegman A.E., 1986), Бесселя-Гаусса (Gori F., 1987), Эрмита-Лагерра-Гаусса (Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г., 2004), Айнса-Гаусса (Bandres M.A., 2004), Гипергеометрические-Гаусса (Karimi E., 2007), erf-Гаусса (Фадеева Т., Воляр А.В., 2012), асимметричные Лагерра-Гаусса (Котляр В.В., Ковалев А.А., 2016) и др. Наличие точного аналитического выражения для описания комплексной амплитуды вихревых пучков позволяет найти основные характеристики этих пучков (ОУМ, ТЗ, расходимость пучка, его мощность и т.д.) до моделирования. Поэтому поиск новых аналитических точных решений для параксиальных пучков всегда был интересен оптикам и является актуальной задачей. Многие из перечисленных пучков являются структурно-устойчивыми пучками, которые сохраняют структуру распределения интенсивности при распространении, изменяясь только масштабно (например, пучки Лагерра-Гаусса). Но некоторые из упомянутых пучков не являются структурно-устойчивыми и даже не являются Фурье-инвариантными (например, пучки Бесселя-Гаусса). Для задач зондирования турбулентной атмосферы с помощью вихревых пучков достаточно, чтобы пучок был Фурье-инвариантным, так как рассматривается распространение пучка на большие расстояния. Кроме этого, такие пучки удобны для манипуляции микрочастицами, так как заранее известно распределение интенсивности в фокусе сферической линзы. Поэтому поиск новых вихревых лазерных пучков, обладающих Фурье-инвариантностью, является актуальной задачей. В данной диссертационной работе будут исследованы новые Фурье-инвариантные вихревые пучки: квадратные пучки Лагерра-Гаусса и пучки Лагерра-Гаусса с автофокусировкой.

Для многих из перечисленных вихревых лазерных пучков нахождение топологического заряда является тривиальной задачей (например, для пучков Лагерра-Гаусса, Бесселя-Гаусса), так как в комплексной амплитуде этих пучков присутствует в качестве множителя угловая гармоника  $\exp(in\varphi)$ , где  $n$  - целое

число,  $\varphi$ - полярный угол в сечении пучка. Поэтому ТЗ таких пучков равен  $n$ . Уже было упомянуто, что нормированный на мощность ОУМ таких пучков также равен  $n$ . В общем случае, если вихревой пучок описывается комплексной амплитудой  $E(r, \varphi, z)$ , то его ОУМ  $J_z$  и ТЗ  $TC$  рассчитываются по известным формулам:

$$J_z = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^*(r, \varphi, z) \frac{\partial}{\partial \varphi} E(r, \varphi, z) r dr d\varphi,$$

$$TC = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi, z) d\varphi,$$

где  $\operatorname{Im}$  – мнимая часть числа,  $\arg$  – аргумент комплексного числа,  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты,  $*$  - комплексное сопряжение. Отсюда видно, что ОУМ зависит и от амплитуды пучка, и от фазы, а ТЗ зависит только от фазы светового поля. Поэтому в общем случае это две разные характеристики оптического вихря, и для понимания особенностей эволюции пучка в пространстве требуется вычисление обеих этих характеристик. Но, если ОУМ для вихревых пучков рассчитывается во многих работах, то ТЗ, особенно суперпозиций оптических вихрей, почти не исследовался.

В данной диссертационной работе рассчитывается ТЗ суперпозиции оптических вихрей в виде геометрической прогрессии и суперпозиции одинаковых параллельных пучков Лагерра-Гаусса с разными амплитудами, но одинаковыми фазами.

**Целью** работы является расчет топологического заряда суперпозиции лазерных оптических вихрей и поиск новых видов Фурье-инвариантных оптических вихрей.

Для достижения цели требуется решить три **задачи**.

1. Исследовать суперпозицию лазерных оптических вихрей в виде геометрической прогрессии и рассчитать топологический заряд такой суперпозиции.
2. Рассчитать топологический заряд суперпозиции смещенных с оптической оси одинаковых пучков Лагерра-Гаусса.

3. Предложить и изучить три новых вида Фурье-инвариантных вихревых лазерных пучков: квадратные, двойные и самофокусирующиеся пучки Лагерра-Гаусса.

### **Новизна** полученных в работе результатов.

1. Рассчитан топологический заряд соосной суперпозиции скалярных гауссовых оптических вихрей, которая представляет собой конечную или бесконечную геометрическую прогрессию. У такой суперпозиции в общем случае три целых параметра и один действительный. Топологический заряд суперпозиции зависит от этих четырех параметров. Показано, что если в начальной плоскости у такой суперпозиции топологический заряд полуцелый, то при распространении в свободном пространстве он становится целым.

2. Показано, что топологический заряд суперпозиции нескольких одинаковых параллельных однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса с разными амплитудами и одинаковой начальной фазой равен топологическому заряду каждого отдельного пучка. Показано, что наличие фазовой задержки между пучками Лагерра-Гаусса в суперпозиции позволяет увеличивать или уменьшать топологический заряд всей суперпозиции.

3. Показано, что вихревой пучок Лагерра-Гаусса «в квадрате» является Фурье-инвариантным и сохраняет свою структуру в фокусе сферической линзы. В зоне дифракции Френеля такой пучок преобразуется в суперпозиции обычных пучков ЛГ, число которых равно числу колец у пучка ЛГ «в квадрате». Рассмотрен также более общий пучок - двойной пучок Лагерра-Гаусса, являющийся «произведением» двух пучков ЛГ. Такой пучок будет Фурье-инвариантным, если число колец у двух пучков ЛГ в «произведении» одинаковое.

### **Защищаемые положения.**

1. Если у осевой суперпозиции гауссовых вихрей в виде геометрической прогрессии в начальной плоскости первый член прогрессии равен  $a e^{i k r} e^{i m \phi}$ , где  $k, m$  – целые числа,  $a$  – действительное число,  $\phi$  – полярный угол в сечении пучка, и если знаменатель прогрессии равен  $a e^{i m \phi}$ , а

последний член прогрессии (последний оптический вихрь в суперпозиции) равен  $a^n \exp(inm\varphi)$ , то топологический заряд такой суперпозиции, при любой амплитудной функции, зависящей только от радиальной переменной  $r$  в сечении пучка, равен  $km$ , если  $|a| < 1$ , или  $nm$ , если  $|a| > 1$ , или равен  $(k+n)m/2$ , если  $|a| = 1$ .

2. Топологический заряд суперпозиция нескольких одинаковых параллельных однокольцевых пучков Лагерра-Гаусса с разной амплитудой, но с одинаковой начальной фазой, равен топологическому заряду пучков, входящих в суперпозицию. Подбором разности фаз между пучками в суперпозиции можно увеличивать или уменьшать топологический заряд всей суперпозиции.
3. Вихревой лазерный пучок, комплексная амплитуда которого равна квадрату комплексной амплитуды пучка Лагерра-Гаусса, является Фурье-инвариантным, то есть сохраняет с точностью до постоянной и масштаба свою структуру в дальнем поле и фокусе сферической линзы. В зоне дифракции Френеля такой пучок преобразуется в суперпозиции обычных пучков ЛГ, число которых равно числу колец у пучка ЛГ «в квадрате».

### **Теоретическая и практическая значимость.**

Если топологический заряд отдельных вихревых оптических пучков Лагерра-Гаусса, Бесселя-Гаусса и других известен и равен целому числу  $n$  в вихревой фазе  $n\varphi$ , где  $\varphi$  – полярный угол в сечении пучка, комплексной амплитуды пучка, то определение топологического заряда суперпозиции оптических вихрей является задачей, решать которую следует для каждой конкретной суперпозиции. В данной диссертационной работе решены две задачи. Найден топологический заряд суперпозиции оптических вихрей в виде геометрической прогрессии и найден топологический заряд суперпозиции одинаковых, смещенных с оптической оси, пучков Лагерра-Гаусса. Также найдено несколько новых вихревых лазерных пучков, которые являются точным решением параксиального уравнения

Гельмгольца и которые обладают свойством Фурье-инвариантности. Число точных решений уравнения распространения в оптике ограничено, и нахождение новых таких решений является определенным шагом в развитии оптики лазерных пучков.

Практическое значение полученных результатов в том, что для зондирования турбулентной атмосферы не требуется, чтобы пучок был структурно-инвариантным, а достаточно, чтобы он был Фурье-инвариантным, так как зондирование происходит на больших расстояниях и пучок при этом находится в дальней зоне дифракции. Поэтому найденные в работе новые вихревые Фурье-инвариантные лазерные пучки могут быть также использованы для зондирования турбулентной атмосферы, для беспроводной передачи информации и для манипулирования микрочастицами.

**Достоверность** полученных результатов доказывается корректными математическими преобразованиями и совпадением результатов расчетов с помощью полученных аналитических выражений с результатами численного моделирования. Все полученные в работе результаты относятся к скалярным параксиальным лазерным пучкам, которые описываются комплексными амплитудами, являющимися решением параксиального уравнения Гельмгольца.

### **Краткое содержание диссертации**

**Во введении** обоснованы актуальность темы, новизна, теоретическая и практическая значимость и достоверность результатов работы. Проведён обзор научной литературы по теме диссертационного исследования и сформулированы основные результаты, выносимые на защиту.

**В первой главе** были рассмотрены различные семейства суперпозиций лазерных пучков и рассчитаны результирующие топологические заряды для каждого из них. Рассчитан топологический заряд (ТЗ) четырехпараметрического семейства вихревых пучков, комплексная амплитуда которых описывается

геометрической прогрессией гауссовых оптических вихрей (ОВ). Рассмотрена суперпозиция нескольких одинаковых параллельных однокольцевых пучков Лагерра-Гаусса. Как для начальной плоскости, так и для дальней зоны численно и аналитически был посчитан ее суммарный топологический заряд. Рассмотрены разные варианты осевой когерентной суперпозиции пучков Лагерра-Гаусса с разными длинами волн. По известной формуле Берри рассчитан топологический заряд осевой суперпозиции двух пучков Лагерра-Гаусса разных «цветов», у каждого из которых своя длина волны и разный ТЗ.

Во **второй главе** исследовались пучки Лагерра-Гаусса и Бесселя-Гаусса и их модификации. Был рассмотрен новый тип вихревых пучков, у которых многочлен Лагерра взят в квадрате, они называются пучками Лагерра-Гаусса в квадрате (ЛГ)<sup>2</sup>. Показано теоретически и численно, что вихревой пучок ЛГ «в квадрате» является Фурье-инвариантным и сохраняет свою структуру в фокусе сферической линзы или в дальней зоне дифракции. Также рассмотрен более общий пучок, являющийся «произведением» двух пучков ЛГ. Такой пучок будет Фурье-инвариантным, если число колец у двух пучков ЛГ в «произведении» одинаковое. Рассмотрен пучок ЛГ, который отличается от обычных модовых пучков ЛГ. Этот пучок не сохраняет своей поперечной структуры при распространении в свободном пространстве, но обладает интересными свойствами. Этот пучок фурье-инвариантен и имеет увеличенную темную область как в начальной плоскости (плоскость перетяжки), так и в дальней зоне. Кроме того, аналитические и численные исследования показали, что пучок является автофокусирующимся. Так же была рассмотрена суперпозиция двух пучков Бесселя-Гаусса, исследован суммарный топологический заряд данной суперпозиции.

**Третья глава** посвящена зонным пластинкам (ЗП) и спиральным зонным пластинкам (СЗП), которые могут быть использованы для формирования оптических вихрей. Представлено сравнительное моделирование фокусировки оптических вихрей с помощью ЗП и СЗП. Проведен сравнительный анализ сформированных пиков интенсивности как в ближней, так и в дальней зоне.

Рассмотрена фокусировка цилиндрического векторного лазерного пучка второго порядка с амплитудной линзой с фокусным расстоянием 532 нм и диаметром 15 мкм, изготовленной методами химического травления, электронной литографии и процесса отрыва в алюминиевой пленке толщиной 50 нм. Численно доказано, что такая линза создает в фокальном пятне на оси область, где вектор Умова–Пойнтинга направлен против направления распространения света (область обратного потока энергии), а на оптической оси поперечная составляющая интенсивности отлична от нуля и имеет вид трех пиков вдоль оси абсцисс.

**В заключении** приведены основные результаты диссертации, количество публикаций и список конференций, на которых проводилась апробация работы.

## **ГЛАВА 1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЗАРЯД СУПЕРПОЗИЦИИ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ**

### **1.1 Геометрическая прогрессия оптических вихрей**

В данном разделе изучены коаксиальные суперпозиции гауссовых оптических вихрей, описываемых геометрической прогрессией. Топологический заряд (ТЗ) получен для всех вариантов таких суперпозиций. ТЗ может быть как целым, так и полуцелым в начальной плоскости. Однако он всегда остается целым при распространении светового поля в свободном пространстве. В общем случае геометрическая прогрессия оптических вихрей (ГПОВ) имеет три целочисленных параметра и один вещественный параметр, значения которых определяют ее ТЗ. ГПОВ не сохраняет структуру интенсивности при распространении в свободном пространстве. Однако пучок может иметь лепестки интенсивности, число которых равно одному из параметров семейства. Если реальный параметр ГПОВ равен единице, то все угловые гармоники в суперпозиции имеют одинаковую энергию. В этом случае ТЗ суперпозиции равен порядку средней угловой гармоники в прогрессии. Таким образом, если первая угловая гармоника в прогрессии имеет ТЗ  $k$ , а последняя гармоника имеет ТЗ  $n$ , то ТЗ всей суперпозиции в начальной

плоскости равен  $(n + k)/2$ , но ТЗ равен  $n$  во время распространения. Экспериментальные результаты по генерации ГПОВ пространственным модулятором света хорошо согласуются с результатами моделирования.

В настоящее время активно изучаются оптические вихри (ОВ) [1–5]. Например, в [1] авторы численно моделировали генерацию ОВ в ближней инфракрасной области спектра из пластины фотонного кристалла аморфного кремния. Условия нарушения устойчивости конструкции спирального пучка под влиянием секторных возмущений исследовались в [2] с помощью компьютерного моделирования и измерения спектров мод. В [4] авторы исследовали распространение пучков Эйри, кос-Эйри и кош-Эйри с ОВ в сильно нелинейной среде с помощью преобразования Фурье. Большой интерес представляют цилиндрические векторные пучки (ЦВП) [6–9] и пучки с дробным топологическим зарядом [10–13]. В [6] экспериментально исследованы цилиндрические векторные пространственно-временные оптические вихри. В работе [7] теоретически и экспериментально исследовано влияние обратного потока энергии в фокусе ЦВП второго порядка, прошедшего через амплитудную зонную пластинку. В [10] теоретически и численно исследована конверсия линейной поляризации в круговую поляризацию и конверсия спинового углового момента в орбитальный угловой момент в сфокусированном векторном вихревом пучке с дробным топологическим зарядом. Свойства фокального пятна и потоков энергии в фокусе дробных векторных пучков рассмотрены в [11]. В [14] предложена оптическая установка для генерации двумерной оптической вихревой решетки. В [15] экспериментально была создана трехмерная оптическая вихревая решетка. Работы [16–18] посвящены применению ОВ для захвата и вращения микроскопических частиц. Еще одна перспективная область применения ОВ — оптическая связь и безопасная передача данных [19, 20]. В работе [21] были рассмотрены оптические вихри в нанофотонике. ОВ в структурированных волноводах изучались в [22]. В [23] рассмотрены искажения спиральных вихревых пучков и показано, что такие пучки практически нечувствительны к искажениям.

Для большинства известных оптических вихрей орбитальный угловой момент (ОУМ), отнесенный к мощности пучка, и топологический заряд (ТЗ) равны между собой. Это относится к пучкам Лагерра–Гаусса [24], модам Бесселя [25] и пучкам Бесселя–Гаусса [26], гауссовым оптическим вихрям [27], гипергеометрическим модам [28] и пучкам [29], круговым пучкам [30], эллиптическим пучкам [31] и многим другим известным вихревым пучкам. Между тем ОУМ и ТЗ вихревых пучков без цилиндрической симметрии, например, асимметричных пучков Бесселя [32] или вихревых мод Эрмита–Гаусса [33], обычно имеют разные значения.

Соосные суперпозиции ОВ также могут иметь разные значения ТЗ и нормированного ОУМ [34]. ОУМ может иметь как целое, так и дробное значение [18], которое сохраняется при распространении. Если ТЗ дробный в начальной плоскости, он становится целым при распространении пучка в свободном пространстве. Следовательно, ТЗ пучка с начальным дробным ТЗ становится неопределенным [35], поскольку неясно, следует ли округлять дробное число до ближайшего большего или меньшего целого числа. Кроме того, если одиночный гауссовский ОВ имеет полуцелый ТЗ в начальной плоскости, например,  $n + 1/2$ , то при распространении ТЗ становится целым, но неопределенным, так как на разных расстояниях от оптической оси ТЗ равно либо  $n$ , либо  $n + 1$ . В случае коаксиальной суперпозиции двух гауссовых ОВ, если ТЗ полуцелый,  $(n + m)/2$ , в начальной плоскости, то он становится целым и равным  $\max(n, m)$  и сохраняется при распространении в пространстве такого вихревого поля [34].

Рассчитать ТЗ простых ОВ несложно [4, 24–33], а для суперпозиции ОВ это нерешенная задача [34]. Например, ТЗ суперпозиции пучков Лагерра–Гаусса равен максимальному азимутальному числу многочлена Лагерра у пучков в суперпозиции [34]. ТЗ суперпозиции ОВ других типов еще не изучался. Проблема получения ТЗ произвольной суперпозиции ОВ до сих пор не решена, так как математически сводится к нахождению всех корней многочлена. В данном разделе рассматривается частный случай, когда коэффициенты и топологические заряды в суперпозиции выбираются так, чтобы они составляли геометрическую

прогрессию. Проблема получения ТС суперпозиции ОВ тесно связана с задачей ОАМ-сортировки [36]. Если получен ОУМ-спектр составного вихревого пучка, то понятно, как можно получить его полный ОУМ, но неясно, как получить его полный ТЗ. Для полной характеристики вихревого пучка необходимо знать, как его ОУМ, так и его ТЗ. В данном разделе, на конкретных примерах показано, как знание спектра ОАМ пучка позволяет получить его ТЗ.

В данном разделе исследуются несколько вариантов коаксиальных суперпозиций гауссовых ОВ, комплексная амплитуда которых описывается геометрической прогрессией (конечной или бесконечной) или биномом Ньютона. Показано, что ТЗ таких суперпозиций может быть как целым, так и полуцелым в исходной плоскости. ТС может быть только целым числом и сохраняет свое значение при распространении в свободном пространстве. В общем случае геометрическая прогрессия оптических вихрей (ГПОВ) представляет собой четырехпараметрическое семейство лазерных пучков, в котором три параметра являются целыми ( $k, n, m$ ) и один параметр вещественным ( $a$ ). Топологический заряд ГПОВ в исходной плоскости зависит от всех четырех параметров. Однако при распространении в свободном пространстве ТЗ становится равным ТЗ того гауссова ОВ, у которого весовой коэффициент в суперпозиции максимальный.

### ***Геометрическая прогрессия ОВ в начальной плоскости***

Рассмотрим коаксиальную суперпозицию гауссовых ОВ, комплексная амплитуда которой в начальной плоскости ( $z = 0$ ) описывается геометрической прогрессией. В начальной плоскости такая суперпозиция имеет следующую комплексную амплитуду:

$$E_{1n}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left(1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{in\varphi}\right) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left(\frac{e^{i(n+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1}\right). \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) можно преобразовать так, чтобы аргумент комплексного числа (фаза поля (1.1)) был записан явно:

$$\begin{aligned}
E_n(r, \varphi) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left(1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{in\varphi}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{in\varphi}{2}\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right). \tag{1.2}
\end{aligned}$$

Из уравнения (1.2) видно, что аргумент (фаза) суперпозиции (1.1) равен  $(n\varphi)/2$ . Таким образом, ТЗ вихревого поля (1.1) равен:

$$TC = n/2 \tag{1.3}$$

Известно, что ОУМ  $J_z$  параксиального пучка, нормированный на мощность пучка  $W$ , определяется выражением [18]:

$$J_z = \text{Im} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^*(r, \varphi) \frac{\partial E(r, \varphi)}{\partial \varphi} r dr d\varphi, \tag{1.4}$$

$$W = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^*(r, \varphi) E(r, \varphi) r dr d\varphi, \tag{1.5}$$

где  $E^*(x, y)$  — комплексно-сопряженная амплитуда. Можно показать, что нормированный ОУМ пучка (1.2) также равен (1.3), т. е.  $J_z/W = n/2$ .

Из уравнения (1.2) также видно, что многочлен  $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n$  (при  $z = e^{i\varphi}$ ) имеет  $n$  корней. Таким образом, поле (1.2) имеет  $n$  лучей нулевой амплитуды, исходящих из центра под углами  $\varphi = 2\pi p/(n+1)$  ( $p = 1, \dots, n$ ). В топологическом смысле эти лучи являются краевыми дислокациями, так как фаза по контуру вокруг центра скачет на  $\pi$  при пересечении этих лучей нулевой интенсивности. Распределение интенсивности поля (1.2) имеет форму светового лепестка, вытянутого в положительном направлении горизонтальной оси, а максимальная интенсивность приходится на луч  $\varphi = 0$ . Это следует из разрешения неопределенности  $0/0$  в уравнении (1.2) при  $\varphi = 0$ . Максимальная интенсивность равна  $2(n+1)$  при  $r = 0$ . Кроме того, поле (1.2) имеет  $(n-1)$  боковых лепестков интенсивности, находящихся между  $n$  краевыми дислокациями. Таким образом, общее количество лепестков интенсивности (центральных и боковых лепестков) равно  $n$ .

### Геометрическая прогрессия ОВ в зоне дифракции Френеля

Для получения ТЗ поля (1.2) при свободном распространении необходимо получить асимптотическую формулу для амплитуды поля (1.2) при произвольном  $z > 0$  и  $r \rightarrow \infty$ . Во-первых, мы применяем преобразование Френеля, чтобы получить амплитуду каждого члена в уравнении (1.2). Пусть имеется гауссов ОВ (один член в уравнении (1.2)) в начальной плоскости:

$$E_n(r, \varphi) = e^{-r^2/w^2 + in\varphi} \quad (1.6)$$

Тогда его комплексная амплитуда на расстоянии  $z$  от исходной плоскости определяется выражением [34]:

$$E_n(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{z_0}{zq} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \sqrt{\xi} \exp(-\xi) \left[ I_{\frac{n-1}{2}}(\xi) - I_{\frac{n+1}{2}}(\xi) \right], \quad (1.7)$$

где

$$\xi = \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \left(\frac{\rho}{w}\right)^2 \left(\frac{1}{2q}\right), \quad q = 1 - i\frac{z_0}{z}. \quad (1.8)$$

При  $n = 0$ , используя выражения для модифицированных функций Бесселя  $I_{1/2}(\xi) = (2/(\pi\xi))^{1/2} \cosh(\xi)$ ,  $I_{-1/2}(\xi) = (2/(\pi\xi))^{1/2} \sinh(\xi)$ , получаем из уравнения (1.7) выражение для гауссова пучка при произвольном  $z$ :

$$E_0(\rho, \theta, z) = \frac{w}{w(z)} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2R(z)} - \frac{\rho^2}{w^2(z)} - i \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right), \quad (1.9)$$

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right), \quad w(z) = w \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)^{1/2}.$$

В уравнении (1.7)  $I_\mu(x)$  — модифицированная функция Бесселя,  $k$  — волновое число света,  $z_0 = kw^2/2$  — длина Рэлея,  $(\rho, \theta)$  — полярные координаты в поперечной плоскости на расстоянии  $z$ . Асимптотическое разложение модифицированной функции Бесселя может быть сокращено всего до двух членов при больших значениях аргумента  $\rho \gg w$ . Таким образом, при больших

значениях аргумента разность двух модифицированных функций Бесселя с соседними порядками может быть сведена к следующему выражению:

$$I_{\frac{n-1}{2}}(\xi) - I_{\frac{n+1}{2}}(\xi) \approx \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} \times \left\{ 1 - \frac{1}{8\xi} \left[ 4 \left( \frac{n-1}{2} \right)^2 - 1 \right] \right\} - \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} \left\{ 1 - \frac{1}{8\xi} \left[ 4 \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 - 1 \right] \right\} = \frac{ne^\xi}{2\xi\sqrt{2\pi\xi}}. \quad (1.10)$$

Тогда поле (1.2) при больших значениях  $\rho \gg w$  определяется выражением:

$$E_n(\rho, \theta, z) = \frac{-iz_0}{4zq\xi} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}\right) \sum_{p=1}^n p \exp(ip\bar{\theta}) = \frac{-iz_0}{4zq\xi} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}\right) \left[ \frac{e^{i\bar{\theta}} (1 + ne^{i(n+1)\bar{\theta}}) - (n+1)e^{in\bar{\theta}}}{(1 - e^{i\bar{\theta}})^2} \right], \quad (1.11)$$

где  $\bar{\theta} = \theta - \pi/2$ . При получении выражения (1.11) считалось, что если некоторая функция задается выражением:

$$F(\varphi) = \sum_{p=0}^n e^{ip\varphi}, \quad (1.12)$$

тогда выражение:

$$\sum_{p=0}^n p e^{ip\varphi} \quad (1.13)$$

описывается производной  $-i\partial F(\varphi)/\partial\varphi$ . Можно показать, что при  $\bar{\theta} = 0$  (т. е.  $\theta = \pi/2$ ) интенсивность максимальна. Выражение в квадратных скобках в уравнении (1.11) можно переписать как:

$$\frac{e^{i\bar{\theta}} (1 + ne^{i(n+1)\bar{\theta}}) - (n+1)e^{in\bar{\theta}}}{(1 - e^{i\bar{\theta}})^2} = - \frac{(1 + ne^{i(n+1)\bar{\theta}}) - (n+1)e^{in\bar{\theta}}}{4 \sin^2\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right)}. \quad (1.14)$$

Единицей в числителе в уравнении (1.14) можно пренебречь при больших значениях  $n$ , поэтому ТЗ поля (1.11) определяется конкуренцией двух ОВ:

$$ne^{i(n+1)\bar{\theta}} - (n+1)e^{in\bar{\theta}}. \quad (1.15)$$

Как было показано в [34], ТЗ суперпозиции двух ОВ, аналогично уравнению (1.15), равен ТЗ вихря с наибольшей амплитудой. Так как  $n + 1 > n > 0$ , ТЗ поля (1.2) на расстоянии  $z$  от начальной плоскости равен  $n$ . Причина в том, что, поскольку в суперпозиции (1.11)  $\sum p e^{ip\varphi}$  ( $p = 1, \dots, n$ ) последнее слагаемое  $n e^{in\varphi}$  имеет максимальный коэффициент (мощность пучка), а значит, ТЗ этого слагаемого «выигрывает» в «топологическом соревновании». Из уравнения (1.15) следует, что хотя ТЗ поля (1.2) равен  $n/2$  в начальной плоскости, он становится равным  $n$  при распространении поля (1.2) в свободном пространстве.

Для удобства читателя кратко покажем, что ТЗ двух ОВ равен их наибольшему ТЗ [34]. Действительно, такая суперпозиция только двух соосных ОВ определяется выражением:

$$E_2(r, \varphi) = a e^{in\varphi} + b e^{im\varphi}, \quad (1.16)$$

где  $n$  и  $m$  — целые ТЗ ОВ,  $a$  и  $b$  — весовые коэффициенты в суперпозиции ОВ, которые обычно являются комплексными. Подставляя уравнение (1.16) в формулу М.В. Берри для расчета ТЗ [35]

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} d\varphi \right\}, \quad (1.17)$$

получим соотношение для ТЗ поля (1.16):

$$TC = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{n a e^{in\varphi} + m b e^{im\varphi}}{a e^{in\varphi} + b e^{im\varphi}} d\varphi \right\}. \quad (1.18)$$

Интеграл (1.18) можно привести к табличному интегралу и тогда вместо уравнения (1.18) окончательно получить выражение для ТЗ:

$$TC = \frac{n+m}{2} + \frac{n-m}{2} \frac{|a|^2 - |b|^2}{\left| |a|^2 - |b|^2 \right|}. \quad (1.19)$$

Как видно из уравнения (1.19), ТЗ равен  $n$ , если  $|a| > |b|$ , и равен  $m$ , если  $|a| < |b|$ .

### **Усеченная геометрическая прогрессия ОВ**

Теперь вернемся к полю (1.2) и рассмотрим его модификации. Интересно, что удаление безвихревого члена (т. е. (1.1)) из амплитуды светового поля (1.1) приводит к следующему выражению вместо уравнения (1.2):

$$E_{2n}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left( e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{in\varphi} \right) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{i(n+1)\varphi}{2}\right) \left( \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right). \quad (1.20)$$

Согласно уравнению (1.20), ТЗ поля (1.20) равен

$$TC = (n+1)/2 \quad (1.21)$$

При распространении светового поля ( $z > 0$ ) асимптотика его комплексной амплитуды на больших расстояниях от оптической оси ( $r \rightarrow \infty$ ) описывается выражением, идентичным уравнению (1.11). Таким образом, ТЗ поля (1.20) при  $z > 0$  такой же, как у поля (1.1), т. е. равен  $TC = n$ .

Аналогично вместо поля (1.20) можно рассматривать световое поле, описываемое геометрической прогрессией, начинающейся с  $k$ -го члена. Таким образом, удаляя первые  $(k-1)$  членов из уравнения (1.20), мы получаем:

$$E_{kn}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left( e^{ik\varphi} + e^{i(k+1)\varphi} + \dots + e^{in\varphi} \right) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{i(n+k)\varphi}{2}\right) \left( \frac{\sin\left(\frac{(n-k)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right). \quad (1.22)$$

Видно, что поле (1.22) в плоскости  $z=0$  имеет фазу  $(n+k)\varphi/2$ . Следовательно, ТЗ равен  $TC = (n+k)/2$ . Интересно, что если в поле (1.1) оставить только одно слагаемое порядка  $k = n$ , то формула (1.22) дает целое число ТЗ, равное  $TC = n$  при распространении.

### ***Геометрическая прогрессия ОВ с симметричным спектром ОУМ***

Отметим, что геометрические прогрессии (1.1), (1.20) и (1.22) имеют равномерный ОУМ-спектр, т. е. все составляющие угловые гармоники в этих суперпозициях имеют одинаковые коэффициенты, равные единице. Как было показано в [37], если спектр ОУМ светового поля симметричен, то его нормированный ОУМ равен номеру центральной угловой гармоники, то есть

равен топологическому заряду центральной угловой гармоники. Это в полной мере относится к полям (1.1), (1.20) и (1.22). Действительно, номер средней угловой гармоники в центре ОУМ-спектра равен  $n/2$ ,  $(n + 1)/2$  и  $(n + k)/2$ , соответственно. Можно доказать, что если суперпозиция (1.1) имеет действительные коэффициенты и симметричный ОУМ-спектр, то ТЗ в начальной плоскости такой суперпозиции равен номеру центральной гармоники. Действительно, вместо прогрессии (1.1) рассмотрим суперпозицию вида:

$$\begin{aligned}
E_{sn}(r, \varphi) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \sum_{k=0}^n C_k e^{ik\varphi} = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \times \\
&\times \left( C_{n_0} e^{in_0\varphi} + \sum_{k=1}^{n_0} (C_{n_0-k} e^{i(n_0-k)\varphi} + C_{n_0+k} e^{i(n_0+k)\varphi}) \right) = \\
&= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left( C_{n_0} e^{in_0\varphi} + 2e^{in_0\varphi} \sum_{k=1}^{n_0} C_{n_0-k} \cos k\varphi \right) = \\
&= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in_0\varphi\right) \left( C_{n_0} + 2 \sum_{k=1}^{n_0} C_{n_0-k} \cos k\varphi \right).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Будем считать коэффициенты симметричными относительно центрального коэффициента  $n_0 = n/2$ , т. е.  $C_{n_0-k} = C_{n_0+k}$ . Если  $n$  — нечетное число, то центр ОУМ-спектра поля (1.23) находится посередине между порядками  $(n-1)/2$  и  $(n+1)/2$ . Для таких симметричных коэффициентов поле (1.16) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
E_{sn}(r, \varphi) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \sum_{k=0}^n C_k e^{ik\varphi} = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \times \\
&\times \left( C_{n_0} e^{in_0\varphi} + \sum_{k=1}^{n_0} (C_{n_0-k} e^{i(n_0-k)\varphi} + C_{n_0+k} e^{i(n_0+k)\varphi}) \right) = \\
&= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left( C_{n_0} e^{in_0\varphi} + 2e^{in_0\varphi} \sum_{k=1}^{n_0} C_{n_0-k} \cos k\varphi \right) = \\
&= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in_0\varphi\right) \left( C_{n_0} + 2 \sum_{k=1}^{n_0} C_{n_0-k} \cos k\varphi \right).
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Поскольку выражение в правых скобках вещественное, ТЗ выражения (1.24) равен номеру центральной угловой гармоники  $ТС = n_0 = n/2$ . В качестве примера суперпозиции (1.23) с симметричным ОУМ-спектром можно рассматривать следующее поле ( $a > 0$ ):

$$\begin{aligned}
E_{sn}(r, \varphi) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \sum_{k=-n_0}^{n_0} \frac{a^{|k|}}{|k|!} \exp(i(n_0 + k)\varphi) = \\
&= 2 \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in_0\varphi\right) \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a^{|k|}}{|k|!} \cos(k\varphi), \quad n_0 = n/2.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Другим примером суперпозиции с симметричным ОУМ-спектром является суперпозиция ОВ с весовыми коэффициентами, описываемыми биномом Ньютона:

$$E_{3n}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (1 + e^{i\varphi})^n = 2^n \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{in\varphi}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^n. \tag{1.26}$$

Из уравнения (1.26) следует, что ТЗ суперпозиции ОВ в виде бинома Ньютона также является целым или полуцелым числом и равен выражению (1.3):  $ТС = n/2$ .

Вместо уравнения (1.26) можно изучить суперпозицию двух ОВ, возведя их амплитуду в степень:

$$E_{3n}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (e^{ip\varphi} + e^{iq\varphi})^n = 2^n \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{in(p+q)\varphi}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\varphi(p-q)}{2}\right)\right)^n. \tag{1.27}$$

ТЗ суперпозиции ОВ (1.27) равен:

$$ТС = n(p+q)/2 \tag{1.28}$$

и может быть целым или полуцелым.

### ***Неограниченная геометрическая прогрессия ОВ***

Было бы интересно получить значение ТЗ светового поля (1.1), если оно выражается в виде бесконечной геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned}
E_{\infty}(r, \varphi) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (1 + qe^{i\varphi} + q^2e^{i2\varphi} + \dots + q^n e^{in\varphi} + \dots) = \\
&= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left(\frac{1}{1 - qe^{i\varphi}}\right), \quad |q| < 1,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Аргумент (фаза) комплексной амплитуды (1.29) имеет вид

$$\arg E_{\infty}(r, \varphi) = \arctan\left(\frac{q \sin \varphi}{1 - q \cos \varphi}\right). \tag{1.30}$$

Подставляя функцию (1.23) в формулу М.В. Берри [35] для расчета ТЗ, получаем

$$\begin{aligned} TC &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial \arg E_\infty(r, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q \cos \varphi - q^2}{1 + q^2 - 2q \cos \varphi} d\varphi = 0, \quad |q| < 1. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Из уравнения (1.31) следует, что, хотя поле (1.29) является суперпозицией бесконечного числа ОВ, его ТЗ равен нулю при  $|q| < 1$ .

Аналогично можно показать, что бесконечная геометрическая прогрессия, полученная на основе поля (1.20)

$$E_{1\infty}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (qe^{i\varphi} + q^2 e^{i2\varphi} + \dots + q^n e^{in\varphi} + \dots) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left(\frac{qe^{i\varphi}}{1 - qe^{i\varphi}}\right), \quad |q| < 1, \quad (1.32)$$

имеет ТЗ, равный 1. Оба этих результата объясняются тем, что ТЗ суперпозиции (1.29) или (1.30) равен ТЗ составного вихря с максимальным весовым коэффициентом (мощностью). В суперпозиции (1.29) первое слагаемое (равное 1) имеет максимальную парциальную мощность, и, таким образом, ТЗ равен нулю. В суперпозиции (1.32) максимальная мощность также приходится на первое слагаемое  $qe^{i\varphi}$ , поэтому ТЗ равно 1.

***Суперпозиция ОВ, описываемых геометрической прогрессией со знаменателем***

Здесь мы изучаем суперпозицию ОВ, описываемую геометрической прогрессией со знаменателем. Такая суперпозиция имеет следующую комплексную амплитуду в начальной плоскости:

$$\begin{aligned} E_{1nk}(r, \varphi) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (a^k e^{ikm\varphi} + a^{k+1} e^{i(k+1)m\varphi} + \dots + a^n e^{inm\varphi}) = \\ &= \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) a^k e^{ikm\varphi} \left(\frac{1 - a^{n-k+1} e^{i(n-k+1)m\varphi}}{1 - a e^{im\varphi}}\right). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Если весовые коэффициенты имеют одинаковую абсолютную величину (т. е.  $|a| = 1$ ), выражение (1.33) можно преобразовать к форме с явным аргументом комплексного числа (фаза поля (1.1)):

$$E_{1nk}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + i\frac{k+n}{2}m\varphi'\right) \left\{ \frac{\sin\left(\frac{n-k+1}{2}m\varphi'\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}m\varphi'\right)} \right\}, \quad (1.34)$$

где  $\varphi' = \varphi + m^{-1} \operatorname{ar}ga$ . Как видно из уравнения (1.34), аргумент (фаза) суперпозиции (1.1) равен  $[m(n+k)\varphi']/2$ . Таким образом, ТЗ вихревого поля (1.1) равен

$$TC = m(n+k)/2. \quad (1.35)$$

Если  $m = n = 1$ , ТЗ (1.35) совпадает с уравнением (1.21). Однако в общем случае, когда  $|a| \neq 1$ , ТЗ можно получить, используя теорию вычетов. Подставляя правую часть уравнения (1.33) в формулу М.В. Берри (1.31), получаем:

$$\begin{aligned} TC &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{ima e^{im\varphi}}{1 - a e^{im\varphi}} + \frac{ikm - i(n+1)ma^{n-k+1} e^{i(n-k+1)m\varphi}}{1 - a^{n-k+1} e^{i(n-k+1)m\varphi}} \right] d\varphi = \\ &= mn + \frac{m}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - a e^{im\varphi}} - \frac{m(n-k+1)}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - a^{n-k+1} e^{i(n-k+1)m\varphi}}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Первый интеграл в уравнении (1.36) равен

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - a e^{im\varphi}} = \begin{cases} 2\pi, & |a| < 1, \\ \pi, & |a| = 1, \\ 0, & |a| > 1. \end{cases} \quad (1.37)$$

Второй интеграл вычисляется аналогично и равен первому. Таким образом, окончательно получаем, что ТЗ геометрической прогрессии ОВ (1.33) в исходной плоскости существенно зависит от параметра  $a$  и равен

$$TC = \begin{cases} km, & |a| < 1, \\ \frac{k+n}{2}m, & |a| = 1, \\ nm, & |a| > 1. \end{cases} \quad (1.38)$$

### **Результаты моделирования**

Поскольку суперпозиция (1.33) обобщает суперпозиции (1.1), (1.20) и (1.22), моделирование основано на уравнении (1.33). На рис. 1.1 представлены

распределения интенсивности и фазы светового поля (1.33) при  $n = 3$ ,  $k = 0$ ,  $m = 1$ ,  $a = 1$ ,  $w_0 = 500$  мкм, длине волны  $\lambda = 532$  нм, длине Рэлея  $z_0 = 1476$  мм в разных поперечных плоскостях:  $z = 0$  (рис. 1.1 а, и),  $z = z_0/200$  (рис. 1.1 б, к),  $z = z_0/50$  (рис. 1.1 в, л),  $z = z_0/20$  (рис. 1.1 г, м),  $z = z_0/10$  (рис. 1.1 д, н),  $z = z_0/2$  (рис. 1.1 е, о),  $z = z_0$  (рис. 1.1 ж, п),  $z = 2z_0$  (рис. 1.1 з, р).

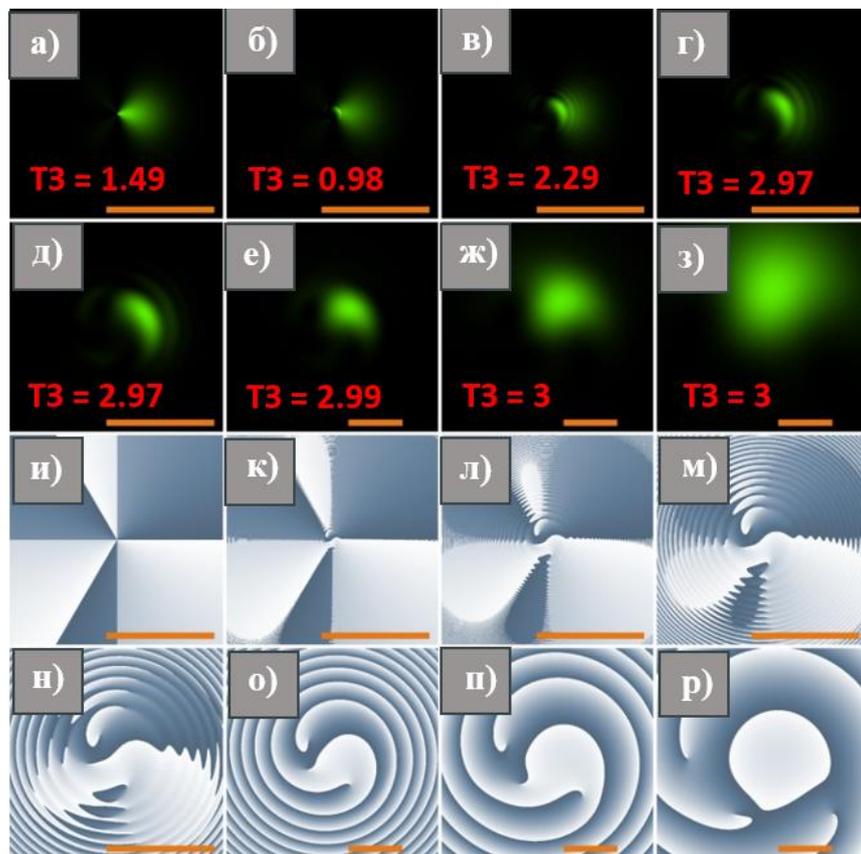


Рис. 1.1 Распределения интенсивности (а–з) и фазы (и–р) светового поля (1) при  $n = 3$ ,  $k = 0$ ,  $m = 1$ ,  $a = 1$ ,  $w_0 = 500$  мкм в плоскостях  $z = 0$  (а,и),  $z = z_0/200$  (б,к),  $z = z_0/50$  (в,л),  $z = z_0/20$  (г,м),  $z = z_0/10$  (д, н),  $z = z_0/2$  (е,о),  $z = z_0$  (ж,п),  $z = 2z_0$  (з,р).

Отметка шкалы на каждом рисунке соответствует 1 мм.

Рисунок 1.1 а подтверждает, что распределение интенсивности в исходной плоскости имеет форму лепестка ( $m = 1$ ), вытянутого в положительном направлении горизонтальной оси. Однако расходимость ОВ увеличивается с ростом их ТЗ. Поэтому все составляющие вихри в суперпозиции (1.1) расходятся по-разному, и лепесток при распространении распадается на отдельные дуги, как это видно на рис. 1.1 б–г. Затем при дальнейшем распространении на картинке

остается только одно пятно интенсивности (рис. 1.1 е–з), так как большая расходимость вихрей с большим ТЗ приводит к их более сильному затуханию.

Численный расчет ТЗ по формуле М.В. Берри (1.36) дает следующие значения: 1,49 ( $z = 0$ ), 0,98 ( $z = z_0/200$ ), 2,29 ( $z = z_0/50$ ), 2,97 ( $z = z_0/20$ ), 2,97 ( $z = z_0/20$ ), 2,97 ( $z = z_0/20$ ), 2,97 ( $z = z_0/10$ ), 2,99 ( $z = z_0/2$ ), 3,00 ( $z = z_0$ ), 3,00 ( $z = 2z_0$ ). Таким образом, полуцелое значение ТЗ, равное  $n/2$ , в начальной плоскости ( $TC = 1,5$ ) становится целым  $n$  ( $TC = 3$ ) при распространении.

Чтобы продемонстрировать влияние приращения ТЗ  $m$  в прогрессии, на рис. 2 представлены распределения интенсивности и фазы светового поля (1.33) при  $n = 3$ ,  $k = 0$ ,  $m = 5$ ,  $a = 1$ ,  $w_0 = 500$  мкм. в разных поперечных плоскостях:  $z = 0$  (рис. 1.2 а, и),  $z = z_0/200$  (рис. 1.2 б, к),  $z = z_0/50$  (рис. 1.2 в, л),  $z = z_0/20$  (рис. 1.2 г, м),  $z = z_0/10$  (рис. 1.2 д, н),  $z = z_0/2$  (рис. 1.2 е, о),  $z = z_0$  (рис. 1.2 ж, п),  $z = 2z_0$  (рис. 1.2 з, р).

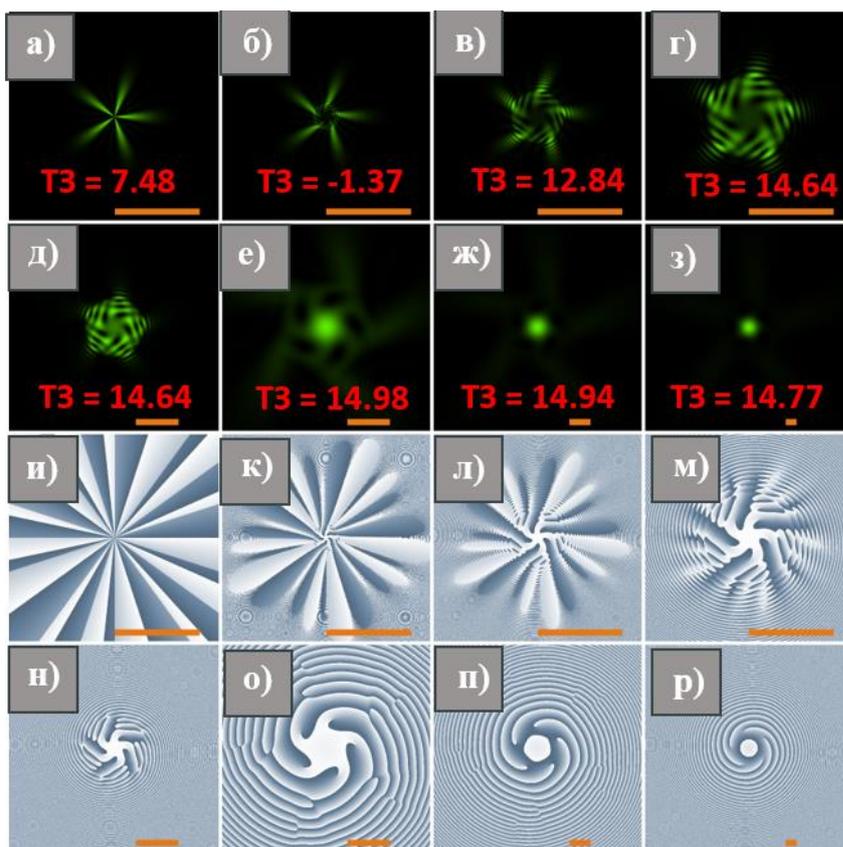


Рис. 1.2 Распределения интенсивности (а–з) и фазы (и–р) светового поля (1.1) при  $n = 3$ ,  $k = 0$ ,  $m = 5$ ,  $a = 1$ ,  $w_0 = 500$  мкм в плоскостях  $z = 0$  (а,и),  $z = z_0/200$  (б,к),  $z = z_0/50$  (в,л),  $z = z_0/20$  (г,м),  $z = z_0/10$  (д, н),  $z = z_0/2$  (е,о),  $z = z_0$  (ж,п),  $z = 2z_0$  (з,р).

Отметка шкалы на каждом рисунке соответствует 1 мм.

Численный расчет ТЗ по формуле М.В. Берри (1.36) дает следующие значения: 7,48 ( $z = 0$ ), -1,37 ( $z = z_0/200$ ), 12,84 ( $z = z_0/50$ ), 14,64 ( $z = z_0/20$ ), 14,64 ( $z = z_0/10$ ), 14,98 ( $z = z_0/2$ ), 14,94 ( $z = z_0$ ), 14,77 ( $z = 2z_0$ ). Таким образом, полуцелое значение ТЗ  $mn/2$  ( $TЗ = 7,5$ ) в начальной плоскости приобретает целочисленное значение  $mn$  ( $TЗ = 15$ ) при распространении в пространстве.

Далее исследуем, как изменяется ТЗ при удалении нескольких первых членов из прогрессии (1.33), т. е. при  $k \neq 0$ . На рис. 1.3 показаны распределения интенсивности и фазы светового поля (1.26) при  $n = 11$ ,  $k = 0$  (рис. 1.3 а-г),  $k = 2$  (рис. 1.3 д-з),  $k = 5$  (рис. 1.3 и-м),  $m = 1$ ,  $a = 1$ ,  $w_0 = 500$  мкм в начальной плоскости  $z = 0$  (рис. 1.3 ) и в дальней зоне  $z = 2z_0$  (рис. 1.3 в,г,ж,з,л,м,п,р).

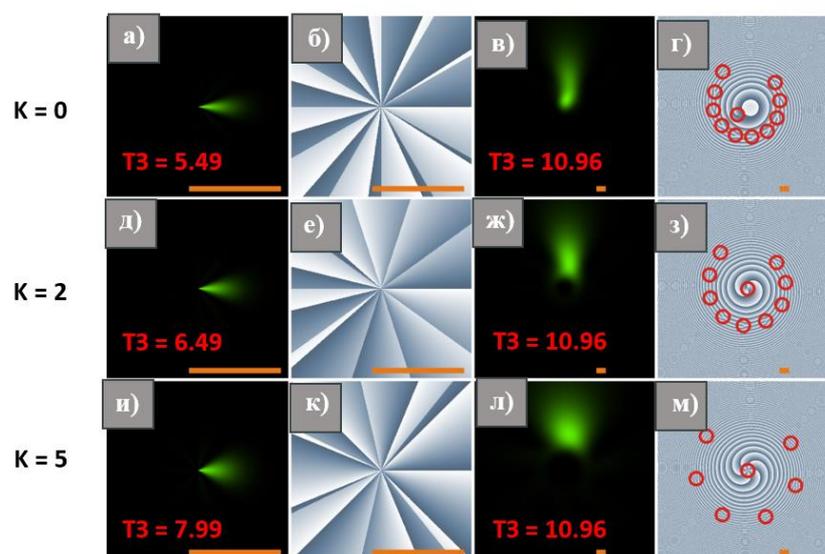


Рис. 1.3 Распределения интенсивности (столбцы 1 и 3) и фазы (столбцы 2 и 4) светового поля (1.1) при  $n = 11$ ,  $k = 0$  (а-г),  $k = 2$  (д-з),  $k = 5$  (и-л),  $m = 1$ ,  $a = 1$ ,  $w_0 = 500$  мкм в начальной плоскости  $z = 0$  (а,б,д,е,и,к) и в дальней зоне  $z = 2z_0$  (в, г, ж, з, л, м). Красные кружки в фазовых распределениях (г, з, м) выделяют ОВ. Отметка шкалы на каждом рисунке соответствует 1 мм.

Численный расчет ТЗ по формуле М.В. Берри (1.36) дает следующие значения в начальной плоскости  $z = 0$ : 5,49 ( $k = 0$ ), 6,49 ( $k = 2$ ), 7,99 ( $k = 5$ ). В дальнем поле  $z = 2z_0$  полученные значения равны 10,96 (для всех  $k$ , т. е.  $k = 0$ ,  $k = 2$ ,  $k = 5$ ). Таким образом, значение ТЗ, равное полуцелому числу  $(n + k)/2$ , в

начальной плоскости становится равным целому значению  $n$  ( $TZ = 11$ ) при распространении. ОВ на рисунке 1.3 имеют структуру с интересным свойством. ОВ с  $TZ$   $k = 0$  (рис. 1.3 г),  $k = 2$  (рис. 1.3 з) и  $k = 5$  (рис. 1.3 м) генерируется на оптической оси. Это осевой ОВ ( $TZ = k = 0, 2, 5$ ) окружен вихрями с  $TZ + 1$ , число которых дополняет общее  $TZ$  до  $n = 11$ : 11 (рис. 1.3 г), 9 (рис. 1.3 з) и 6 (рис. 1.3 м). Таким образом, суммарный  $TZ$  во всех трех случаях на рис. 1.3 равен 11.

Чтобы продемонстрировать влияние непрерывного параметра - знаменателя прогрессии  $a$ , на рис. 1.4 изображены распределение интенсивности и фазы светового поля (1.26) при  $n = 5$ ,  $k = 2$ ,  $m = 3$ ,  $a = 0,8$  (рис. 1.4 а-г),  $a = 1,0$  (рис. 1.4 д-з),  $a = 1,2$  (рис. 1.4 и-м),  $w_0 = 500$  мкм в начальной плоскости  $z = 0$  (рис. 1.4 а,б,д,е,и,к) и в ближней поле  $z = z_0/2$  (рис. 1.4 в,г,ж,з,л,м).

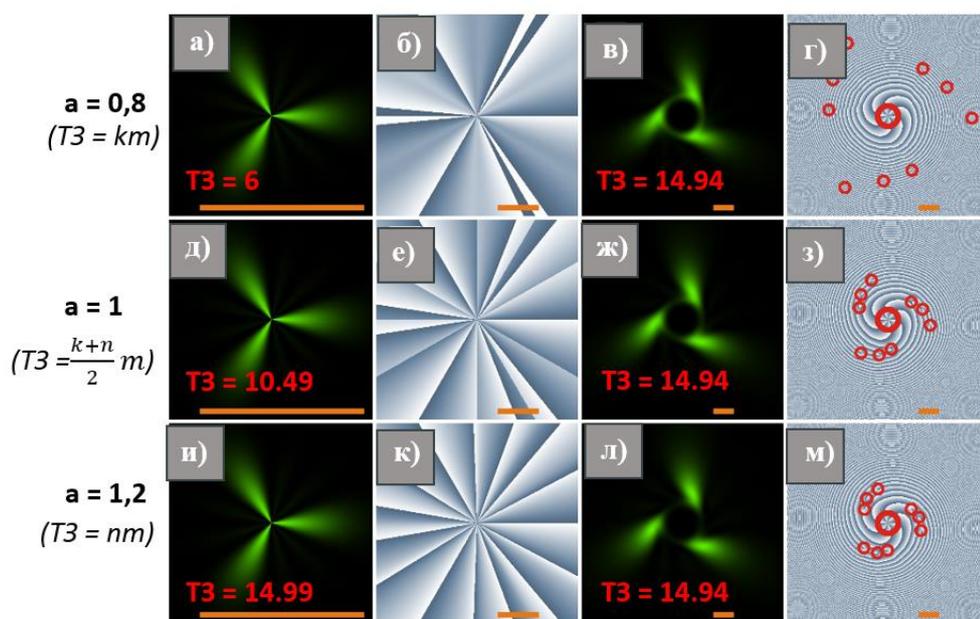


Рис. 1.4 Распределения интенсивности (столбцы 1 и 3) и фазы (столбцы 2 и 4) светового поля (1.33) при  $n = 5$ ,  $k = 2$ ,  $m = 3$ ,  $a = 0,8$  (а-г),  $a = 1,0$  (д-з),  $a = 1,2$  (и-м),  $w_0 = 500$  мкм в начальной плоскости  $z = 0$  (а,б,д,е,и,к) и в ближнем поле  $z = z_0/2$  (в,г,ж,з,л,м). Маленькие тонкие красные кружки и один большой красной кружок в фазовых распределениях (г, з, м) выделяют ОВ 1-го порядка и центральный вихрь 6-го порядка соответственно. Отметка шкалы на каждом рисунке соответствует 1 мм.

Как видно на рис. 1.4, все три пучка имеют очень похожие распределения интенсивности как в начальной плоскости, так и после распространения в пространстве. Однако фазовые распределения различны. Численный расчет ТЗ по формуле М.В. Берри (1.17) дает следующие значения в исходной плоскости  $z = 0$ : 6,00 ( $a = 0,8$ ), 10,49 ( $a = 1,0$ ), 14,99 ( $a = 1,2$ ). Эти значения согласуются с уравнением (1.38). Однако полученные значения составляют 14,94 (для каждого  $a$ , т. е.  $a = 0,8$ ,  $a = 1,0$ ,  $a = 1,2$ ) даже в ближнем поле  $z = z_0/2$ . Таким образом, ТЗ принимающий полуцелое значение  $(n + k)m/2$  для  $a=1$  в начальной плоскости становится равным целому значению  $nm$  (ТЗ = 15) при распространении в пространстве. Фазовые картины на рис. 1.4 показывают, как параметр  $a$  влияет на структуру ОВ. При  $a < 1$  доминирует вихрь низшего порядка (поэтому начальная ТЗ равна  $km = 6$ ), а периферийные вихри на рис. 1.4 г находятся далеко от центра. Если же, наоборот,  $a > 1$ , то преобладает вихрь высшего порядка (поэтому начальный ТЗ  $nm = 15$ ) и периферийные вихри на рис. 1.4 близки к оптической оси и всего вихрей 15. При  $a \rightarrow \infty$  на оптической оси будет один вихрь 15-го порядка. Общее количество вихрей на рис. 1.4 г,з,м одинаковое: 9 вихрей 1-го порядка и 1 вихрь 6-го порядка.

### **Эксперимент**

В этом разделе сравниваются распределения интенсивности пучка (1.33) при  $n = 3$ ,  $k = 0$ ,  $m = 5$ ,  $a = 1$ ,  $w_0 = 500$  мкм (рис. 1.2), рассчитанное с помощью преобразования Френеля и генерируемое экспериментально пространственным модулятором света (ПМС) [40\*]. На рис. 1.5 изображена оптическая установка для эксперимента. Линейно поляризованный гауссов пучок с длиной волны 532 нм, излучаемый лазером и расширяемый микрообъективом  $O_1$ , падает нормально на ПМС. После ПМС получается ОВ, амплитуда которого представляет собой геометрическую прогрессию простых вихрей (1.33). Через маленькую диафрагму  $D$  проходит только рабочий порядок дифракции, и его распределение интенсивности регистрируется ССD-камерой на определенном расстоянии.

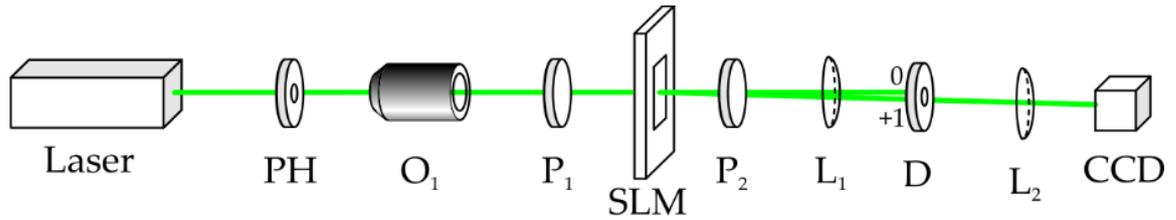


Рис. 1.5 Экспериментальная установка: Лазер МГЛ-Ф-532-700 мВт ( $\lambda = 532$  нм, 700 мВт); PH — точечный ( $d = 200$  мкм);  $O_1$  — объектив с увеличением  $100\times$ ;  $P_1$ ,  $P_2$  — линейные поляризаторы; SLM — пространственный модулятор света (Holoeye LC 2012);  $L_1$ ,  $L_2$  — линзы (с фокусными расстояниями  $f_1 = 100$  мм и  $f_2 = 50$  мм); D — диафрагма для блокировки нулевого порядка дифракции; CCD — это ПЗС-камера (UCMOS 10000КРА).

Поскольку ПМС является только фазовым, к нему применяется только фаза светового поля (1.33) при  $n = 3$ ,  $k = 0$ ,  $m = 5$ ,  $a = 1$ . На рис. 1.6 а изображена только фаза пучка (1.33). Черный цвет на рисунке 1.6 а означает нулевую фазу, а белый цвет означает фазу  $2\pi$ . Фаза с рисунка 1.6 а была применена к ПМС с несущей пространственной частотой (рисунок 1.6 б) для генерации данного пучка в первом порядке дифракции. На рис. 1.7 а показано распределение интенсивности пучка (1.33) при  $n = 3$ ,  $k = 0$ ,  $m = 5$ ,  $a = 1$  ( $w_0 = 500$  мкм), рассчитанное с помощью преобразования Френеля на расстоянии  $z = 147$  мм от исходной плоскости. Эта интенсивность (рис. 1.7 а) совпадает с интенсивностью на рис. 1.2 д. На рис. 1.7 б показано расчетное распределение интенсивности, возникающее после прохождения чисто фазового пучка (1.33) с  $n = 3$ ,  $k = 0$ ,  $m = 5$ ,  $a = 1$ , т. е. без учета начального распределения амплитуды (амплитуда является функцией Гаусса с радиусом перетяжки  $w_0 = 500$  мкм). Сравнение картин на рис. 1.7 а, б показывает, что, несмотря на различия в распределении интенсивности, симметрия 5-го порядка сохраняется. Рисунок 1.7 в иллюстрирует экспериментальное распределение интенсивности, полученное с помощью оптической установки с рисунка 1.5 и применения фазы с рисунка 1.6 б к ПМС. Сравнение результатов моделирования и эксперимента показывает их качественное совпадение.

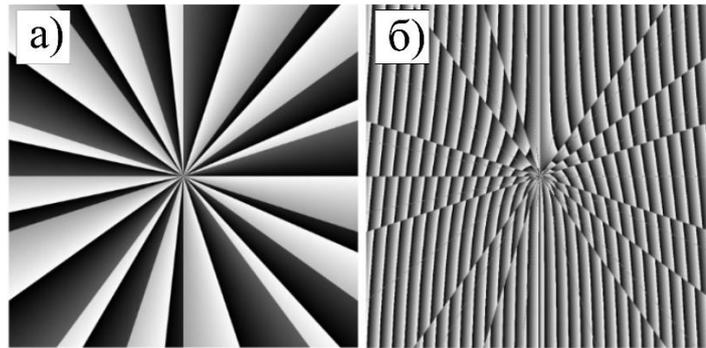


Рис.1.6 Фаза светового поля (1.33) при  $n = 3$ ,  $k = 0$ ,  $m = 5$ ,  $a = 1$  (а) и полутонная фазовая маска с несущей пространственной частотой, используемая в ПМС (б).

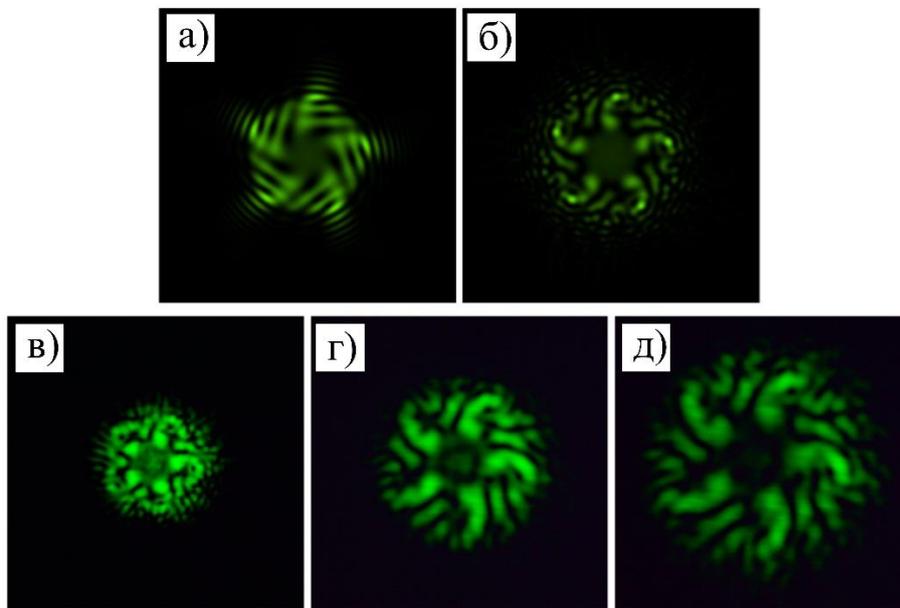


Рис. 1.7 Распределение интенсивности поля (1.33) при  $n = 3$ ,  $k = 0$ ,  $m = 5$ ,  $a = 1$ ,  $w_0 = 500$  мкм, рассчитанное на расстоянии 147 мм от исходной плоскости (а), распределение интенсивности, рассчитанное на том же расстоянии, но только по фазе поля (1.33) (рис. 1.6) (б), и экспериментальная интенсивность, полученная с помощью ПМС в оптической установке с рис. 1.5 в фазой из рис. 1.6 б на разных расстояниях от объектива  $L_2$ : 50 мм (в), 100 мм (г), 150 мм (д). Все приведенные распределения имеют физические размеры  $5 \times 5$  мм.

## 1.2 Топологический заряд суперпозиции параллельных однокольцевых пучков Лагерра-Гаусса

В этом разделе рассмотрена суперпозиция нескольких одинаковых параллельных однокольцевых пучков Лагерра-Гаусса. Как для начальной плоскости, так и для дальней зоны аналитически показано и численно подтверждено, что в случае вещественных весовых коэффициентов суперпозиции (то есть все пучки имеют одинаковую фазу, но могут иметь разную амплитуду), общий топологический заряд суперпозиции равен топологическому заряду каждого отдельного пучка. Также показано, что наличие фазовой задержки между пучками позволяет менять общий топологический заряд суперпозиции. Полученный топологический заряд может использоваться для анализа принимаемого оптического сигнала при передаче информации вихревыми пучками с использованием одновременно и пространственного мультиплексирования, и мультиплексирования по орбитальному угловому моменту.

В ряде работ изучался топологический заряд суперпозиции параллельных оптических вихрей, и в частности параллельных пучков Лагерра-Гаусса (ЛГ). Эта задача вызывала интерес ещё с 2000 года, когда в работе [41] изучались число и расположение оптических вихрей в суперпозиции двух параллельных гауссовых пучков с внедрёнными оптическими вихрями. В [41] аналитически получено трансцендентное уравнение для определения положения оптических вихрей, но только для случая, когда вихри в обоих пучках имеют первый порядок. Показано также, что при разделении двух пучков некоторым критическим расстоянием наряду с вихрями положительного порядка появляются вихри отрицательного порядка. Позже, в [42] с помощью анализа вилочек на интерференционной картине двух параллельных пучков ЛГ показано, что при изменении расстояния между пучками меняется расположение винтовых дислокаций в суперпозиции. Кроме того, в работе этих же авторов [43] показано, что число вихрей в суперпозиции двух параллельных пучков ЛГ может меняться при

распространении в пространстве, хотя суммарный топологический заряд остаётся неизменным. В работе [44] изучается суперпозиция двух внеосевых оптических вихрей, но с ортогональной поляризацией. Вместо динамики фазовых сингулярностей в этой работе изучается динамика поляризационных сингулярностей и положение С-точек в зависимости от расстояния между вихрями, их топологического заряда, а также фазовой задержки между ними. В [45] также рассматривается интерференция двух вне осевых гауссовых пучков, но с разной кривизной волнового фронта. Получены условия, при которых формируются вихревые диполи (два оптических вихря противоположных порядков). В [46] изучается когерентная и некогерентная суперпозиция двух параллельных частично-когерентных оптических вихрей. Показано, что вид суперпозиции, расстояние между пучками, расстояние распространения и параметр когерентности влияет на число и расположение вихрей когерентности. Количество вихрей, правда, определяется только численно. В [47] рассматриваются оптические вихри, формирующиеся в суперпозиции вне осевых вихрей в нелинейном процессе трёхволнового смешивания. Установлено количество вихрей и их топологические заряды в некоторых частных случаях. В недавней статье [48] рассматривается взаимодействие параллельных пучков Бесселя-Гаусса и исследуется формирование, уничтожение и расщепление оптических вихрей в зависимости от смещения пучков от оптической оси, их топологического заряда, и разности фаз между ними. Показано, что суммарный топологический заряд такого составного поля не обязательно равен сумме топологических зарядов составных пучков. В [49] показано как рассчитывать топологический заряд (ТЗ) суперпозиции только двух параллельных пучков ЛГ. В частности, в [49] было аналитически показано, что если два пучка одинаковые, то есть имеют одинаковый ТЗ, например,  $m$ , то у суперпозиции таких пучков, при любом расстоянии между ними, ТЗ будет также равен  $m$ .

В данном разделе этот результат обобщается на случай суперпозиции из конечного числа параллельных однокольцевых одинаковых пучков ЛГ. Показано, что если весовые коэффициенты такой суперпозиции действительные (то есть все

пучки ЛГ имеют одинаковую фазу, но могут иметь разную амплитуду), то ТЗ суперпозиции равен ТЗ каждого пучка, то есть  $m$ . Ранее уже было доказано, что нормированный на мощность орбитальный угловой момент такой суперпозиции тоже равен ОУМ одного пучка ЛГ в суперпозиции, то есть тоже  $m$  [50].

***ТЗ суперпозиции одинаковых параллельных пучков ЛГ в начальной плоскости***

Рассмотрим суперпозицию  $N$  параллельных одинаковых однокольцевых пучков ЛГ в начальной плоскости:

$$E_m(x, y) = \sum_{n=1}^N c_n \left( r e^{i\varphi} - r_n e^{i\varphi_n} \right)^m \times \exp\left(-r^2 - r_n^2 + 2rr_n \cos(\varphi - \varphi_n)\right). \quad (1.39)$$

Топологический заряд (ТЗ) каждого пучка в (1.39) равен  $m$ , радиус перетяжки включен в радиальную переменную  $r$ :  $r/w$ . Предположим, что весовые коэффициенты  $c_n$  в (1.39) являются действительными числами. Полярные координаты центров пучков  $(r_n, \varphi_n)$ . ТЗ суперпозиции (1.39) будем рассчитывать по формуле Берри [35]:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (1.40)$$

Подставив (1.39) в (1.40), получим:

$$\begin{aligned}
TC &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=1}^N c_n (re^{i\varphi} - r_n e^{i\varphi_n})^m \right. \\
&\quad \times e^{-r_n^2 + 2rr_n \cos(\varphi - \varphi_n)} \left( \frac{imre^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - r_n e^{i\varphi_n}} - 2rr_n \sin(\varphi - \varphi_n) \right) \left. \right] \\
&\quad \times \left[ \sum_{n=1}^N c_n (re^{i\varphi} - r_n e^{i\varphi_n})^m e^{-r_n^2 + 2rr_n \cos(\varphi - \varphi_n)} \right]^{-1} d\varphi \\
&= m - \frac{2r}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=1}^N c_n r_n \sin(\varphi - \varphi_n) \right. \\
&\quad \times (re^{i\varphi})^m e^{-r_n^2 + 2rr_n \cos(\varphi - \varphi_n)} \left. \right] \\
&\quad \times \left[ \sum_{n=1}^N c_n (re^{i\varphi})^m e^{-r_n^2 + 2rr_n \cos(\varphi - \varphi_n)} \right]^{-1} d\varphi \\
&= m - \frac{2r}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^N c_n r_n \sin(\varphi - \varphi_n) e^{-r_n^2 + 2rr_n \cos(\varphi - \varphi_n)} \\
&\quad \times \left[ \sum_{n=1}^N c_n e^{-r_n^2 + 2rr_n \cos(\varphi - \varphi_n)} \right]^{-1} d\varphi = m.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

В (1.41) мнимая часть от последнего интеграла равна нулю, так как он действительный. Из (1.41) следует, что ТЗ суперпозиции параллельных одинаковых однокольцевых пучков ЛГ с номерами  $(0, m)$  равен в начальной плоскости  $m$ .

***ТЗ суперпозиции параллельных одинаковых пучков ЛГ с разными весовыми коэффициентами в дальнем поле***

Пусть в начальной плоскости имеется суперпозиция  $N$  смещённых с оптической оси одинаковых однокольцевых пучков ЛГ. Тогда комплексная амплитуда в начальной плоскости равна:

$$E_m(x, y) = \sum_{n=1}^N c_n \left\{ \frac{\sqrt{2}}{w_0} [(x - a_n) + i(y - b_n)] \right\}^m \times \exp \left[ -\frac{(x - a_n)^2 + (y - b_n)^2}{w_0^2} \right], \tag{1.42}$$

где  $(x, y)$  – декартовы координаты в начальной плоскости,  $w_0$  – радиус перетяжки гауссова пучка,  $(a_n, b_n)$  – координаты центров пучков,  $c_n$  – коэффициенты суперпозиции. В отличие от (1.39) в (1.42) пучки в суперпозиции взяты с комплексными весовыми коэффициентами  $c_n$  и явно выделен радиус перетяжки гауссова пучка.

В дальней зоне смещение каждого пучка ЛГ оказывается наклоном, то есть в дальней зоне пучки ЛГ становятся осевыми, но с наклонами. Поэтому комплексная амплитуда всей суперпозиции в дальней зоне имеет вид:

$$E_m(r, \varphi, z \gg z_0) = \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} r e^{i\varphi}\right)^m \times \sum_{n=1}^N c_n \exp(ika_n r \cos \varphi + ikb_n r \sin \varphi). \quad (1.43)$$

где  $(r, \varphi)$  – полярные координаты в дальней зоне. По формуле М.В. Берри [35], ТЗ равен

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^N c_n \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \exp(ika_n r \cos \varphi + ikb_n r \sin \varphi) \right] \times \left[ \sum_{n=1}^N c_n \exp(ika_n r \cos \varphi + ikb_n r \sin \varphi) \right]^{-1} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ (r e^{i\varphi})^m \right]}{(r e^{i\varphi})^m} d\varphi. \quad (1.44)$$

Сокращая в числителе и знаменателе общие множители, получим далее:

$$\begin{aligned}
TC &= m + \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^N c_n \\
&\times \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \exp(ika_n r \cos \varphi + ikb_n r \sin \varphi) \right] \\
&\times \left[ \sum_{n=1}^N c_n \exp(ika_n r \cos \varphi + ikb_n r \sin \varphi) \right]^{-1} d\varphi.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Второе слагаемое – это ТЗ некоторого добавочного поля вида (без гауссовой огибающей).

$$E_{\text{add}}(x, y) = \sum_{n=1}^N c_n \exp(ika_n x + ikb_n y). \tag{1.46}$$

Так как числа  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  произвольны, формулы (1.46) может описывать широкий класс световых полей. В частности, добавочное поле может и само быть вихрем и потому давать дополнительный ТЗ. Например, если взять  $N = 4$ ,  $c_1 = -i$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = i$ ,  $c_4 = -1$ ,  $a_1 = -a_3 = r_0$ ,  $a_2 = a_4 = 0$ ,  $b_1 = b_3 = 0$ ,  $b_2 = -b_4 = r_0$ , то получим добавочное поле вида

$$E_{\text{add}}(x, y) = 2 \sin(kax) + 2i \sin(kay), \tag{1.47}$$

которое вблизи центра равно примерно

$$E_{\text{add}}(x \approx 0, y \approx 0) = 2ka(x + iy), \tag{1.48}$$

то есть содержит вихрь первого порядка. Если же в суперпозиции (1.42) все коэффициенты  $c_n$  вещественны, то можно показать, что

$$E_{\text{add}}^*(x, y) = E_{\text{add}}(-x, -y). \tag{1.49}$$

Из (1.49) следует, что если в некоторой точке  $(x_{\text{null}}, y_{\text{null}})$  имеется нулевая амплитуда, то и в точке  $(-x_{\text{null}}, -y_{\text{null}})$  амплитуда также равна нулю, и вблизи нуля амплитуда - комплексно-сопряженная. То есть для каждого вихря, который есть в поле (1.46), есть «сопряженный» вихрь, топологические заряды которых компенсируют друг друга, и поэтому ТЗ поля (1.46) при действительных коэффициентах  $c_m$  равен нулю. Выражение (1.49) доказывается просто:

$$E^*(u, v) = \sum_{n=1}^N c_n \exp(-ixu - iyv) = \sum_{n=1}^N c_n \exp(ix(-u) + iy(-v)) = E(-u, -v). \quad (1.50)$$

Есть также физическое соображение, почему поле (1.46) не может иметь ТЗ, отличный от нуля. Действительно, амплитуду вида (1.46) формирует в Фурье-плоскости (в фокусе сферической линзы) световое поле, которое в начальной плоскости состоит из  $N$  точечных источников с разной амплитудой, но одинаковой фазой. Световое поле, амплитуда которого является действительной функцией, может создавать оптические вихри только парами с топологическими зарядами  $+p$  и  $-p$ . Это также следует из того, что оптический вихрь, прошедший амплитудную маску, не изменяет свой ТЗ [51, 34].

Если ТЗ суперпозиции (1.39) в начальной плоскости и дальней зоне одинаковый и равен  $m$ , то и в любой другой плоскости он равен  $m$ , если коэффициенты  $c_n$  действительные.

### **Моделирование**

В качестве примера, на рис. 1.8 показаны интенсивности и фазы двух суперпозиций внеосевых однокольцевых пучков ЛГ при следующих параметрах: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки всех пучков 0,5 мм, число пучков ЛГ  $N = 4$ , ТЗ каждого из них  $m = 3$ , декартовы координаты центров этих пучков  $(a_1, b_1) = (r_0, 0)$ ,  $(a_2, b_2) = (0, r_0)$ ,  $(a_3, b_3) = (-r_0, 0)$ ,  $(a_4, b_4) = (0, -r_0)$ , где  $r_0 = 3w_0$ , коэффициенты суперпозиции при пучках ЛГ равны  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$  (рис. 1.8а,б) и  $c_1 = -i$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = i$ ,  $c_4 = -1$  (рис. 1.8в,г), расчётная область  $|x|, |y| \leq R$ , где  $R = 5$  мм, радиус окружности для вычисления ТЗ  $R_1 = 4,5$  мм, число отсчётов по каждой координате  $N = 1024$ . Когда все коэффициенты суперпозиции одинаковы (рис. 1.8а,б), распределение фазы приобретает асимметричный вид, но общий ТЗ четырёх пучков ЛГ получился таким же, как у каждого из них:  $ТС = 3,0042 \approx 3$ . Если же подобрать коэффициенты, как на рис. 1.8в,г, то, несмотря на

их неодинаковость, распределение фазы симметрично относительно центра, а общий ТЗ изменился и получился равным  $ТС = 4,0003 \approx 4$ .

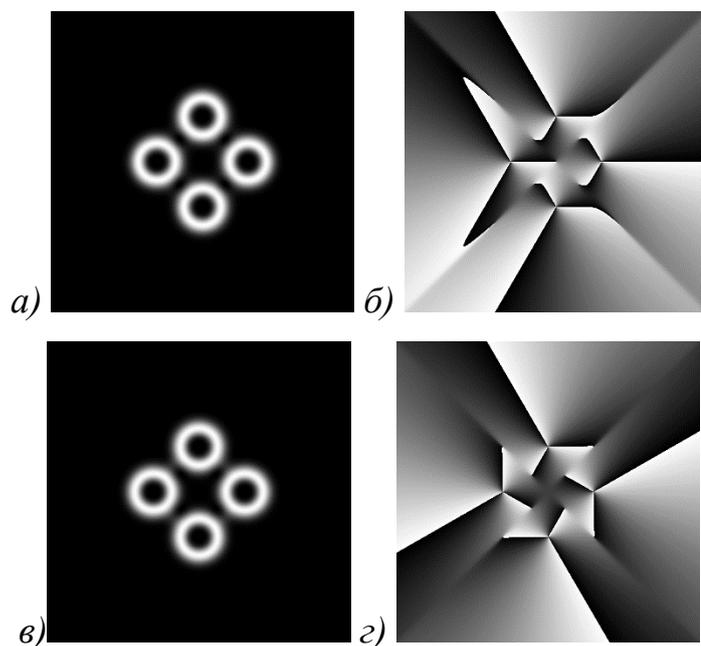


Рис. 1.8 Интенсивности и фазы двух суперпозиций внеосевых однокольцевых пучков ЛГ, у которых общий ТЗ (а, б) такой же, как у каждого пучка, или (в, г) отличается от ТЗ каждого пучка из-за наличия комплексных весовых коэффициентов в суперпозиции

При распространении в свободном пространстве четыре пучка ЛГ расширяются и начинают интерферировать друг с другом. На рис. 1.9 показаны интенсивности и фазы пучков с рис. 1.8 при тех же самых параметрах, но на расстоянии Рэля  $z = z_0 = kw_0^2/2 \approx 1,476$  м. Когда все коэффициенты суперпозиции одинаковы (рис. 1.9а,б), общий ТЗ четырёх пучков ЛГ остаётся равным трём:  $ТС = 2,9968 \approx 3$ . Для пучка на рис. 1.9в,г общий ТЗ остаётся равен четырём:  $ТС = 3,9903 \approx 4$ .

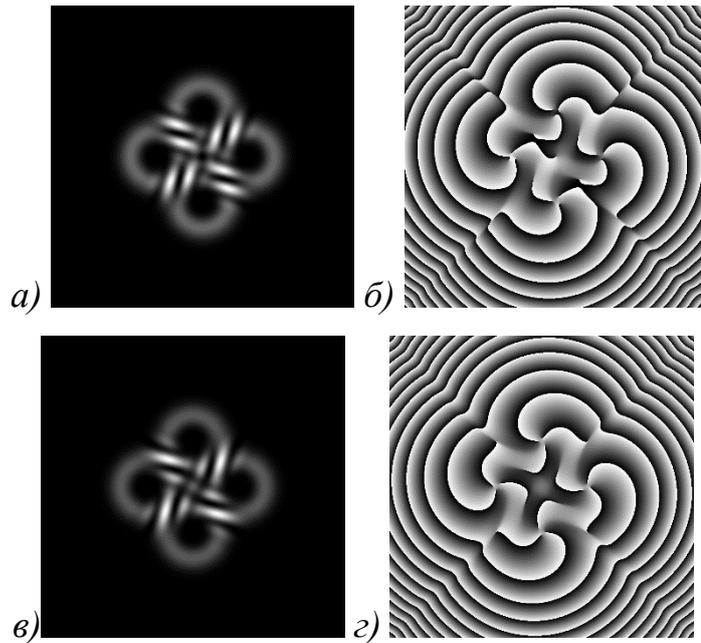


Рис. 1.9 Интенсивности и фазы двух суперпозиций внеосевых однокольцевых пучков ЛГ, вид которых в начальной плоскости показан на рис. 1.8, на расстоянии Рэлея

В дальней зоне все четыре пучка ЛГ смешиваются друг с другом и распределения их интенсивности и фазы показаны на рис. 1.10. Все параметры расчёта те же, что и на рис. 1.8, но расстояние распространения  $z = 3z_0 \approx 4,429$  м, расчётная область  $|x|, |y| \leq R$ , где  $R = 7,5$  мм, радиус окружности для вычисления ТЗ  $R_1 = 7$  мм, число отсчётов по каждой координате  $N = 2048$ . Когда все коэффициенты суперпозиции одинаковы (рис. 1.10а,б), общий ТЗ четырёх пучков ЛГ остаётся равным трём:  $ТС = 2,9853 \approx 3$ . Для пучка на рис. 1.10в,г общий ТЗ остаётся равен четырём:  $ТС = 3,9417 \approx 4$ .

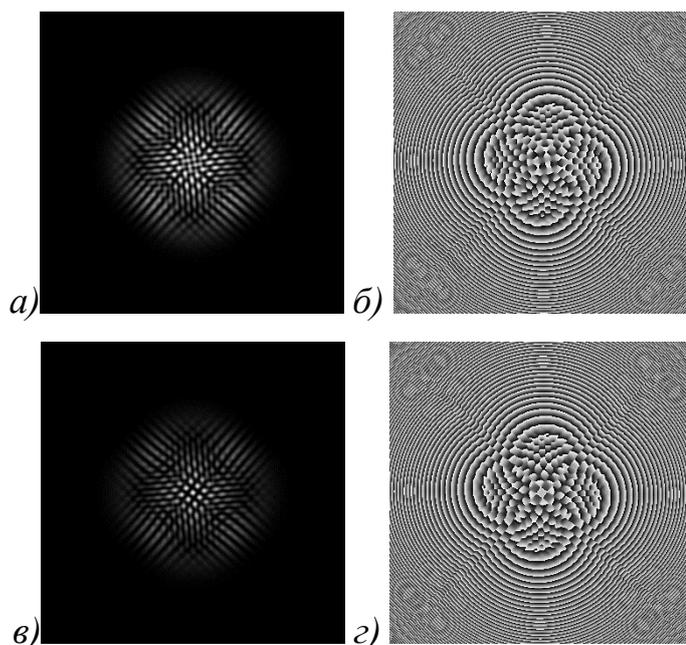


Рис. 1.10 Интенсивности и фазы двух суперпозиций внеосевых однокольцевых пучков ЛГ, вид которых в начальной плоскости показан на рис. 1.8, на тройном расстоянии Рэлея (дальняя зона)

Заметим, что все пучки ЛГ в суперпозициях, показанных на рис. 1.8-1.10, имеют одинаковую мощность, хотя из теории выше следует, что ТЗ не меняется и в случае суперпозиции пучков ЛГ разной мощности, если все коэффициенты суперпозиции вещественные (пучки ЛГ складываются в фазе или в противофазе). Так, на рис. 1.11 показаны две такие суперпозиции. В одной из них пучки ЛГ на горизонтальной оси в два раза мощнее пучков ЛГ на вертикальной оси:  $c_1 = c_3 = 1$ ,  $c_2 = c_4 = 1/2^{1/2}$  (рис. 1.11а,б,д,е). В другой суперпозиции мощность пучков убывает по кругу:  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 3^{1/2}/2$ ,  $c_3 = 2^{1/2}/2$ ,  $c_4 = 1/2$  (рис. 1.11в,г,ж,з). Другие параметры расчёта такие же, что и на рис. 1, но расстояние распространения  $z = 0$  (рис. 1.11а-г) и  $z = z_0/2$  (рис. 1.11д-з). Для обоих пучков на обоих расстояниях вдоль оптической оси численно рассчитанный ТЗ оказался равен трём:  $ТС = 3,0037$  (рис. 1.11а,б),  $ТС = 3,0017$  (рис. 1.11в,г),  $ТС = 3,0017$  (рис. 1.11д,е),  $ТС = 3,0016$  (рис. 1.11ж,з). Суперпозиция пучков Лагерра-Гаусса исследовалась в [52\*, 53\*].

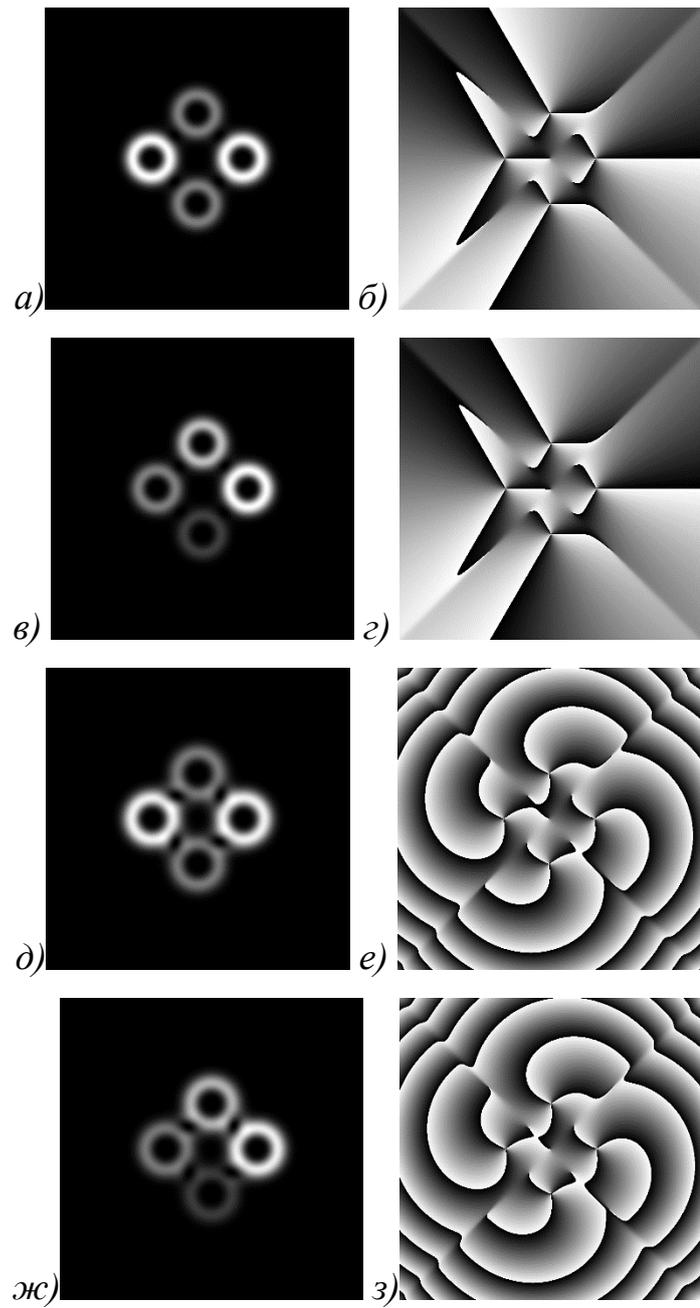


Рис. 1.11 Интенсивности и фазы двух суперпозиций внеосевых однокольцевых пучков ЛГ разной мощности в начальной плоскости (а-г) и в ближней зоне на половине расстояния Рэлея (д-з)

### 1.3 Когерентная суперпозиция пучков Лагерра-Гаусса с разными длинами волн: цветные оптические вихри

В данном разделе рассчитан топологический заряд (ТЗ) осевой когерентной суперпозиции пучков Лагерра-Гаусса разных «цветов», у каждого из которых своя длина волны и разный ТЗ. Оказалось, что ТЗ такой суперпозиции равен ТЗ пучка ЛГ с большей длиной волны, независимо от величины весового коэффициента этого пучка в суперпозиции и от величины его ТЗ. Интересно, что мгновенный ТЗ такой суперпозиции сохраняется, а распределение интенсивности (усредненное по времени) «цветного» оптического вихря меняет свою световую «гамму»: если в ближней зоне с ростом радиуса цвета световых колец (радуга) меняются согласно их ТЗ в суперпозиции от меньшего ТЗ к большему, то при распространении в пространстве (в дальней зоне) с ростом радиуса цвета колец в радуге располагаются в обратном порядке от большего ТЗ к меньшему. Показано также, что специальным подбором длин волн (синего, зеленого и красного) в трехцветной композиции однокольцевых пучков ЛГ можно получить на некотором расстоянии при усреднении по времени световое кольцо белого цвета.

Вихревые пучки или оптические вихри известны в оптике с 80х годов, но многие фундаментальные теоретические вопросы, связанные с этими пучками, до сих пор не разрешены. И некоторые из этих нерешенных вопросов связаны с такой важной характеристикой оптических вихрей, как топологический заряд (ТЗ) [51]. Например, только недавно было показано [49], что ТЗ суперпозиции двух параллельных пучков Лагерра-Гаусса (ЛГ) с азимутальными номерами разной четности разный, в зависимости от того, кто в этой «паре» слева, а кто справа. Если пучки в суперпозиции переставить местами, то ТЗ изменится на 1. Но если, про ТЗ монохроматических оптических вихрей стали появляться работы, то про расчет ТЗ «цветных» или полихроматических оптических вихрей почти нет работ. Проанализируем кратко, что известно про ТЗ полихроматических вихрей. В работе [54] освещали пучком белого света спиральную фазовую пластинку (СФП) и показали, что формируется радуга, так как разные длины волн в пучке белого

света образуют после СФП световые кольца разного радиуса. В работе [55] с помощью одноосных кристаллов, освещенных полихроматическим светом, были сформированы оптические вихри первого и второго порядков. Их ТЗ был экспериментально измерен с помощью цилиндрической линзы. С помощью фильтров, выделяя из белого вихря разные спектральные составляющие, было показано, что ТЗ каждой цветной составляющей в пучке одинаковый, и равен 1 или 2 [55]. В [56] освещали белым светом многосекторную спиральную отражающую метаповерхность, сформированную на поверхности пленки золота и состоящую из бинарных субволновых решеток, поворачивающих вектор поляризации падающего света. Было экспериментально показано, что такая поверхность формирует при отражении вихри первого порядка во всем видимом диапазоне с почти одинаковой эффективностью (около 60%). В [57] цветные оптические вихри формировались с помощью решетки Брегга с вилочкой, сформированной в холе-стерическом жидком кристалле. Такая решетка Брегга работает как «толстая» голограмма, которая обладает существенной угловой селективностью. Меняя угол падения белого света на поверхность жидкого кристалла, на выходе получали цветные (красные и синие) оптические вихри первого и второго порядков. В [58] белым светом от светодиода освещали отражающий модулятор, на котором сформирована спиральная картина фазы, наложенная на пилообразную дифракционную решетку. Решетка отражает свет разных длин волн под разными углами. Экспериментально были получены цветные (красный, зеленый и синий) оптические вихри с топологическим зарядом 3. Белый оптический вихрь в [58] получали, помещая в оптическую схему призму, которая компенсировала дисперсию решетки модулятора.

Работ по «цветным» оптическим вихрям (ЦОВ) не много, тем более мало работ (или почти нет) по расчету ТЗ суперпозиции ЦОВ. В данном разделе на примере осевой когерентной суперпозиции однокольцевых (радиальный индекс равен нулю) пучков ЛГ с одинаковым радиусом перетяжки, но разными весовыми коэффициентами, ТЗ и длинами волн, мы покажем теоретически и численно, что в

топологической конкуренции выигрывает более «красный» пучок ЛГ и ТЗ всей суперпозиции равен ТЗ того пучка ЛГ, у которого больше длина волны.

Заметим, что в отличие от орбитального углового момента ТЗ является дискретной характеристикой вихревых пучков. Поэтому для изменения ТЗ требуются более сильные искажения светового поля и, следовательно, ТЗ – более устойчивая величина [51], которую можно использовать для идентификации сигналов в оптической передаче информации. Результаты данной работы, таким образом, призваны установить теоретические значения ТЗ в случае передачи информации в многоцветных световых пучках.

### ***Топологический заряд суперпозиции двух цветных оптических вихрей***

Под цветными оптическими вихрями в работе понимается осевая когерентная суперпозиция однокольцевых пучков ЛГ с одинаковыми перетяжками, но разными топологическими зарядами (ТЗ) и разными длинами волн. Комплексная амплитуда таких цветных оптических вихрей описывается выражением:

$$E(r, \varphi, z, t) = \sum_{s=1}^N c_s q_s^{-n_s-1}(z) \left( \frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^{n_s} \exp\left( -\frac{r^2}{w^2 q_s(z)} + i n_s \varphi + i k_s z - i \omega_s t \right), \quad (1.51)$$

где  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты,  $t$  – время,  $w$  – радиус перетяжки гауссова пучка,  $c_s$  – весовые постоянные,  $n_s$  – топологические заряды каждого пучка в суперпозиции,

$$q_s(z) = 1 + i \frac{z}{z_s}, \quad z_s = \frac{k_s w^2}{2}, \quad k_s = \frac{2\pi}{\lambda_s}, \quad (1.52)$$

$z_s$  – длина Рэлея,  $k_s$  – волновое число света,  $\lambda_s$  – длина волны монохроматического света, а  $\omega_s$  – его частота ( $k_s = \omega_s/c$ ,  $c$  – скорость света в вакууме). На практике суперпозиция (1.51) сформируется, если в перетяжке осевой суперпозиции гауссовых пучков с определенными длинами волн разместить спиральную фазовую пластинку (СФП) порядка  $n$  с глубиной рельефа, рассчитанного на длину

волны  $\lambda_0$ . Длины волн  $\lambda_s$  у гауссовых пучков должны быть такими, чтобы порядок СФП оставался целым числом  $n_s$ :  $\lambda_s n_s = \lambda_0 n$ ,  $s=1,2,3,\dots,N$ . Строго говоря, после СФП сформируется в этом случае не пучок ЛГ, а гауссов оптический вихрь [27]. Но в ряде работ показано, что гауссов вихрь в дальней зоне почти совпадает с пучком ЛГ [59,60].

Далее для простоты выкладок рассмотрим только два слагаемых в (1). Топологический заряд будем рассчитывать по формуле Берри [35]

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi, z) / \partial \varphi}{E(r, \varphi, z)}. \quad (1.53)$$

Из (1.53) кажется, что правая часть зависит от расстояния  $z$ . Однако, ниже будет показано, что топологический заряд от  $z$  не зависит.

Подставим (1.51) при  $N = 2$  в (1.53), пусть  $n_1 = n$ ,  $n_2 = m$ , получим:

$$\begin{aligned} TC = & \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{inc_1}{q_1^{n+1}(z)} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^n \right. \\ & \times \exp \left[ -\frac{r^2}{w^2 q_1(z)} + in\varphi + ik_1 z - i\omega_1 t \right] \\ & + \left. \frac{imc_2}{q_2^{m+1}(z)} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^m \exp \left[ -\frac{r^2}{w^2 q_2(z)} + im\varphi + ik_2 z - i\omega_2 t \right] \right\} \\ & \times \left\{ \frac{c_1}{q_1^{n+1}(z)} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^n \exp \left[ -\frac{r^2}{w^2 q_1(z)} + in\varphi + ik_1 z - i\omega_1 t \right] \right. \\ & + \left. \frac{c_2}{q_2^{m+1}(z)} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^m \exp \left[ -\frac{r^2}{w^2 q_2(z)} + im\varphi + ik_2 z - i\omega_2 t \right] \right\}^{-1} d\varphi. \quad (1.54) \end{aligned}$$

Предполагая, что у обоих пучков ненулевая амплитуда:  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$ , и делая замену переменной  $r = wr/2^{1/2}$ , это выражение можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
TC &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ m \exp(im\varphi) + n \exp(in\varphi) \right. \\
&\times P(z) \rho^{n-m} \exp \left[ -Q(z) \rho^2 + i(k_1 - k_2)z - i(\omega_1 - \omega_2)t \right] \left. \right\} \\
&\times \left\{ \exp(im\varphi) + \exp(in\varphi) \right. \\
&\times P(z) \rho^{n-m} \exp \left[ -Q(z) \rho^2 + i(k_1 - k_2)z - i(\omega_1 - \omega_2)t \right] \left. \right\}^{-1},
\end{aligned} \tag{1.55}$$

где

$$P(z) = \frac{c_1 q_2^{m+1}(z)}{c_2 q_1^{n+1}(z)}, \quad Q(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{q_1(z)} - \frac{1}{q_2(z)} \right].$$

Из (1.55) следует, что если  $|q_1(z)| < |q_2(z)|$ , то в показателях экспонент с  $\rho^2$  стоит число с отрицательной вещественной частью, и при стремлении  $\rho$  к бесконечности первые слагаемые под интегралом в числителе и знаменателе стремятся к нулю, независимо от отношения номеров  $n$  и  $m$  и независимо от весовых множителей  $c_1$  и  $c_2$ . Оставшиеся вторые слагаемые, после сокращения подобных сомножителей, дают результат  $TC = m$ . И наоборот, если  $|q_1(z)| > |q_2(z)|$ , то в показателях экспонент с  $\rho^2$  стоит число с положительной вещественной частью, и при стремлении  $r$  к бесконечности первые слагаемые стремятся к тоже к бесконечности. И вторыми слагаемыми можно пренебречь. Тогда, сокращая подобные сомножители в числителе и знаменателе под интегралом получим, что  $TC = n$ . Из (1.52) следует, что  $|q_1(z)| < |q_2(z)|$ , если  $\lambda_1 < \lambda_2$  (и  $TC = m$ ) и  $|q_1(z)| > |q_2(z)|$ , если  $\lambda_1 > \lambda_2$  (и  $TC = n$ ). Таким образом, можно утверждать, что ТЗ суперпозиции из двух цветных оптических вихрей равен ТЗ того пучка, у которого длина волны больше («красные» выигрывают у «синих»). Если учитывать соотношение  $\lambda_s n_s = \lambda_0 n$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$ , то у пучка с большей длиной волны топологический заряд будет меньше.

Заметим, что в случае большего числа пучков ( $N > 2$ ) доказательство более громоздкое, но аналогичное – одна из экспонент преобладает над другими и ТЗ суперпозиции равен ТЗ пучка с большей длиной волны.

Также заметим, что если вместо однокольцевых пучков ЛГ в суперпозиции (1.51) взять пучки ЛГ с ненулевыми радиальными индексами  $p_s$ :

$$E(r, \varphi, z, t) = \sum_{s=1}^N c_s q_s^{-n_s-1} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^{n_s} L_{p_s}^{n_s} \left[ \frac{2r^2}{w^2 |q_s(z)|^2} \right] \times \exp \left[ -\frac{r^2}{w^2 q_s(z)} + in_s \varphi - 2ip_s \arg q_s(z) + ik_s z - i\omega_s t \right], \quad (1.56)$$

где  $L_p^n(\cdot)$  – присоединённый многочлен Лагерра, то аналогичный вывод приведёт к точно такому же ТЗ, поскольку он определяется доминирующей экспонентой (гауссовой огибающей пучка), а не степенями при радиальной координате.

Пусть в (1.51) ТЗ всех пучков в суперпозиции равны  $n$ , тогда вместо (1.51) запишем:

$$E(r, \varphi, z) = \left( \frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^n e^{in\varphi} \times \sum_{s=1}^N c_s q_s^{-n-1}(z) \exp \left( -\frac{r^2}{w^2 q_s(z)} + ik_s z \right). \quad (1.57)$$

И так как производная от (1.57) будет равна  $\partial E(r, \varphi, z) / \partial \varphi = inE(r, \varphi, z)$ , то из (1.53) сразу следует, что ТЗ суперпозиции (1.57) с любой комбинации цветов равен ТЗ каждого пучка:  $TC = n$ . Это простой результат, но сформировать на практике суперпозицию (1.57) очень трудно, так как нужно, чтобы в перетяжках каждого из цветных гауссовых пучков были расположены разные СФП, у которых максимальная глубина рельефа  $h_s$  согласуется с длиной волны  $\lambda_s$ , падающего света:  $2\pi h_s (n_0 - 1) = n\lambda_s$ , где  $n_0$  – показатель преломления материала СФП (считаем, что дисперсии показателя преломления нет).

### ***Топологический заряд белого оптического вихря***

Рассмотрим практически важный случай, когда в перетяжку белого оптического вихря (непрерывный спектр из видимого диапазона) помещается одна СФП порядка  $n$ , рельеф которой согласован с длиной волны  $\lambda_0$ . Тогда

комплексная амплитуда суперпозиции в зоне дифракции Френеля будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 E(\rho, \theta, z, t) &= \frac{-i}{z\lambda_0} \int_0^\infty \lambda^{-1} f(\lambda) d\lambda \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &\times \exp\left\{i \frac{2\pi z}{\lambda} - i \frac{2\pi ct}{\lambda} - \frac{r^2}{w^2} + i \frac{n\lambda_0}{\lambda} \varphi\right\} \\
 &\times \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda z} [r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)]\right\},
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

где  $f(\lambda)$  – огибающая спектра источника белого света (например, светодиода). Так как ТЗ каждого монохроматического (одноцветного) вихря  $\mu = n\lambda_0 / \lambda$  будет, вообще говоря, дробный, то интегрировать по  $\varphi$  в (1.58) нельзя, и мы разложим экспоненту в ряд по оптическим вихрям с целым ТЗ:

$$\begin{aligned}
 \exp\left(i \frac{n\lambda_0}{\lambda} \varphi\right) &= \\
 &= \frac{e^{i\pi n\lambda_0/\lambda} \lambda \sin(\pi n\lambda_0 / \lambda)}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im\varphi}}{n\lambda_0 - m\lambda}.
 \end{aligned} \tag{1.59}$$

Подставив (1.59) в (1.58), получим:

$$\begin{aligned}
 E(\rho, \theta, z, t) &= \frac{-2i}{z\lambda_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m e^{im\theta} \times \\
 &\times \int_0^\infty \frac{e^{i(\pi/\lambda)(n\lambda_0 + \rho^2/z + 2z - 2ct)} \sin(\pi n\lambda_0 / \lambda) f(\lambda)}{n\lambda_0 - m\lambda} d\lambda \\
 &\times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{i\pi r^2}{\lambda z}\right) J_m\left(\frac{2\pi r\rho}{\lambda z}\right) r dr,
 \end{aligned} \tag{1.60}$$

где  $J_m(x)$  – функция Бесселя первого рода  $m$ -го порядка. Интеграл по переменной  $r$  в (1.60) можно вычислить, используя справочный интеграл [61]:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty r dr \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{i\pi r^2}{\lambda z}\right) J_m\left(\frac{2\pi r\rho}{\lambda z}\right) &= \frac{\pi^{3/2} \rho w^3 (\lambda z)^{1/2} (\operatorname{sgn} m)^{|m|}}{4(\lambda z - i\pi w^2)^{3/2}} \\
 &\times e^{-\xi} \left[ I_{(|m|-1)/2}(\xi) - I_{(|m|+1)/2}(\xi) \right],
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

где

$$\xi = \frac{(\pi\rho w)^2}{2\lambda z(\lambda z - i\pi w^2)}.$$

Подставляя (1.61) в (1.60), окончательно получим:

$$E_n(\rho, \theta, z, t) = \frac{-i\pi^{3/2}\rho w^3}{2z^{1/2}\lambda_0} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m (\text{sgn } m)^{|m|} e^{im\theta} D_{m,n}(\rho, z, t), \quad (1.62)$$

где

$$D_{m,n}(\rho, z, t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi} \left[ I_{(|m|-1)/2}(\xi) - I_{(|m|+1)/2}(\xi) \right]}{(\lambda z - i\pi w^2)^{3/2}} \times \frac{e^{i(\pi/\lambda)(n\lambda_0 + \rho^2/z + 2z - 2ct)} \lambda^{1/2} \sin(\pi n \lambda_0 / \lambda) f(\lambda)}{n\lambda_0 - m\lambda} d\lambda. \quad (1.63)$$

Интеграл (1.63) скорее всего нельзя свести к справочному интегралу и поэтому нельзя вычислить в явном виде, кроме тривиального случая монохроматического света, когда  $f(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$ . В этом случае выражение (1.62) совпадает с уравнением (45) в работе [34]. Но и без вычисления (1.63) можно сделать некоторые выводы из полученных выражений (1.62) и (1.63). А именно, если в знаменателе функции под интегралом будет ноль, тогда из всего ряда в (1.62) останутся только слагаемые с номерами  $m$ , которые обеспечивают этот ноль в знаменателе:

$$m = \frac{n\lambda_0}{\lambda}, \quad \lambda \in [\lambda_0 - \Delta\lambda, \lambda_0 + \Delta\lambda], \quad (1.64)$$

где  $2\Delta\lambda$  – ширина спектра цветного гауссова пучка. Например, если  $n = 10$ ,  $\lambda_0 = 532$  нм,  $\Delta\lambda = 100$  нм, то в сумме (1.62) останутся всего 4 слагаемых с номерами  $m = 9, 10, 11, 12$ . Далее можно пользоваться выражением (1.51), которое показывает, что в суперпозиции эффективно имеются всего 4 пучка и ТЗ всей суперпозиции будет равен максимальному ТЗ, то есть  $ТС = 12$ . Если увеличить порядок СФП в 2 раза, пусть  $n = 20$ , то в рамках того же примера в сумме (1.62) останутся уже 8 цветных оптических вихрей с номерами  $m$  от 17 до 24. То есть в суперпозиции (10) эффективно будут распространяться 8 оптических вихрей (1) и ТЗ такой суперпозиции будет равен  $ТС = 24$ . И наоборот, если уменьшить порядок

СФП, например, взять  $n = 3$ , как в работе [58], для пучка с любой длиной волны из диапазона [432 нм, 632 нм] в сумме (10) только одно слагаемое будет обращаться в ноль при  $m = 3$ . Это объясняет результат эксперимента в [58], после прохождения одной СФП порядка  $n = 3$  все цветные вихри (белый, синий, красный и зеленый) имели ТЗ равный  $m = 3$

### ***Моделирование***

#### *Моделирование двухцветных вихрей*

Рассмотрим когерентную суперпозицию двух пучков ЛГ разного цвета. Согласно (1.51), такое световое поле не является стационарным и зависит от времени. Допустим, что в некоторой точке пространства комплексная амплитуда первого пучка равна  $A$ , а комплексная амплитуда второго пучка равна  $B$ . Тогда поле в этой точке зависит от времени следующим образом:  $E = A \exp(-i\omega_1 t) + B \exp(-i\omega_2 t)$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – частоты обоих пучков. В простом случае, когда  $A = B$ , это поле может быть представлено как  $E = 2A \cos[(\omega_1 - \omega_2)t/2] \exp[-i(\omega_1 + \omega_2)t/2]$ . Этот простой пример показывает, что если частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не близки друг к другу, то интенсивность поля меняется от нуля до максимума с частотой, гораздо большей, чем способен воспринимать человеческий глаз. Поэтому эта точка пространства воспринимается как точка с постоянной интенсивностью  $|A|^2$  и с усреднённой частотой  $(\omega_1 + \omega_2)/2$ . Соответственно, если пучки имеют, например, синий и красный цвет, то при равенстве амплитуд в некоторой точке она выглядит, как фиолетовая и при визуализации двух интерферирующих пучков может быть отображена как (255, 0, 255) (в формате RGB). Что касается фазы, то, в отличие от монохроматических пучков, она не определена, так как в каждой точке пространства колебания не гармонические. Поэтому визуализировать можно только мгновенную фазу, в некоторый конкретный момент времени.

На рис. 1.12 показана суперпозиция двух пучков ЛГ разного цвета. Распределения интенсивности (рис. 1.12а,г,ж) показаны усреднёнными по времени, а распределения фазы (рис. 1.12б,в,д,е,з,и) – мгновенные (в два разных момента времени). Для расчётов были выбраны следующие параметры: длины волны  $\lambda_1 = 400$  нм,  $\lambda_2 = 700$  нм, радиус перетяжки гауссова пучка  $w = 500$  мкм,

топологические заряды пучков соответственно  $n_1 = 4$  и  $n_2 = 3$ , радиальные индексы  $p_1 = p_2 = 0$  (однокольцевые пучки), весовые коэффициенты суперпозиции  $c_1 = [p_1!/(n_1 + p_1)!]^{1/2} \approx 0,2$  и  $c_2 = [p_2!/(n_2 + p_2)!]^{1/2} \approx 0,4$  (при таких коэффициентах энергии обоих пучков равны), расстояние вдоль оптической оси  $z = 0,2$  м (рис. 1.12а-в),  $z = 1$  м (рис. 1.12г-е),  $z = 2$  м (рис. 1.12ж-и), время регистрации фазы  $t_1 = 60$  с (рис. 1.12б,д,з) и  $t_2 = 61$  с (рис. 1.12в,е,и).

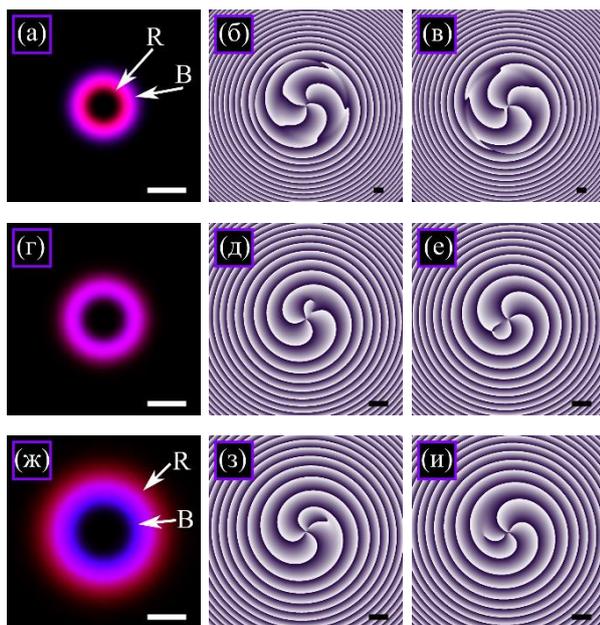


Рис. 1.12 Усреднённые распределения интенсивности (а,г,ж) и мгновенные распределения фазы (б,в,д,е,з,и) суперпозиции двух однокольцевых пучков ЛГ разного цвета ( $\lambda_1 = 400$  нм,  $\lambda_2 = 700$  нм) на расстоянии  $z = 0,2$  м (а-в),  $z = 1$  м (г-е),  $z = 2$  м (ж-и) в моменты времени  $t_1 = 60$  с (б,д,з) и  $t_2 = 61$  с (в,е,и). Другие параметры расчёта: радиус перетяжки гауссова пучка  $w = 500$  мкм, ТЗ  $n_1 = 4$  и  $n_2 = 3$ , радиальные индексы  $p_1 = p_2 = 0$ , весовые коэффициенты суперпозиции  $c_1 \approx 0,2$  и  $c_2 \approx 0,4$  (для выравнивания энергии пучков). Масштабная метка на каждом рисунке показывает 1 мм. Тёмный и светлый цвет на распределениях фазы означает соответственно 0 и  $2\pi$ . Символы 'R' и 'B' (а,ж) показывают области доминирования соответственно красного и синего пучка

Так как ТЗ синего пучка больше, чем красного, то на небольшом расстоянии радиус синего кольца больше радиуса красного (рис. 1.12а). Однако, красный пучок расходится сильнее, чем синий. Поэтому на расстоянии примерно 1 м

радиусы колец выравниваются (одно фиолетовое кольцо на рис. 1.12г) и далее, на расстоянии около 2 м красное кольцо становится внешним, а синее – внутренним (рис. 1.12ж).

Согласно теории, общий топологический заряд всей суперпозиции не зависит от того, какого цвета кольцо является внешним, и определяется только топологическим зарядом пучка с большей длиной волны. Тогда, для пучка с рис. 1.12 он должен быть равен трём ( $TC = 3$ ). Расчёт топологического заряда по мгновенным распределениям фазы на рис. 1.12 это подтверждает: при расчёте по формуле М.В. Берри (1.53) вдоль окружности радиуса  $R_1 = 7,5$  мм были получены значения 2,986 (рис. 1.12б), 2,982 (рис. 1.12в), 2,874 (рис. 1.12д,е), 2,907 (рис. 1.12з,и).

В начальной плоскости и в начальный момент времени оптические вихри в сечении пучка распределены так. В центре пучка на оптической оси находится оптический вихрь с меньшим ТЗ 3, а на некотором радиусе от оси находится вихрь с ТЗ +1 и на большем радиусе вихрь с ТЗ -1. При эволюции суперпозиции во времени и пространстве на оптической оси по-прежнему остается вихрь с ТЗ +3, а оптический «диполь» с ТЗ на краях +1 и -1 приближается к оптической оси. То есть ТЗ суперпозиции равен 3. Эту эволюцию можно видеть на распределениях мгновенной фазы на рис.1.12. По-другому вели бы себя вихри, если бы, наоборот, у большей длины волны был ТЗ 4, а у меньшей 3. Тогда бы, при эволюции суперпозиции вихрь с ТЗ -1 «почти мгновенно» ушел бы на бесконечность, а вблизи оси сформировался бы вихрь с ТЗ 4, и у всей суперпозиции ТЗ был бы равен 4.

Аналогично и для многокольцевых пучков ЛГ. На рис.1.13 показана суперпозиция двух пучков ЛГ разного цвета с теми же параметрами, что и на рис. 1.12, но радиальные индексы пучков равны  $p_1 = p_2 = 2$  (у каждого пучка три кольца). Соответственно, для выравнивания энергии весовые коэффициенты суперпозиции выбраны равными  $c_1 = [p_1!/(n_1 + p_1)!]^{1/2} \approx 0,053$  и  $c_2 = [p_2!/(n_2 + p_2)!]^{1/2} \approx 0,129$ .

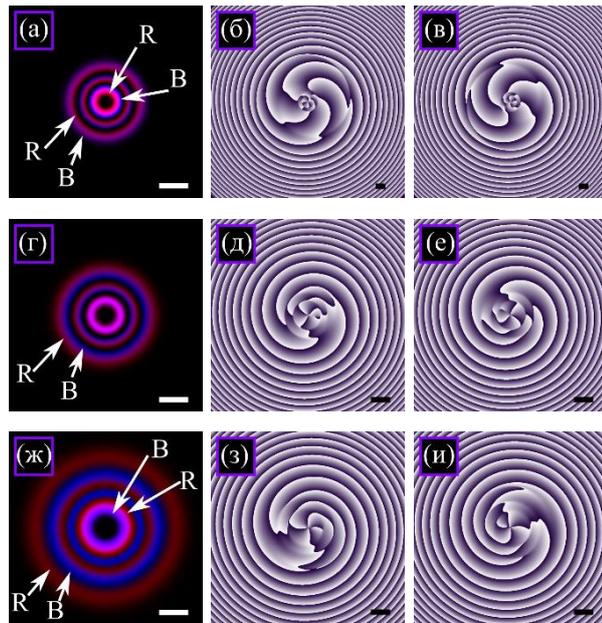


Рис. 1.13 Усреднённые распределения интенсивности (а,г,ж) и мгновенные распределения фазы (б,в,д,е,з,и) суперпозиции двух трёхкольцевых пучков ЛГ разного цвета ( $\lambda_1 = 400$  нм,  $\lambda_2 = 700$  нм) на расстоянии  $z = 0,2$  м (а-в),  $z = 1$  м (г-е),  $z = 2$  м (ж-и) в моменты времени  $t_1 = 60$  с (б,д,з) и  $t_2 = 61$  с (в,е,и). Другие параметры расчёта: радиус перетяжки гауссова пучка  $w = 500$  мкм, ТЗ  $n_1 = 4$  и  $n_2 = 3$ , радиальные индексы  $p_1 = p_2 = 2$ , весовые коэффициенты суперпозиции  $c_1 \approx 0,053$  и  $c_2 \approx 0,129$  (для выравнивания энергии пучков). Масштабная метка на каждом рисунке показывает 1 мм. Тёмный и светлый цвет на распределениях фазы означает соответственно 0 и  $2\pi$ . Символы 'R' и 'B' (а,г,ж) показывают области доминирования соответственно красного и синего пучка

Так как ТЗ синего пучка больше, чем красного, то на небольшом расстоянии радиусы всех трёх колец у синего пучка больше радиусов соответствующих трёх колец красного пучка (рис. 1.13а). Так как красный пучок расходится сильнее, чем синий, на расстоянии примерно 1 м радиусы внутренних (самых ярких) колец выравниваются и получается одно фиолетовое кольцо (рис. 1.13з), в то время как у двух внешних красных колец радиусы уже больше, чем у синих. Далее, на расстоянии около 2 м все три красных кольца становятся внешними по отношению к трём синим кольцам (рис. 1.13ж).

Согласно теории, наличие нескольких колец и их радиусы не влияют на общий топологический заряд всей суперпозиции и, как и на рис. 1.12, он должен быть равен трём ( $TC = 3$ ). Расчёт топологического заряда по формуле М.В. Берри по мгновенным распределениям фазы на рис. 1.13 это подтверждает. Численно получены значения 2,987 (рис. 1.13б), 2,982 (рис. 1.13в), 2,874 (рис. 1.13д,е), 2,907 (рис. 1.13з,и).

### Моделирование трёхцветного вихря

Возникает вопрос, а могут ли аналогично три пучка Лагерра-Гаусса трёх разных цветов быть пространственно разделены в начальной плоскости, затем сложиться в одно кольцо и сформировать оптический вихрь, который выглядит белым или серым (суперпозиция красного, зелёного, и синего пучков), и затем снова разделиться? На расстоянии  $z$  от начальной плоскости радиус кольца максимальной интенсивности каждого из этих трёх вихрей равен

$$r_{\max,s} = w \sqrt{\frac{n_s}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_s}\right)^2}. \quad (1.65)$$

Если эти радиусы примерно равны для всех трёх вихрей, то должно выполняться условие:

$$n_1 \left[ 1 + \left(\frac{z}{z_1}\right)^2 \right] \approx n_2 \left[ 1 + \left(\frac{z}{z_2}\right)^2 \right] \approx n_3 \left[ 1 + \left(\frac{z}{z_3}\right)^2 \right]. \quad (1.66)$$

Отсюда видно, что три вихря не могут сложиться на малых расстояниях ( $z \ll z_1, z_2, z_3$ ), так как в этом случае их топологические заряды должны быть примерно одинаковы и потому в начальной плоскости эти три кольца не могут быть пространственно разделены. Допустим теперь, что пучки складываются в зоне дифракции Френеля и пройденное расстояние равно, например, среднему расстоянию Рэлея трёх пучков. Положим для определённости  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ . Тогда, с учётом одинакового радиуса перетяжки у всех трёх пучков и положив в (1.66)  $z = z_2$ , получим соотношение для топологических зарядов:

$$\frac{n_2}{n_1} \approx \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \right], \quad \frac{n_2}{n_3} \approx \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^2 \right]. \quad (1.67)$$

Допустим, что длины волн интерферирующих пучков равны  $\lambda_1 = 400$  нм,  $\lambda_2 = 550$  нм,  $\lambda_3 = 700$  нм. Тогда  $n_2/n_1 \approx 0,76 \approx 3/4$  и  $n_2/n_3 \approx 1,31 \approx 4/3$ . Например, можно выбрать  $n_1 = 16$ ,  $n_2 = 12$ ,  $n_3 = 9$ . Однако, эти топологические заряды невелики и, согласно (1.65), радиусы колец максимальной интенсивности в начальной плоскости близки друг к другу:  $r_{\max,1} \approx 2,83w$ ,  $r_{\max,2} \approx 2,45w$ ,  $r_{\max,3} \approx 2,12w$ . Учитывая, что толщина каждого кольца сопоставима с радиусом перетяжки  $w$ , эти три кольца в начальной плоскости не разделены. Поэтому для расчёта увеличим порядок каждого пучка в четыре раза:  $n_1 = 64$ ,  $n_2 = 48$ ,  $n_3 = 36$ .

На рис. 1.14 показаны усреднённые распределения интенсивности и мгновенные распределения фазы суперпозиции трёх однокольцевых пучков ЛГ разного цвета ( $\lambda_1 = 400$  нм,  $\lambda_2 = 550$  нм,  $\lambda_3 = 700$  нм) на расстояниях  $z = 0$  м,  $z = z_3/2 \approx 0,56$  м,  $z = z_2 \approx 1,43$  м, и  $z = 2z_3 \approx 3,93$  м в момент времени  $t = 60$  с. Другие параметры расчёта: радиус перетяжки гауссова пучка  $w = 500$  мкм, топологические заряды  $n_1 = 64$ ,  $n_2 = 48$  и  $n_3 = 36$ , радиальные индексы  $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ , весовые коэффициенты суперпозиции  $c_s = 1/(n_s!)^{1/2}$ ,  $s = 1,2,3$  (для выравнивания энергии пучков).

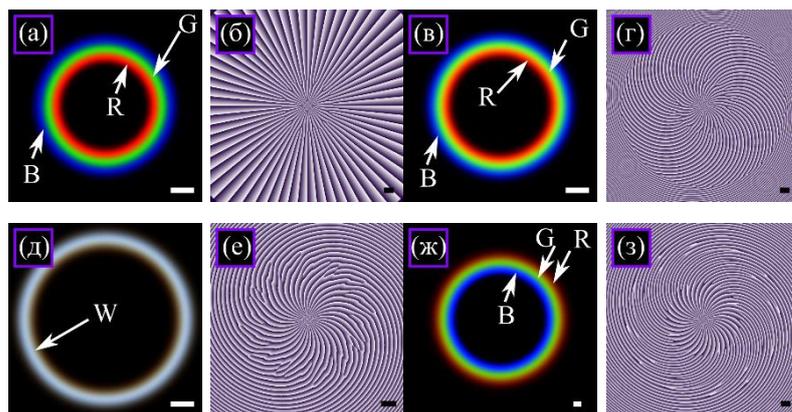


Рис. 1.14 Усреднённые распределения интенсивности (а,в,д,ж) и мгновенные распределения фазы (б,г,е,з) суперпозиции трёх однокольцевых пучков ЛГ разного цвета ( $\lambda_1 = 400$  нм,  $\lambda_2 = 550$  нм,  $\lambda_3 = 700$  нм) на расстоянии  $z = 0$  м (а,б),  $z = z_3/2 \approx 0,56$  м (в,г),  $z = z_2 \approx 1,43$  м (д,е), и  $z = 2z_3 \approx 3,93$  м (ж,з) в момент времени  $t = 60$  с. Другие параметры расчёта: радиус перетяжки гауссова пучка  $w = 500$  мкм, топологические заряды  $n_1 = 64$ ,  $n_2 = 48$  и  $n_3 = 36$ , радиальные индексы  $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ , весовые коэффициенты суперпозиции  $c_s = 1/(n_s!)^{1/2}$ ,  $s = 1,2,3$  (для выравнивания энергии пучков). Масштабная метка на каждом рисунке показывает 1 мм. Тёмный и светлый цвет на распределениях фазы означает соответственно 0 и  $2\pi$ . Символы ‘R’, ‘G’ и ‘B’ (а,в,ж) показывают области доминирования соответственно красного, зелёного, и синего пучка. Символ ‘W’ (д) показывает белое (светло-серое) кольцо, образованное сложением трёх пучков

Так как при заданных параметрах топологический заряд пучков убывает с длиной волны, в начальной плоскости и на небольшом расстоянии от неё красное кольцо находится внутри зелёного, а зелёное – внутри синего (рис. 1.14а,в). Также видно, что из-за расширения пучков при распространении границы между пучками (кольца низкой интенсивности) на рис. 1.14в становятся менее отчётливыми, чем на рис. 1.14а. Так как расходимость пучков увеличивается с длиной волны, красный пучок расходится сильнее всех, а синий – слабее. За счёт подбора топологических зарядов с помощью условия (1.67), на расстоянии Рэлея зелёного пучка ( $z = z_2 \approx 1,43$  м) во всех трёх пучках формируется кольцо одинакового радиуса и потому дифракционная картина выглядит как одно белое

(светло-серое) кольцо (Рис. 1.14д). Далее, за счёт разной расходимости кольца снова разделяются, но уже синее кольцо становится внутренним, а красное – внешним (Рис. 1.14ж).

Согласно теории, общий топологический заряд всей суперпозиции равен топологическому заряду пучка с большей длиной волны. Для выбранных параметров он должен быть равен  $TC = 36$ . При численном расчёте по мгновенным распределениям фазы с рис. 1.14 по формуле М.В. Берри (1.53) вдоль окружности радиуса  $R_1 \approx 9,3$  мм были получены значения 63,944 (рис. 1.14б), 35,847 (рис. 1.14г), 35,775 (рис. 1.14е), 35,934 (рис. 1.14з), то есть расчёт подтверждает теоретическое значение  $TC = 36$  во всех поперечных плоскостях, кроме начальной. В начальной плоскости получено значение  $TC = 64$ , потому что периферийные вихри –1-го порядка находятся за пределами расчётной области, но уже при  $z = z_3/2$  (половина самого меньшего из трёх расстояний Рэлея – для красного пучка) на распределении фазы (Рис. 1.14г) присутствуют 28 вихрей –1-го порядка, поэтому итоговый топологический заряд оказался равен 36 ( $64 - 28$ ).

#### Моделирование трёхцветного вихря с разными сочетаниями цветов световых колец

Во всех рассмотренных случаях (рис. 1.12-1.14) топологический заряд пучков убывал с длиной волны. Поэтому может показаться, что топологический заряд всей суперпозиции равен не топологическому заряду пучка с наибольшей длиной волны, а наименьшему из топологических зарядов. Чтобы подтвердить теоретический вывод, что топологический заряд определяется исключительно длиной волны, рассмотрим всевозможные сочетания трёх цветов и трёх топологических зарядов. Таких сочетаний шесть.

На рис. 1.15 показаны усреднённые распределения интенсивности и мгновенные распределения фазы этих шести различных суперпозиций трёх однокольцевых пучков ЛГ разного цвета ( $\lambda_1 = 400$  нм,  $\lambda_2 = 550$  нм,  $\lambda_3 = 700$  нм) на расстоянии  $z = z_2/2 \approx 0,71$  м в момент времени  $t = 60$  с. Другие параметры расчёта: радиус перетяжки гауссова пучка  $w = 500$  мкм, топологические заряды  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$  и  $n_3 = 4$  (рис. 1.15а,б),  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 4$  и  $n_3 = 2$  (рис. 1.15в,г),  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 1$  и  $n_3 = 4$

(рис. 1.15д,е),  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 4$  и  $n_3 = 1$  (рис. 1.15ж,з),  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 1$  и  $n_3 = 2$  (рис. 1.15и,к),  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 2$  и  $n_3 = 1$  (рис. 1.15л,м), радиальные индексы  $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ , весовые коэффициенты суперпозиции  $c_s = 1/(n_s!)^{1/2}$ ,  $s = 1,2,3$  (для выравнивания энергии пучков).

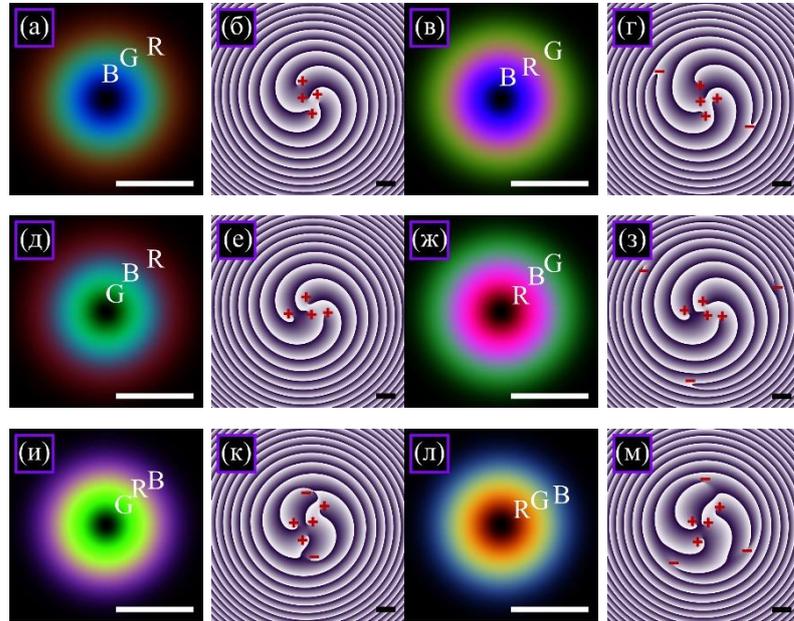


Рис. 1.15 Усреднённые распределения интенсивности (а,в,д,ж,и,л) и мгновенные распределения фазы (б,г,е,з,к,м) шести разных суперпозиций трёх однокольцевых пучков ЛГ разного цвета ( $\lambda_1 = 400$  нм,  $\lambda_2 = 550$  нм,  $\lambda_3 = 700$  нм) на расстоянии  $z = z_2/2 \approx 0,71$  м (половина расстояния Рэлея пучка со средней длиной волны) в момент времени  $t = 60$  с. Другие параметры расчёта: радиус перетяжки гауссова пучка  $w = 500$  мкм, топологические заряды  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$  и  $n_3 = 4$  (а,б),  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 4$  и  $n_3 = 2$  (в,г),  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 1$  и  $n_3 = 4$  (д,е),  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 4$  и  $n_3 = 1$  (ж,з),  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 1$  и  $n_3 = 2$  (и,к),  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 2$  и  $n_3 = 1$  (л,м), радиальные индексы  $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ , весовые коэффициенты суперпозиции  $c_s = 1/(n_s!)^{1/2}$ ,  $s = 1,2,3$  (для выравнивания энергии пучков). Масштабная метка на каждом рисунке показывает 1 мм. Тёмный и светлый цвет на распределениях фазы означает соответственно 0 и  $2\pi$ . Символы ‘R’, ‘G’ и ‘B’ (а,в,д,ж,и,л) показывают области доминирования соответственно красного, зелёного, и синего пучка. Красные символы ‘+’ и ‘-’ на распределениях фазы показывают оптические вихри порядков +1 и -1

Согласно теории [62\*], топологический заряд должен быть равен 4, 2, 1 на тех рисунках, на которых красное кольцо является соответственно внешним (рис. 1.15а,б,д,е), средним (рис. 1.15в,г,и,к), внутренним (рис. 1.15ж,з,л,м). При численном расчёте по мгновенным распределениям фазы с рис. 1.15 по формуле М.В. Берри (1.53) вдоль окружности радиуса  $R_1 \approx 5$  мм были получены значения 3,996 (рис. 1.15а,б,д,е), 1,998 (рис. 1.15в,г,и,к), 0,999 (рис. 1.15ж,з,л,м), то есть расчёт подтверждает соответствующие теоретические значения. Кроме того, топологический заряд на распределениях фазы может быть определён и визуально. На рис. 1.15б,е имеется по четыре оптических вихря порядка +1 и потому топологический заряд равен  $TC = 4$ . На рис. 1.15г,к в дополнение к четырём вихрям порядка +1 имеется два вихря порядка -1, то есть топологический заряд равен  $TC = 2$ . На рис. 1.15з,м таких вихрей порядка -1 уже по три и потому топологический заряд равен  $TC = 1$ .

### Выводы к главе 1

1. Рассчитан топологический заряд (ТЗ) четырехпараметрического семейства вихревых пучков, комплексная амплитуда которых описывается геометрической прогрессией гауссовых оптических вихрей (ОВ). Эта прогрессия может быть либо нарастающей, когда амплитуды составляющих вихрей возрастают, либо затухающей, либо стационарной. Первый и последний члены этой прогрессии равны  $a^k \exp(-(r/w)^2 + ikm\varphi)$  и  $a^n \exp(-(r/w)^2 + inm\varphi)$  соответственно, т. е. знаменатель равен  $a \exp(im\varphi)$ . Исследуемое семейство вихревых пучков описывается тремя целочисленными параметрами ( $k, n, m$ ) и одним вещественным параметром  $a$ . Если  $0 < a < 1$ , то прогрессия является затухающей и ТЗ всей суперпозиции равен ТЗ ее первого члена ( $TC = km, k < n$ ), так как этот член описывает ОВ максимальной мощности в суперпозиции. Если  $a > 1$ , то прогрессия растущая и ее ТЗ равен ТЗ последнего члена ( $TC = nm$ ), так как этот член имеет максимальную мощность в суперпозиции. Наконец, при  $a = 1$

прогрессия стационарна, ее ОУМ-спектр симметричен, а ТЗ всей суперпозиции равен порядку средней угловой гармоники ( $TC = (k + n)m/2$ ). В последнем случае суперпозиция может иметь полуцелое значение ТЗ в начальной плоскости. Однако ТЗ стационарной последовательности ОВ становится целым ( $TC = nm$ ) и не меняется при распространении в свободном пространстве [40\*].

2. Рассмотрена суперпозиция нескольких одинаковых параллельных однокольцевых пучков Лагерра-Гаусса. Как для начальной плоскости, так и для дальней зоны аналитически показано и численно подтверждено, что в случае вещественных весовых коэффициентов суперпозиции (то есть все пучки имеют одинаковую фазу, но могут иметь разную амплитуду), общий топологический заряд суперпозиции равен топологическому заряду каждого отдельного пучка. Также показано, что наличие фазовой задержки между пучками позволяет менять общий топологический заряд суперпозиции. Полученный топологический заряд может использоваться для анализа принимаемого оптического сигнала при передаче информации вихревыми пучками с использованием одновременно и пространственного мультиплексирования, и мультиплексирования по орбитальному угловому моменту [53\*].

3. Рассмотрены разные варианты осевой когерентной суперпозиции пучков Лагерра-Гаусса с разными длинами волн. По известной формуле Берри рассчитан топологический заряд осевой суперпозиции двух пучков Лагерра-Гаусса разных «цветов», у каждого из которых своя длина волны и разный ТЗ. Оказалось, что ТЗ такой суперпозиции равен ТЗ пучка ЛГ с большей длиной волны, независимо от величины весового коэффициента этого пучка в суперпозиции и от величины его ТЗ. Этот расчет ТЗ можно обобщить на суперпозицию произвольного конечного числа пучков ЛГ с разными длинами волн, как однокольцевых, так и многокольцевых. При этом ТЗ всей суперпозиции будет равен ТЗ того пучка ЛГ, у которого длина волны больше. Этот результат подтвержден численно для суперпозиции из 3х пучков и для суперпозиции трехкольцевых пучков. Из-за того, что фазовые скорости пучков разные, распределение интенсивности в сечении пучка будет меняться со скоростью пропорциональной разности

максимальной и минимальной длин волн. При этом мгновенный ТЗ такой суперпозиции сохраняется, а распределение интенсивности (усредненное по времени) «цветного» оптического вихря меняет свою световую «гамму». Например, для двухцветной суперпозиции, если в ближней зоне с ростом радиуса цвета световых колец (радуга) меняются согласно их ТЗ в суперпозиции от меньшего к большему, то при распространении в пространстве (в дальней зоне) с ростом радиуса цвета колец в радуге располагаются в обратном порядке от большего ТЗ к меньшему. Показано также, что специальным подбором длин волн (синего, зеленого и красного) в трехцветной композиции однокольцевых пучков ЛГ можно получить на некотором расстоянии усредненное по времени световое кольцо белого цвета [62\*].

## ГЛАВА 2. СУПЕРПОЗИЦИИ ПУЧКОВ ЛАГЕРРА-ГАУССА И БЕССЕЛЯ-ГАУССА

### 2.1 Квадратные и двойные пучки Лагерра-Гаусса

#### *Фурье-инвариантный пучок Лагерра-Гаусса в квадрате*

В этом разделе показано, что вихревой пучок Лагерра-Гаусса (ЛГ) «в квадрате» является Фурье-инвариантным и сохраняет свою структуру в фокусе сферической линзы. В зоне дифракции Френеля такой пучок преобразуется в суперпозиции обычных пучков ЛГ, число которых равно числу колец у пучка ЛГ «в квадрате». Если кольцо всего одно, то пучок является структурно-стабильным. Также рассмотрен более общий пучок, являющийся «произведением» двух пучков ЛГ. Такой пучок будет Фурье-инвариантным, если число колец у двух пучков ЛГ в «произведении» одинаковое. Рассмотренные пучки дополняют хорошо известный базис пучков ЛГ, которые интенсивно изучаются в связи с их устойчивостью при распространении в турбулентности.

В настоящее время большое количество публикаций посвящено оптическим вихрям [63-65], способам их формирования [66-72] и широкому спектру прикладных задач, где они применяются [28-29,73-78]. Одно из важных направлений исследований - это поиск новых типов пучков, обладающих определенными свойствами [79-86]. Так, например, в работе [79] авторы предложили новый тип неканонического оптического вихря, названный «фазовым вихрем экспоненциального порядка», экспериментально продемонстрировали спиральную фокусировку автофокусирующихся пучков Эйри, несущих данный вихрь, и теоретически проанализировали потоки энергии и орбитальный угловой момент. Новый класс источников, обладающих свойствами структурированной когерентности, полученный путём некогерентной суперпозиции когерентных мод Лагерра-Гаусса, предложены и исследованы в [80]. В работе [81] авторами рассматривается векторный пучок Лиссажу двойного порядка  $(p, q)$ , поперечные компоненты которого имеют угловое соотношение, соответствующее кривым Лиссажу. В статье проведен теоретический и численный анализ этих пучков,

показавший, что соотношение и четность порядков  $(p, q)$  влияют на свойства различных компонент электромагнитного поля. В [82] был предложен новый тип спирально-конического оптического пучка с экспоненциальной мощностью. Авторы теоретически и экспериментально исследовали интенсивность таких пучков в фокусе и продемонстрировали их применимость для оптического захвата. В нашей работе [83] предложен новый вид пучков Бесселя, обладающих свойством Фурье-инвариантности и поэтому названных пучками Фурье–Бесселя. Данные пучки, в отличие от известных пучков Бесселя, имеют слабые боковые лепестки, а по сравнению с модами Лагерра–Гаусса с нулевым радиальным индексом - меньшее внутреннее темное пятно. При этом пучки Фурье–Бесселя обладают конечной энергией, хотя у них нет Гауссовой огибающей. В [86] рассматривается интересный вид пучков - "фотонные крючки", возникающих за счет дисперсии фазовой скорости волн внутри, например, составной частицы, и последующей интерференции. Такие пучки имеют самый маленький радиус кривизны фотонного луча из когда-либо зарегистрированных, который примерно в два раза меньше длины волны электромагнитной волны. В [87] нами были рассмотрены синусоидальные Гауссовы пучки с единичным топологическим зарядом. Этот пучок относится к типу элегантных лазерных пучков, так как, и в начальной плоскости, и в зоне дифракции Френеля описывается одной и той же функцией с комплексным аргументом. Было показано, что диаметр первого светового кольца у синусоидального Гауссова пучка почти не зависит от радиуса перетяжки Гауссова пучка.

Несмотря на все вышеперечисленное обилие различных подходов для создания и описания новых типов пучков, не теряют свою актуальность и хорошо всем известные пучки Лагерра-Гаусса (ЛГ) [88-93]. В работах [88-90] рассмотрены различные варианты генерации данных мод с использованием специального лазера, использующего усиленную внутрирезонаторную сферическую абберацию [88],  $q$ -пластинки [89] или специальной метаповерхности [90]. В работе [91] обсуждается взаимное преобразование между модами Эрмита-Гаусса (ЭГ) и модами ЛГ. Важное значение имеют исследования элегантных пучков ЛГ, демонстрирующих

исключительные характеристики во многих областях, таких как оптическая связь и оптический захват. Так, например, в работе [93], авторы предложили метод измерения топологического заряда частично когерентного элегантного пучка ЛГ.

На базе мод ЛГ разрабатываются новые типы оптических пучков, обладающих различными полезными свойствами. Так, например, в одной из своих работ, авторы этой статьи предложили семейство асимметричных лазерных пучков ЛГ [94], а в работе [95] другая научная группа представила метод генерации таких пучков высокой мощности. Авторы работы [96], используя моды ЛГ, продемонстрировали возможность генерации векторного пучка с пространственно-зависимой поляризацией в поперечном сечении, посредством нелинейного магнитооптического вращения. Новый класс составных вихревых пучков, получаемый путем коаксиального наложения пучков ЛГ с одинаковыми параметрами (расстояние и радиус) перетяжки был представлен в [97]. В [98] был теоретически и экспериментально исследован новый тип частично когерентного пучка с нетрадиционной корреляционной функцией, названной эллиптической коррелированной моделью Лагерра-Гаусса Шелла (МЛГШ). Интенсивность таких пучков в дальнем поле (или в фокальной плоскости) имеет эллиптический кольцеобразный профиль. Стоит отметить, что пучки ЛГ и подобные им имеют высокую практическую значимость для оптических коммуникаций [99-101], микро-манипулирования [102] и фото-возбуждения атомов [103].

В данном разделе, рассмотрен новый тип оптических пучков, амплитуда которых пропорциональна многочлену Лагерра в квадрате. Эти пучки расширяют базис мод ЛГ. Было проведено их теоретическое и численное исследование, показана их Фурье-инвариантность.

#### Теоретическое основание

Рассмотрим пучок Лагерра-Гаусса (ЛГ), комплексная амплитуда которого в начальной плоскости ( $z = 0$ ) имеет вид [104]:

$$E_{n,m}(r, \varphi) = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2w^2} + in\varphi\right) \left(\frac{r}{w}\right)^{|n|} L_m^n\left(\frac{r^2}{w^2}\right), \quad (2.1)$$

где  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты,  $w$  – радиус перетяжки гауссова пучка,  $L_m^n$  – обобщённый многочлен Лагерра ( $n$  – целочисленный азимутальный индекс, а  $m \geq 0$  – целочисленный неотрицательный радиальный индекс). Так как пучок (2.1) является модовым пучком, то есть при распространении в свободном пространстве сохраняет свою структуру, то комплексная амплитуда пучка ЛГ на любой плоскости  $z$  описывается выражением подобным (2.1):

$$E_{n,m}(r, \varphi) = E_0 \frac{w}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{2w^2(z)} + \frac{ikr^2}{2R(z)} + in\varphi\right) \left(\frac{r}{w(z)}\right)^{|n|} \times L_m^{|n|}\left(\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp(i(n+2m+1)\xi(z)), \quad (2.2)$$

где

$$w(z) = w \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}, \quad R(z) = z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right), \\ \xi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad z_0 = \frac{kw^2}{2}, \quad E_0 = \sqrt{\frac{2m!}{\pi(n+m)!}}, \quad (2.3)$$

$w(z)$  – радиус гауссова пучка,  $R(z)$  – радиус кривизны волнового фронта гауссова пучка,  $\xi(z)$  – фаза Гоу,  $z_0$  – длина Рэлея,  $E_0$  – нормировочная константа,  $k$  – волновое число света.

Рассмотрим теперь пучок, который мы назвали пучком ЛГ в квадрате  $(\text{ЛГ})^2$ , и комплексная амплитуда, которого в начальной плоскости имеет вид:

$$E_{2,n,m}(r, \varphi) = E_2 \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + i2n\varphi\right) \left(\frac{r}{w}\right)^{2|n|} \left[L_m^{|n|}\left(\frac{r^2}{w^2}\right)\right]^2, \quad (2.4)$$

где  $E_2$  – постоянная. Пучок (2.4) уже не будет модовым пучком, и не будет сохранять свою структуру в зоне дифракции Френеля, но он будет сохранять свой вид в дальней зоне. То есть пучок  $(\text{ЛГ})^2$  будет Фурье-инвариантным, и его комплексная амплитуда в фокусе идеальной сферической линзы с фокусным расстоянием  $f$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
E_{2n,m}(\rho, \theta) &= \frac{-iz_0}{f} E_2(-1)^n \exp(2in\theta) \times \\
&\int_0^\infty x^n \exp(-x) \left[ L_m^{|n|}(x) \right]^2 J_{2n}(y\sqrt{x}) dx = \\
&\frac{-iz_0}{f} E_2(-1)^n \exp\left(2in\theta - \frac{y^2}{4}\right) \left(\frac{y}{2}\right)^{2|n|} \left[ L_m^{|n|}\left(\frac{y^2}{4}\right) \right]^2,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где  $x = (r/w)^2$ ,  $y = kw\rho/f$ ,  $(\rho, \theta)$  – полярные координаты в Фурье-плоскости. При получении (2.5) использовался справочный интеграл из [61]. Сравнивая комплексные амплитуды в начальной плоскости (2.4) и в фокусе сферической линзы (2.5), видно, что они совпадают с точностью до постоянной. В зоне дифракции Френеля пучок (ЛГ)<sup>2</sup> будет представлять собой конечную суперпозицию обычных пучков ЛГ, так как комплексная амплитуда пучка (2.4) при любом  $z$  вычисляется с помощью преобразования Френеля и равна:

$$\begin{aligned}
E_{2n,m}(\rho, \theta, z) &= \frac{-iz_0}{z} (-1)^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + 2in\theta\right) \times \\
&\int_0^\infty x^n \exp(-px) \left[ L_m^{|n|}(x) \right]^2 J_{2n}(y\sqrt{x}) dx = \\
&\frac{-iz_0}{z} (-1)^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + 2in\theta\right) \left(\frac{y}{2}\right)^{2|n|} \frac{\Gamma(|n|+m+1)}{\pi m! p^{2n+1}} \times \\
&\exp\left(-\frac{y^2}{4p}\right) \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^s}{(m-s)!} \frac{\Gamma(m-s+1)\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(|n|+s+1)} \times \\
&\left(\frac{p-2}{2}\right)^{2s} L_{2s}^{2|n|}\left(\frac{y^2}{2p(2-p)}\right),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где  $x = (r/w)^2$ ,  $y = kw\rho/z$ ,  $p = 1 - iz_0/z$ ,  $\Gamma(x)$  – гамма-функция. При получении (2.6) использовался справочный интеграл из [61]. В сумме (2.6) столько слагаемых, сколько колец у пучка ЛГ (2.1). Из (2.6) следует, что при  $m = 0$  (радиальный индекс пучка нулевой), когда пучок ЛГ имеет одно кольцо, так как  $L_0^n(x) = 1$ , то сумма в (2.6) сводится к одному первому слагаемому и пучок (2.1), амплитуда которого возведена в квадрат, сохраняется при распространении. Это

следует также из общего выражения для комплексной амплитуды структурно-стабильных пучков [105]:

$$E(x, y) = \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw^2}\right) f\left(\frac{x \pm iy}{qw}\right), \quad (2.7)$$

где  $q = 1 + iz/z_0$ ,  $w$  – радиус перетяжки гауссова пучка,  $f(x)$  – любая аналитическая целая функция конечного роста.

Вместо пучка (2.4) можно рассмотреть более общий Фурье-инвариантный пучок, который представляет собой произведение двух пучков ЛГ (ПЛГ). Комплексная амплитуда ПЛГ-пучка равна:

$$E_{p,q}^{n,m}(r, \varphi) = E_3 \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + i2n\varphi\right) \left(\frac{r}{w}\right)^{2n} L_p^{n-m}\left(\frac{r^2}{w^2}\right) L_q^{n+m}\left(\frac{r^2}{w^2}\right), \quad n > m > 0. \quad (2.8)$$

В фокусе сферической линзы ПЛГ-пучок (2.8) будет сохранять свою структуру, если  $p = q$ :

$$\begin{aligned} E_{p,q}^{n,m}(\rho, \theta) &= \frac{-iz_0}{f} E_3 (-1)^n \exp(2in\theta) \times \\ &\int_0^\infty x^n \exp(-x) L_p^{n-m}(x) L_q^{n+m}(x) J_{2n}(y\sqrt{x}) dx = \\ &\frac{-iz_0}{f} E_3 (-1)^n \exp\left(2in\varphi - \frac{y^2}{4}\right) \left(\frac{y}{2}\right)^{2n} L_p^{n-m+p-q}\left(\frac{y^2}{4}\right) L_q^{n+m-p+q}\left(\frac{y^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

При получении (2.9) использовался справочный интеграл из [2]. Из (2.8) и (2.9) видно, что при  $p = q$  и  $m = 0$  ПЛГ пучок переходит в  $(\text{ЛГ})^2$  пучок.

### Численное моделирование

Нами было проведено численное моделирование фокусировки пучков  $(\text{ЛГ})^2$  сферической линзой с помощью авторских скриптов на языке MATLAB. Начальное поле представлялось в виде:

$$E_{2,n,m}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + i2n\varphi\right) \left(\frac{r}{w}\right)^{2|n|} \left[L_m^{|n|}\left(\frac{r^2}{w^2}\right)\right]^2 \quad (2.10)$$

На рис. 2.1 представлено исходное распределение интенсивности и фазы для  $(\text{ЛГ})^2$  со следующими параметрами:  $\lambda = 532$  нм,  $w = 0,5$  мм,  $n = 3$ ,  $m = 2$ .

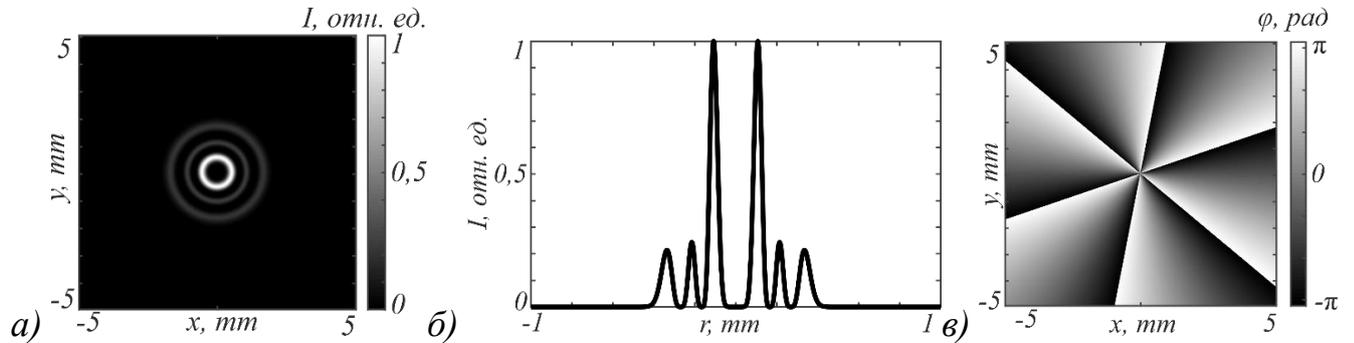


Рис. 2.1 Исходный пучок  $(\text{ЛГ})^2$ : 2D распределение интенсивности (а); сечение интенсивности вдоль радиуса (б); 2D распределение фазы (в)

Фокусировка сферической линзой эквивалентна преобразованию Фурье. Результаты моделирования для пучка  $(\text{ЛГ})^2$  в фокусе показаны на рис. 2.2.

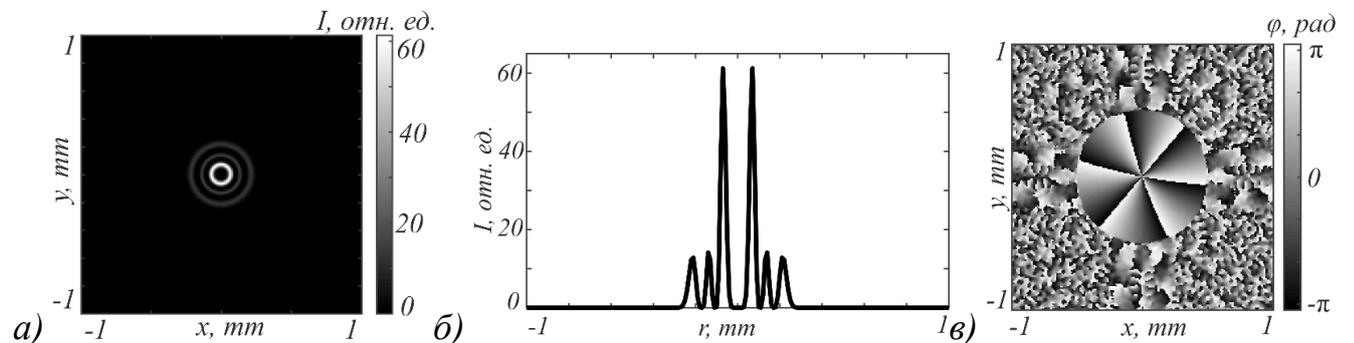


Рис. 2.2 Поле в фокусе сферической линзы при прохождении через нее исходного пучка  $(\text{ЛГ})^2$ : 2D распределение интенсивности (а); сечение интенсивности вдоль радиуса (б); 2D распределение фазы (в)

Рис. 2.1 и 2.2 отличаются только на постоянную и наглядно демонстрируют доказанную в первом разделе, Фурье-инвариантность пучков  $(\text{ЛГ})^2$ . Рябь на рис. 2.2в вызвана погрешностями, возникающими при численном вычислении преобразования Фурье. В периферийных областях интенсивность близка к нулю и потому даже небольшие ошибки приводят к изменению фазы на  $\pi$ .

Теперь рассмотрим дифракцию Френеля, которая представляется следующим интегралом:

$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \iint_{-\infty}^{+\infty} E(x', y', 0) \times \exp\left(\frac{ik}{2z} \left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 \right]\right) dx' dy'. \quad (2.10)$$

Для его численного расчета были использованы теорема о свертке и свойства преобразования Фурье, которые позволяют вычислить указанный интеграл через комбинацию прямых и обратного преобразований Фурье. Программа для расчета была также реализована на языке MATLAB.

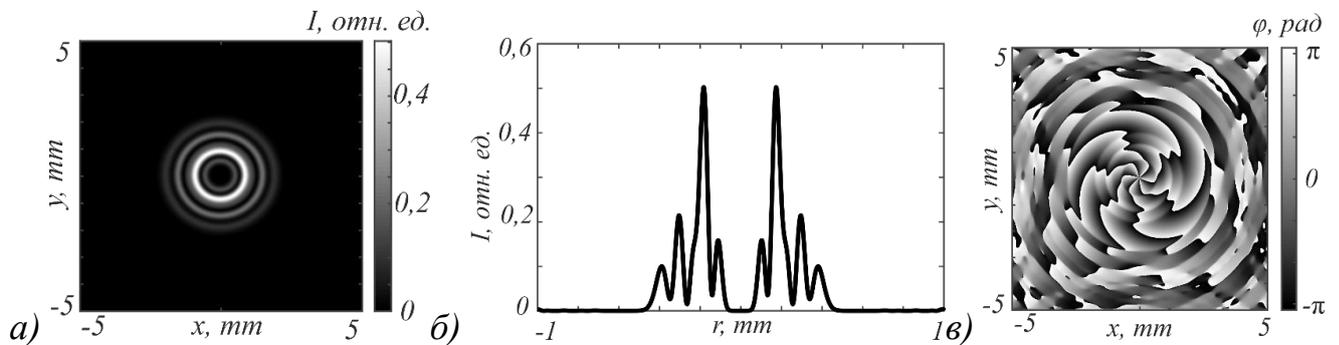


Рис. 2.3 Поле исходного пучка  $(\text{ЛГ})^2$  на расстоянии  $z = z_0/2$  ( $z_0 \approx 1,476$  м): 2D распределение интенсивности (а); сечение интенсивности вдоль радиуса (б); 2D распределение фазы (в)

На рис. 2.3 показаны интенсивность (а), ее сечение (б) и фаза (в) пучка  $(\text{ЛГ})^2$ , показанного на рис. 2.1, но на расстоянии половины длины Рэлея. Из рис. 2.3 видно, что вместо трех колец интенсивности (рис. 2.1) у пучка добавляется четвертое кольцо интенсивности. И, при этом, яркое кольцо уже не первое (рис. 2.1), а второе.

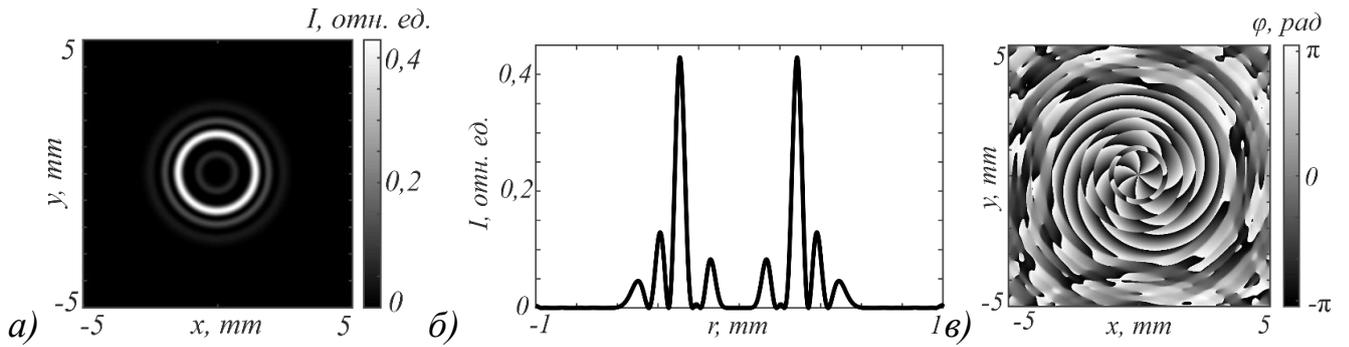


Рис. 2.4 Поле исходного пучка  $(\text{ЛГ})^2$  на расстоянии  $z = z_0$  ( $z_0 \approx 1,476$  м): 2D распределение интенсивности (а); сечение интенсивности вдоль радиуса (б); 2D распределение фазы (в)

На рис. 2.4 показаны интенсивность (а), ее сечение (б) и фаза (в) того же пучка (рис. 2.2), но на расстоянии Рэлея. Из рис. 2.4 видно, что пучок имеет 4 светлых кольца, но распределение энергии между ними отличается от распределения энергии на рис. 2.3

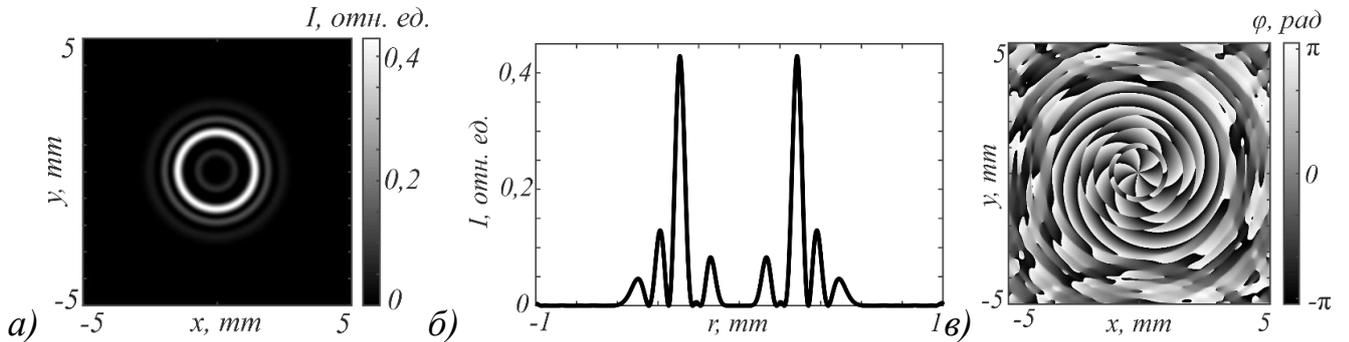


Рис. 2.5 Поле исходного пучка  $(\text{ЛГ})^2$  на расстоянии  $z = 2z_0$  ( $z_0 \approx 1,476$  м): 2D распределение интенсивности (а); сечение интенсивности вдоль радиуса (б); 2D распределение фазы (в)

На рис. 2.5 показано то же самое, что и на рис. 2.3 и 2.4, но на расстоянии двух длин Рэлея. В картине интенсивности по-прежнему 4 кольца.

На рис. 2.6 показаны вместе распределения интенсивности того же пучка, что и на рис. 2.1-2.5. Из рис. 2.6 видно, что на расстоянии 10 длин Рэлея (начало дальней зоны дифракции) в сечении пучка опять остаются 3 светлых кольца, и самое яркое кольцо будет первым от центра кольцом. А на расстоянии 15 длин

Рэлея распределение интенсивности совпадает с начальным распределением интенсивности, отличаясь только по масштабу. Таким образом, моделирование подтвердило все теоретические предсказания.

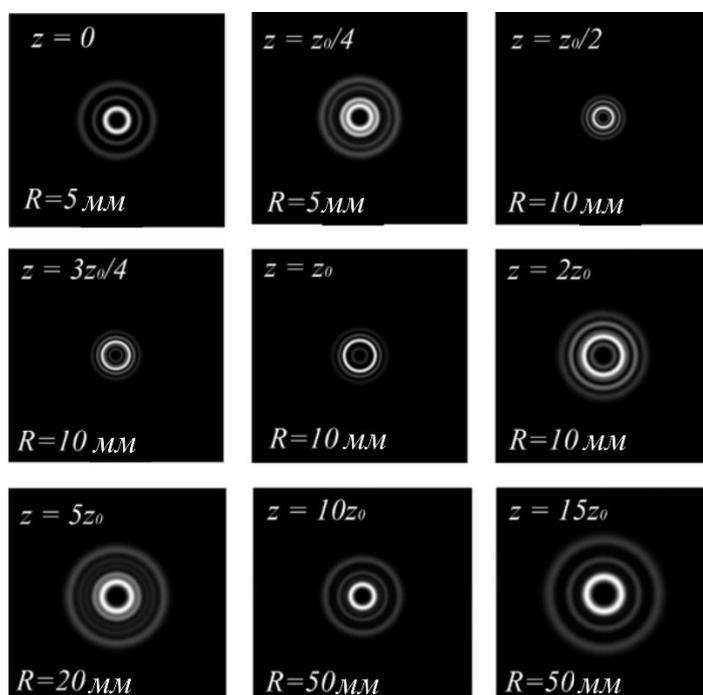


Рис. 2.6 Распределения интенсивности пучка  $(\text{ЛГ})^2$  при  $\lambda = 532 \text{ nm}$ ,  $w = 0.5 \text{ mm}$  ( $z_0 \approx 1,476 \text{ m}$ ),  $n = 3$ ,  $m = 2$  на расстоянии  $z$  в квадратной подобласти шириной  $2R$ . Квадратные и двойные пучки Лагерра-Гаусса исследовались в [106\*-108\*].

## 2.2 Пучки Лагерра-Гаусса с увеличенной темной областью и автофокусировкой

В этом разделе предложен и исследуется новый пучок Лагерра-Гаусса (ЛГ), отличный от обычных модальных ЛГ-пучков, которые сохраняют поперечную структуру интенсивности (в масштабе) при распространении. Предлагаемый пучок не сохраняет свою структуру при распространении в свободном пространстве, но обладает некоторыми интересными свойствами. Этот пучок является фурье-инвариантным и имеет увеличенную темную область как в начальной плоскости перетяжки, так и в дальней зоне. Таким образом, изменение

радиального (нижнего) индекса связанного полинома Лагерра без изменения топологического заряда пучка позволяет увеличивать или уменьшать эффективный диаметр центрального темного пятна на картине интенсивности. Кроме того, пучок является автофокусирующимся, т. е. распределение интенсивности на рэлеевском расстоянии от перетяжки имеет форму светового кольца (при любом значении радиального индекса) с минимальным диаметром и максимальной интенсивностью на кольце. Такой пучок можно использовать для манипуляций с микрочастицами без использования дополнительной сферической линзы для его фокусировки.

Вихревые пучки Лагерра-Гаусса (ЛГ) на протяжении многих лет вызывают устойчивый интерес в связи с их широкими практическими применениями в оптической радиосвязи [109], беспроводной связи [110], зондировании атмосферы [111], квантовой информатике [96], охлаждении атомов [112], оптической микроскопии одиночных молекул [113] и квантовых точек [114]. Кроме того, пучки ЛГ очень хорошо изучены теоретически. Например, возможность орбитального углового момента (ОУМ) света была впервые показана именно для пучков ЛГ [24]. Известно много модификаций пучков ЛГ, таких как, например, элегантные пучки ЛГ [115], пучки Эрмита-Лагерра-Гаусса [116], асимметричные пучки ЛГ [94], произведения пучков ЛГ [106\*]. Пучки ЛГ могут генерироваться лазерами [88, 117-119], преобразователями мод [120] и с помощью пространственного модулятора света [121]. Однако, несмотря на долгую историю пучков ЛГ, их потенциал до сих пор не исчерпан.

В данном разделе исследуется новый ЛГ-пучок, топологический заряд которого равен разности между азимутальным (верхним) и радиальным (нижним) индексами ассоциированного полинома Лагерра, а радиальная полярная координата возведена в степень, равную сумме этих показателей. Таким образом, в отличие от обычных пучков ЛГ топологический заряд исследуемого пучка не равен степени радиальной координаты. С одной стороны, это нарушает модовое распространение (формоинвариантность) такого луча в свободном пространстве. С другой стороны, обсуждаемый пучок демонстрирует интересные свойства:

автофокусировку и возможность управления диаметром центрального темного пятна интенсивности без изменения топологического заряда луча.

### *Пучки Лагерра-Гаусса с увеличенной областью темного*

Здесь мы рассматриваем когерентное параксиальное монохроматическое световое поле со следующей комплексной амплитудой в начальной плоскости ( $z = 0$ ):

$$E_{n,m}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + i(m-n)\varphi\right) \left(\frac{r}{w}\right)^{m+n} L_n^m\left(\frac{r^2}{w^2}\right), \quad (2.11)$$

где  $(r, \varphi)$  — полярные координаты,  $w$  — радиус перетяжки гауссова луча, — связанный полином Лагерра. Рассмотрим стандартные моды ЛГ

$$\text{LG}_{p,\pm\ell}(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} \pm i\ell\varphi\right) \left(\frac{r}{w}\right)^\ell L_p^\ell\left(\frac{2r^2}{w^2}\right), \quad (2.12)$$

пучок (2.11) можно записать в виде произведения двух из них:

$$E_{n,m}(\mathbf{r}) = 2^{(n+m)/2} \text{LG}_{n,m}\left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{2}}\right) \text{LG}_{0,-n}\left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{2}}\right). \quad (2.13)$$

Структура его световых колец не сохраняется при распространении пучка в свободном пространстве. Однако, как мы увидим позже, пучок из уравнения (2.11) имеет некоторые интересные свойства, полезные на практике: (i) луч из уравнения (2.11) является фурье-инвариантным, (ii) также автофокусируется на рэлеевском расстоянии от перетяжки и (iii) имеет увеличенную темную область вблизи оптической оси, т.е. диаметр центрального темного пятна интенсивности можно настраивать (увеличивает) без изменения топологического заряда.

Из уравнения (2.11) следует, что топологический заряд оптического вихря равен  $m - n$ , а орбитальный угловой момент пучка (2.11), отнесенный к мощности пучка, также равен  $m - n$ . Изначально пучок имеет  $n+1$  световых колец. Однако, поскольку пучок (2.11) не сохраняет свою структуру при распространении, количество колец может измениться. Таким образом,  $n + 1$  — максимальное количество колец пучка (2.11). Дифференцируя интенсивность поля (2.11) по  $r$  и

приравнивая производную нулю, находим максимумы интенсивности (минимумы, очевидно, являются нулями пучка (2.11)):

$$\left(s - \frac{1}{2}[m+n]\right)L_n^m(s) + sL_{n-1}^{m+1}(s) = 0, \quad (2.14)$$

где  $s = (r/w)^2$ . Уравнение (2.14) является алгебраическим уравнением  $(n+1)$ -го порядка и может быть решено аналитически только при малых значениях  $n$ . Например, поскольку при  $n=1$  многочлен Лагерра равен  $L_1^m(y) = -y + (m+1)$ , уравнение (2.14) позволяет получить радиус первого светового кольца:  $r \sim w\sqrt{m/2}$ . В общем случае радиус первого светового кольца зависит от радиального индекса  $n$ , как следует из уравнения (2.14). Ниже мы рассмотрим частный случай уравнения (2.11), когда топологический заряд пучка неотрицательный. Заменяя  $m = n + \ell$ , пучок (2.11) можно переписать следующим образом:

$$E_{n,n+\ell}(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + i\ell\varphi\right)\left(\frac{r}{w}\right)^{2n+\ell} L_n^{n+\ell}\left(\frac{r^2}{w^2}\right), \quad (2.15)$$

где  $\ell \geq 0$ . Уравнение (2.15) показывает, что без изменения топологического заряда ( $\ell = \text{const}$ ) можно изменить эффективный диаметр темной области вблизи оптической оси, варьируя только индекс  $n$ . При увеличении  $n$  темная область низкой интенсивности вблизи оптической оси становится больше, а при уменьшении  $n$  эта область уменьшается.

Пучок (2.11) не сохраняет форму интенсивности при распространении в зоне дифракции Френеля, однако, у него есть инвариантный образ Фурье, а именно:

$$\begin{aligned} & \frac{-iz_0}{\pi z} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{iz_0}{z} \cdot \left|\frac{\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}}{w}\right|^2 - \frac{iz_0}{f} \cdot \left|\frac{\boldsymbol{\rho}}{w}\right|^2\right) E_{n,m}(\boldsymbol{\rho}) \frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{w^2} \Bigg|_{z=f} \\ &= \frac{-iz_0}{\pi f} \exp\left(\frac{iz_0}{f} \cdot \left|\frac{\mathbf{r}}{w}\right|^2\right) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{2iz_0}{f} \cdot \frac{\langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho} \rangle}{w^2}\right) E_{n,m}(\boldsymbol{\rho}) \frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{w^2} \\ &= (-i)^{m-n+1} \cdot \frac{z_0}{f} \exp\left(\frac{iz_0}{f} \cdot \left|\frac{\mathbf{r}}{w}\right|^2\right) E_{n,m}\left(\frac{z_0}{f} \mathbf{r}\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $z_0 = kw^2/2$  – расстояние Рэлея,  $\mathbf{p} = (\xi, \eta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$  – двумерный вектор,  $f$  – фокусное расстояние сферической линзы, выполняющей преобразование Фурье. Как видно из уравнения (2.16), комплексная амплитуда светового поля в фокусе линзы равна амплитуде светового поля (2.11) с точностью до масштаба и постоянного множителя.

### ***Преобразование Френеля пучка Лагерра-Гаусса с увеличенной областью темного***

Для оценки преобразования Френеля исходного светового поля (2.13) применим разложение:

$$r^{2n} L_p^{n+l}(r^2) L_q^n(r^2) = \sum_{k=0}^{p+q+n} C_k L_k^l(2r^2), \quad (2.17)$$

которое можно переписать через моды ЛГ:

$$\exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + i\ell\varphi\right) \left(\frac{r}{w}\right)^{2n+\ell} L_p^{n+\ell}\left(\frac{r^2}{w^2}\right) L_q^n\left(\frac{r^2}{w^2}\right) = \sum_{k=0}^{p+q+n} C_k \text{LG}_{k,\ell}(\mathbf{r}). \quad (2.18)$$

Коэффициенты следующие:

$$C_k = \frac{(p+n+\ell)!k!}{2^{p+q+n+\ell+1} p!(k+\ell)!} \cdot [u^k] \left\{ (1-u)^{q+n} (1+u)^p \right\} \cdot [v^q] \left\{ (1-v)^{k+\ell} (1+v)^{p+q+n-k} \right\} \quad (2.19)$$

Здесь мы используем обозначения, предложенные в [122]. А именно, если  $A(t)$  есть какой-либо степенной ряд  $\sum_k a_k t^k$ , то  $[t^k] A(t)$  обозначает коэффициент  $t^k$  при  $A(t)$ . В результате оба  $[\bullet]$  выражения в уравнении (2.19) являются целыми числами и могут быть записаны в терминах многочленов Якоби:

$$[t^n] \left\{ (1-t)^a (1+t)^b \right\} = (-2)^n P_n^{(a-n, b-n)}(0) = \sum_{j=\max(0, n-b)}^{\min(n, a)} (-1)^j \binom{a}{j} \binom{b}{n-j}. \quad (2.20)$$

Подставив  $p = n$  и  $q = 0$  в уравнение (2.19), получим разложение пучка (2.13) на основе мод ЛГ:

$$E_{n, n+\ell}(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{2n} C_k \text{LG}_{k,\ell}(\mathbf{r}) \quad (2.21)$$

$$C_k = C_k(n, 0, n, \ell) = \frac{(2n + \ell)! k!}{2^{2n + \ell + 1} n! (k + \ell)!} \cdot [u^k] (1 - u^2)^n. \quad (2.22)$$

Так как  $[u^k] (1 - u^2)^n = 0$  при нечетных значениях  $k$  разложение (2.22) имеет только четные члены:

$$E_{n, n + \ell}(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^n C_{2k} \text{LG}_{2k, \ell}(\mathbf{r}), \quad C_{2k} = \frac{(2n + \ell)! (2k)!}{2^{2n + \ell + 1} n! (2k + \ell)!} \cdot (-1)^k \binom{n}{k}. \quad (2.23)$$

Согласно уравнению (2.23), световое поле (2.11) представляет собой суперпозицию конечного числа обычных пучков ЛГ. Поэтому комплексную амплитуду светового поля (2.13) можно получить при произвольном расстоянии распространения  $z$  от исходной плоскости. Поскольку

$$\text{LG}_{p, \pm \ell}(\mathbf{r}, z) = \frac{w}{w(z)} \exp\left(\frac{izr^2}{z_0 w^2(z)} + i(2p + \ell + 1)\psi(z)\right) \text{LG}_{p, \pm \ell}\left(\frac{w\mathbf{r}}{w(z)}\right), \quad (2.24)$$

то

$$\begin{aligned} E_{n, n + \ell}(\mathbf{r}, z) &= \sum_{k=0}^n C_{2k} \text{LG}_{2k, \ell}(\mathbf{r}, z) \\ &= \frac{w}{w(z)} \exp\left(\frac{izr^2}{z_0 w^2(z)}\right) \sum_{k=0}^n e^{i(4k + \ell + 1)\psi(z)} C_{2k} \text{LG}_{2k, \ell}\left(\frac{w\mathbf{r}}{w(z)}\right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где  $w(z) = w\left(1 + z^2/z_0^2\right)^{1/2}$  – радиус гауссова пучка на расстоянии  $z$ ,  $z_0 = kw^2/2$  – расстояние Рэлея,  $k$  – волновое число света,  $\psi(z) = \arctan(z/z_0)$  – фаза Гоу.

Если мы переделаем уравнение (2.25) и выпишем из суммы все  $s$ -независимые множители, то оставшаяся сумма будет равна:

$$\sum_{s=0}^{2n} C_s \exp(2is\psi(z)) L_s^l\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right). \quad (2.26)$$

При  $z = 0$  фаза Гоу в уравнении (2.26) равна нулю, а комплексная амплитуда (2.25) совпадает с начальной амплитудой (2.25). В дальнем поле, когда  $z \gg z_0$ , фаза Гоу равна  $\pi/2$ , а показатели степени в уравнении (2.26) становятся равными  $(-1)^s = 1$ , так как  $s = 2r$ . Таким образом, суммы (2.25) совпадают при  $z = 0$  и при  $z \gg z_0$ . Это еще раз доказывает, что световое поле из уравнения (2.11) в дальнем

поле совпадает с полем в перетяжке. При  $z = z_0$  фаза Гоу  $\psi(z)$  равна  $\pi/4$ , а показатели степени в уравнении (2.26) равны  $\exp(i2s\psi(z_0)) = i^s$ , или, поскольку в уравнении отличны от нуля только члены с четным  $s$  (2.26),  $i^s = (-1)^{r/2}$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots, n$ . Таким образом, все слагаемые в сумме вещественные и знакопеременные.

Как видно в уравнении (2.11) радиальный (нижний) индекс полинома Лагерра равен  $n$ , поэтому полином Лагерра также имеет  $n$  корней и пучок ЛГ из уравнения (2.11) имеет  $n + 1$  световых колец. Однако максимальный радиальный индекс полинома Лагерра в уравнении (2.26) является  $2n$ . Таким образом, может показаться, что сумма (2.26) также имеет  $2n$  нулей (корней). Но это не так. Поскольку в сумме отличны от нуля только четные члены, то после замены аргумента  $x$  полинома Лагерра ( $x^2 = y$ ) сумма (2.26) по аргументу  $y$  имеет максимальную степень  $n$  и, следовательно, имеет максимальное число корней равно  $n$ .

### *Численное моделирование*

В этом подразделе, используя преобразование Френеля пучка ЛГ из уравнения (2.11) вычислено поперечное распределение интенсивности и фазы на различных расстояниях от исходной плоскости перетяжки. Используются следующие параметры: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки гауссова пучка  $w_0 = 0,5$  мм, азимутальный (верхний) и радиальный (нижний) индексы связанного полинома Лагерра соответственно  $m = 4$  и  $n = 3$ . Рис. 2.7 иллюстрирует распределения интенсивность (столбцы 1 и 3) и фазы (столбцы 2 и 4) пучка из уравнения (2.11) на следующих расстояниях от перетяжки  $z/z_0$ : 0 (рис. 2.7а,б), 1/4 (рис. 2.7в,г), 1/2 (рис. 2.7д,е), 3/4 (рис. 2.7ж,з), 1 (рис. 2.7и,к), 1,5 (рис. 2.7л,м), 2 (рис. 1н,о), 3 (рис. 1п,р), 4 (рис. 1с,т), 10 (рис. 1у,ф).

Согласно рис. 2.7, на расстоянии Рэлея  $z_0$  от перетяжки образуется одиночное световое кольцо с радиусом, близким к 0,4 мм. Это эквивалентно фокусировке гауссова пучка с радиусом перетяжки 0,5 мм сферической линзой с числовой апертурой около 0,4. Отметим, что в начальной плоскости первое световое кольцо

имеет радиус почти в два раза больше радиуса перетяжки и составляет примерно 0,9 мм. Обычный пучок ЛГ с радиусом перетяжки 0,5 мм имел бы такой радиус при топологическом заряде 3, тогда как пучок ЛГ из уравнения (2.11) имеет топологический заряд  $m - n = 4 - 3 = 1$ . Таким образом, моделирование подтверждает, что лучи (2.11) имеют увеличенную темную область в начальной плоскости (рис. 2 а) и на расстоянии Рэлея фокальное пятно формируется в виде узкого светлого кольца (рис. 2.7 и) почти без боковых лепестков. Хотя, если быть точным, фокусировка (максимальная интенсивность на кольце) происходит на расстоянии  $0,75 z_0$  (рис. 2.7 ж) и в 2,38 раза превышает максимальную интенсивность на кольце в исходной плоскости (рис. 2.7а). На расстоянии Рэлея интенсивность несколько меньше (рис. 2.7 и) и в 2,37 раза больше, чем в исходной плоскости. Из рис.2.7 также видно, что интенсивность в дальнем поле (рис. 2.7 у) совпадает с начальной интенсивностью (рис. 2.7 а). Это подтверждает свойство Фурье-инвариантности (2.16) пучков (2.11).

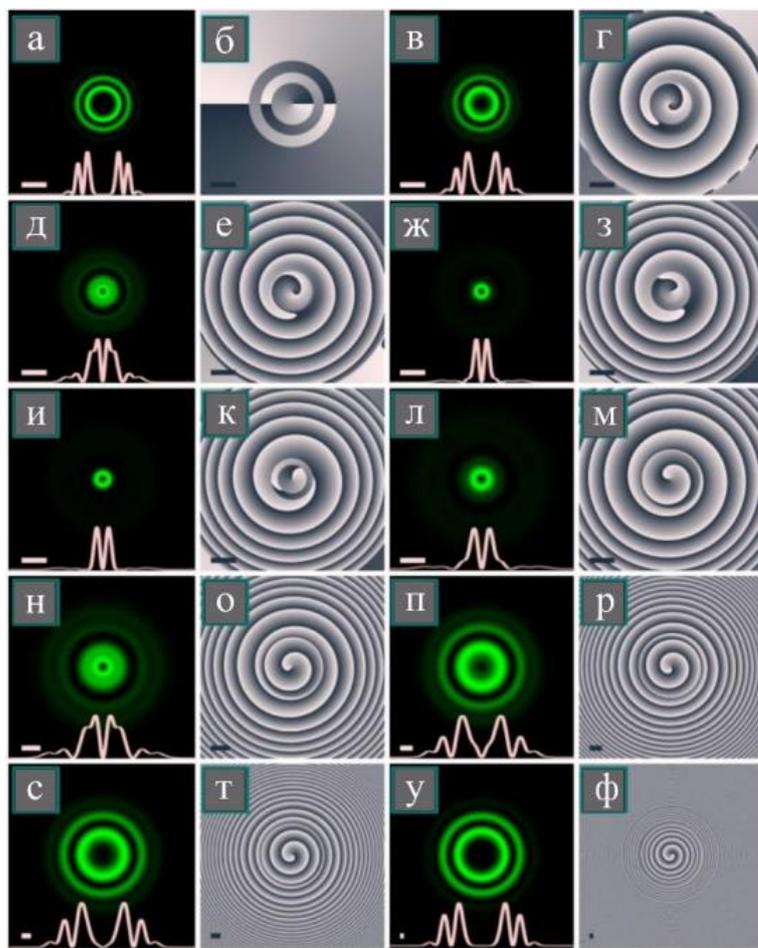


Рис. 2.7 Интенсивность (столбцы 1 и 3) и фазовые распределения (столбцы 2 и 4) пучка ЛГ из уравнения 1 в разных поперечных плоскостях  $z/z_0 = 0$  (а,б),  $1/4$  (в,г),  $1/2$  (д,е),  $3/4$  (ж,з),  $1$  (и,к),  $1,5$  (л, м),  $2$  (н, о),  $3$  (п, р),  $4$  (с, т),  $10$  (у, ф). Другими параметрами расчета являются: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки гауссова пучка  $w_0 = 0,5$  мм, азимутальный (верхний) и радиальный (нижний) индексы связанного полинома Лагерра соответственно  $m = 4$  и  $n = 3$ . распределения интенсивности показывают сечения интенсивности. Отметки шкалы в левом нижнем углу (светлые в столбцах 1 и 3 и темные в столбцах 2 и 4) показывают 1 мм.

Рисунок 2.7 получен с помощью численного преобразования Френеля, реализованного в виде свертки с использованием быстрых преобразований Фурье. Для подтверждения разложения (2.25) в суперпозицию обычных пучков ЛГ на рис. 2.8 показаны те же зависимости, что и на рис. 2.7 д,е,п,р, но вычисленные аналитически с помощью полиномов Лагерра и коэффициентов разложения

(2.23). Видно, что рис. 2.8а-г полностью идентичны рис. 2.7 д,е,п,р соответственно.

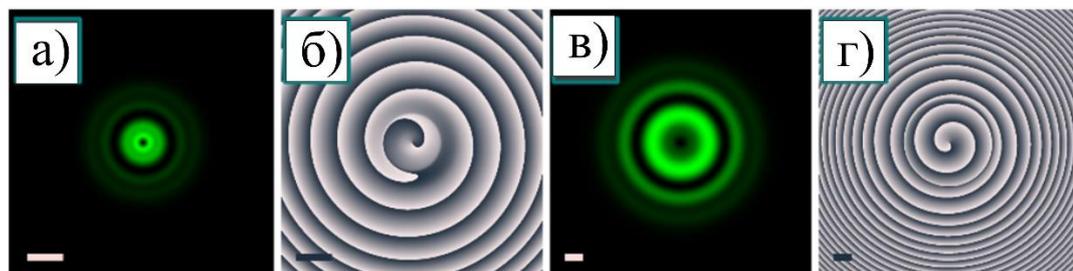


Рис. 2.8 Те же распределения интенсивности и фазы, что и на рис. 2.7д,е,п,р, но полученные аналитически по уравнению (2.25) с использованием коэффициентов разложения (2.23).

Пучки Лагерра-Гаусса с автофокусировкой исследовались в [123\*, 124\*].

### 2.3 Топологический заряд суперпозиции пучков Бесселя-Гаусса

В данном разделе рассматривается суперпозиция пучков Бесселя-Гаусса с топологическими зарядами (ТЗ)  $m$  и  $n$ . Теоретически доказано, что непрерывное изменение амплитуд составляющих лучей позволяет управлять ТЗ всей суперпозиции. Получаем условия, когда ТЗ равен  $n$  или  $m$ . В сечении такой суперпозиции имеется оптический вихрь  $m$ -го порядка (если  $m < n$ ) и  $n - m$  вихрей с однократным зарядом, находящихся на периферии пучка. Если амплитуды обоих составляющих пучков становятся равными, мы показываем, что периферийные оптические вихри удаляются на бесконечность и ТЗ становится полуцелым. Кроме того, этот ТЗ сохраняется при распространении в свободном пространстве. Дробная часть этого ТЗ, однако, скрыта в бесконечности.

Вихревые лазерные лучи характеризуются двумя основными величинами: топологическим зарядом (ТЗ) и орбитальным угловым моментом (ОУМ). ОУМ зависит как от фазового, так и от амплитудного распределения луча [125], тогда как ТЗ зависит только от фазового распределения [35]. Световое поле с нулевым

ОУМ может иметь ненулевую ТЗ [126] и наоборот. Отметим, что, в отличие от ОУМ [127-131], работ по изучению ТЗ вихревых пучков не так много [132-134]. Тем не менее, мы находим ТЗ заслуживающим внимания, так как, в отличие от ОУМ, искажения луча приводят к ступенчатому изменению ТЗ, т.е. ТЗ может быть более стабильной величиной, например, при распространении луча в турбулентной среде.

Известно, что при распространении в космосе ОУМ любого параксиального светового поля сохраняется. Однако есть примеры световых полей с несохраняющимся ТЗ [135-137]. Например, оптический вихрь с начальной дробной ТЗ приобретает целочисленную ТЗ при распространении в свободном пространстве [35]. Однако этот ТЗ может измениться на  $\pm 1$  в зоне Френеля или в дальнем поле [136,137]. В [138] исследуется суперпозиция двух различных пучков Бесселя-Гаусса. Как и в [135], в работе [138] показано, что для Гауссовых пучков с разными радиусами перетяжки ТЗ суперпозиции может изменяться при распространении. Однако в [138] ТЗ не был строго выведен с использованием формулы М.В. Берри [35]. Кроме того, не было показано, что если два пучка Бесселя-Гаусса различаются только своими топологическими зарядами, то топологический заряд всей суперпозиции может иметь полуцелое значение, сохраняющееся при распространении в пространстве.

Здесь мы показываем, что ТЗ суперпозиции двух Бесселево-Гауссовых пучков с разными ТЗ  $m$  и  $n$  может иметь полуцелое значение  $TZ = (n + m) / 2$ , и это значение сохраняется при пространственном распространении. В поперечном сечении такой суперпозиции имеется оптический вихрь  $m$ -го порядка в центре и  $n - m$  однозарядных вихрей, находящихся на окружности бесконечного радиуса, поэтому их ТЗ равна  $(n + m) / 2$ . Кроме того, мы предлагаем подход к управлению ТЗ суперпозиции оптических вихревых пучков на примере суперпозиции двух Бесселево-Гауссовых пучков с разными амплитудами, ТЗ и коэффициентами масштабирования. Мы показываем, что ТЗ сохраняется при распространении луча и равен ТЗ составного луча с большим коэффициентом масштабирования. Точно

так же, если масштабные коэффициенты обоих лучей Бесселя-Гаусса одинаковы, ТЗ суперпозиции равен ТЗ луча с большей амплитудой.

**Топологический заряд суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса с разными масштабными коэффициентами.**

В поперечной плоскости на расстоянии  $z$  от исходной плоскости суперпозиция двух пучков Бесселя-Гаусса имеет следующую комплексную амплитуду [26]:

$$E(r, \varphi, z) = E_n \text{BG}_{n,w,\alpha}(r, \varphi, z) + E_m \text{BG}_{m,w,\beta}(r, \varphi, z), \quad (2.27)$$

где  $(r, \varphi, z)$  — цилиндрические координаты,  $E_n$  и  $E_m$  — коэффициенты суперпозиции,  $\text{BG}_{n,w,\alpha}$  и  $\text{BG}_{m,w,\beta}$  — комплексные амплитуды составляющих пучков Бесселя-Гаусса:

$$\text{BG}_{n,w,\alpha}(r, \varphi, z) = \frac{1}{q(z)} J_n \left( \frac{\alpha r}{q(z)} \right) \exp \left( ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} + in\varphi \right), \quad (2.28)$$

где  $J_n(\cdot)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка,  $\alpha$  — масштабный коэффициент,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $w$  — радиус перетяжки гауссова пучка,  $n$  — топологический заряд оптического вихря,  $q(z) = 1 + iz/z_0$ ,  $z_0 = kw^2/2$  — диапазон Рэлея.

Топологический заряд поля (2.27) можно получить, используя известную формулу Берри [35] ( $\text{Im}$  — мнимая часть комплексного числа):

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (2.29)$$

Вдали от оптической оси (т.е.  $r \rightarrow \infty$ ) для функций Бесселя можно принять следующее приближение:

$$J_n \left( \frac{\alpha r}{q(z)} \right) \approx \sqrt{\frac{2q(z)}{\pi\alpha r}} \cos \left( \frac{\alpha r}{q(z)} - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (2.30)$$

На расстоянии  $z > 0$   $q(z)$  содержит мнимую часть и при больших  $r$  косинус становится подобным экспоненциальной функции:

$$J_n\left(\frac{\alpha r}{q(z)}\right) \approx \sqrt{\frac{q(z)}{2\pi\alpha r}} \exp\left(\frac{\alpha r z}{z_0 |q(z)|^2} + \frac{i\alpha r}{|q(z)|^2} - \frac{in\pi}{2} - \frac{i\pi}{4}\right), \quad (2.31)$$

и ТЗ можно вычислить следующим образом:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{nE_n(-i)^n}{\sqrt{\alpha}} \exp\left(in\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)}\right) + \frac{mE_m(-i)^m}{\sqrt{\beta}} \exp\left(im\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} + \frac{\beta - \alpha}{|q(z)|^2} \left(i + \frac{z}{z_0}\right) r\right)}{\frac{E_n(-i)^n}{\sqrt{\alpha}} \exp\left(in\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)}\right) + \frac{E_m(-i)^m}{\sqrt{\beta}} \exp\left(im\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} + \frac{\beta - \alpha}{|q(z)|^2} \left(i + \frac{z}{z_0}\right) r\right)} d\varphi \quad (2.32)$$

Если  $\alpha > \beta$ , показатели в уравнении (2.32) перевешивают другие члены при  $r \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $TC = n$ . Если, наоборот,  $\alpha < \beta$ , то получим  $TC = m$ . Таким образом, суперпозиция (2.27) имеет ТЗ, определяемую отношением масштабных коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  функции Бесселя, а амплитуды составляющих лучей не влияют на ТЗ.

### ***Топологический заряд суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса с равными масштабными коэффициентами***

Если  $\alpha = \beta$ , уравнение (2.32) можно записать в следующем виде:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{E_n n (-i)^n e^{in\varphi} + E_m m (-i)^m e^{im\varphi}}{E_n (-i)^n e^{in\varphi} + E_m (-i)^m e^{im\varphi}}, \quad (2.33)$$

где  $\operatorname{Re}$  - действительная часть комплексного числа. Используя тот же подход, что и в [34], для интеграла (2.33) получаем  $TC = n$ , если  $E_n > E_m$ , и  $TC = m$ , если  $E_n < E_m$ . Если  $E_n = E_m$ ,  $TC = (n + m) / 2$ .

Выражения (2.32) и (2.33) не зависят от расстояния  $z$ . Таким образом, полувещный ТЗ суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса не меняется при пространственном распространении. Действительно, если  $E_n = E_m = E_0$  и  $\alpha = \beta$ , то амплитуда суперпозиции двух Бесселево-Гауссовых пучков (2.27) определяется выражением (при больших  $r$ )

$$E(r \rightarrow \infty, \varphi, z) \approx E_0 e^{ikz - i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha r q(z)}} \exp\left(-\frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} + \frac{i\alpha r}{|q(z)|^2}\right) \times \\ \times \exp\left(\frac{\alpha r z}{z_0 |q(z)|^2} + \frac{i(n+m)}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) \cos\left[\frac{(n-m)}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (2.34)$$

Уравнение (2.34) показывает, что суперпозиция создает центральный вихрь с  $ТС = (n+m)/2$ . Распределение интенсивности состоит из лепестков. Заметим здесь, что нормированный по мощности ОУМ линейной комбинации двух одинаковых вихрей с разными топологическими зарядами также равен  $(n+m)/2$ . При  $n$  и  $m$  разной четности суперпозиция (2.34) состоит из целого числа лепестков интенсивности, но при этом ее ТЗ имеет полуцелое значение.

Вблизи оптической оси ( $r \rightarrow 0$ ) комплексная амплитуда определяется выражением

$$E(r \rightarrow 0, \varphi, z) \approx q^{-1}(z) \exp\left(ikz - \frac{r^2}{w^2 q(z)} + im\varphi\right) \\ \times \left[ \frac{E_m}{m!} \left(\frac{\beta r}{2q(z)}\right)^m \exp\left(-\frac{i\beta^2 z}{2kq(z)}\right) + \frac{E_n}{n!} \left(\frac{\alpha r}{2q(z)}\right)^n \exp\left(-\frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)}\right) e^{i(n-m)\varphi} \right].$$

Поскольку первое слагаемое во второй строке этой формулы перевешивает второе, заключаем, что вне зависимости от значений  $E_m$ ,  $E_n$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  в центре возникает оптический вихрь с меньшим ТЗ  $m$  ( $m < n$ ).

Следовательно, световое поле (2.34) с полуцелым ТЗ имеет вихрь  $m$ -го порядка в центре  $(n-m)$  и краевые дислокации (линии нулевой интенсивности), идущие от центра по радиальным линиям с полярными углами

$$\varphi_p = \left(\frac{4p+1}{2|m-n|}\right)\pi, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.35)$$

Для разных коэффициентов масштабирования (т.е.  $\alpha \neq \beta$ ) луч (2.27) вращается при распространении. На расстоянии  $z$  угол поворота  $\varphi$  диаграммы интенсивности пучка (2.27) определяется выражением

$$\varphi = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)z}{2k(n-m)} \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)^{-1}, \quad (2.36)$$

или, что то же самое,

$$\varphi = \frac{(\beta w)^2 - (\alpha w)^2}{4(n-m)} \frac{\operatorname{Im} q}{|q|}. \quad (2.37)$$

Это выражение указывает на то, что угол поворота зависит от комплексного множителя  $q(z)$  в функциях Бесселя в уравнении (2.27).

### ***Численное моделирование***

В этом подразделе мы используем уравнение (2.27) и уравнение (2.29) чтобы вычислить комплексную амплитуду и ТЗ суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса, соответственно. Выбраны следующие параметры: длина волны в свободном пространстве  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки гауссова пучка  $w = 10\lambda$ , ТЗ первого и второго пучков  $n = 5$  и  $m = 2$  соответственно, коэффициенты масштабирования обоих пучков одинаковы:  $\alpha = \beta = 1/\lambda$ , а расстояние от начальной плоскости  $z = z_0$ . Область вычислений:  $|x|, |y| \leq R$  ( $R = 75$  мкм). Вместо окружности с бесконечным радиусом мы вычисляем ТЗ по уравнению (2.29) по окружности радиусом  $R_1 = 75$  мкм (красная пунктирная окружность на рис. 2.9(б)). Этот радиус почти в 14 раз больше, чем радиус перетяжки гауссова пучка. Таким образом, вся область заметной интенсивности находится в пределах выбранного круга.

На рис. 2.9 показано наложение двух пучков Бесселя-Гаусса с разными амплитудами:  $E_5 = 1,2$  и  $E_2 = 1,0$ .

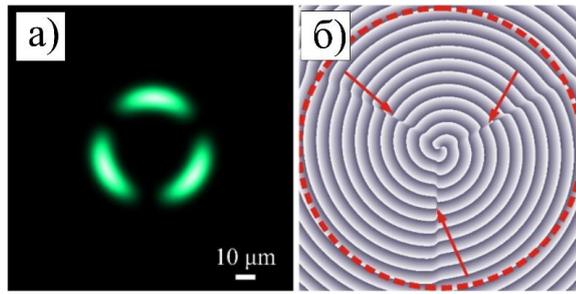


Рис. 2.9 Распределения интенсивности (а) и фазы (б) суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса с  $E_5 = 1,2$  и  $E_2 = 1,0$  ( $\alpha = \beta = 1/\lambda$ ). Красными стрелками показаны периферийные вихри.

Значение ТЗ, полученное расчетным путем, равно  $TC = 5$ . Три оптических вихря первого порядка находятся на лучах, определяемых уравнением (2.27) и (2.35). При уменьшении амплитуды пучка с большим ТЗ эти вихри удаляются к периферии (рис. 2.10). Рисунок 2.10 иллюстрирует суперпозицию двух пучков Бесселя-Гаусса с разными амплитудами:  $E_5 = 1,1$ ,  $E_2 = 1,0$ , но разница меньше, чем на рисунке 2.9. Численно рассчитанное значение ТЗ равно  $TC = 5$ .

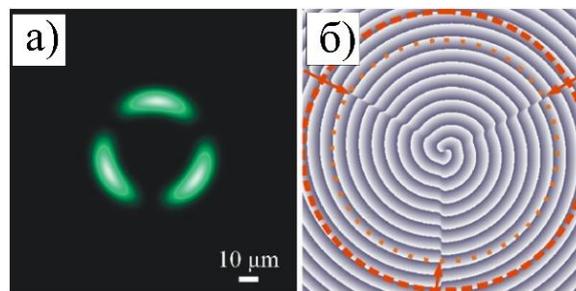


Рис. 2.10 Распределения интенсивности (а) и фазы (б) суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса с  $E_5 = 1,1$  и  $E_2 = 1,0$  ( $\alpha = \beta = 1/\lambda$ ). Красными стрелками показаны периферийные вихри.

На рис. 2.10(б) видно, что три однозарядных вихря находятся дальше от оптической оси, чем на рис. 2.9. Мы можем объяснить это поведение, используя свойства функций Бесселя малого аргумента. Если  $\alpha = \beta$ , комплексная амплитуда (2.27) может быть записана примерно как

$$E(r, \varphi, z) \approx \frac{1}{q(z)} \exp \left[ ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} \right] \times \left[ \frac{E_m}{m!} \left( \frac{\alpha r}{2q(z)} \right)^m e^{im\varphi} + \frac{E_n}{n!} \left( \frac{\alpha r}{2q(z)} \right)^n e^{in\varphi} \right]. \quad (2.38)$$

Итак, расстояние от периферийных оптических вихрей до оптической оси можно найти, решив уравнение:  $[\alpha r / (2|q|)]^{n-m} = (n! / m!) (E_m / E_n)$  (если  $n > m$ ). Таким образом, расстояние  $r$  до вихря от центра увеличивается с уменьшением  $E_n$ .

Как и на рисунке 2.9, максимальная интенсивность на окружности (радиусом  $R_2$ ) вблизи периферийных вихрей (выделены оранжевыми точками на рисунке 2.10(б)) очень мала. Это затрудняет или делает невозможным обнаружение периферийных вихрей на рисунке 2.10(б) экспериментально. На рис. 2.10(б) видно, что изменение  $E_5$  влияет на радиус  $R_1$  окружности, на котором вычисление ТЗ дает значение  $TC = 5$ . Этот радиус должен быть больше радиуса  $R_2$  окружности с тремя однозарядными вихрями. Когда амплитуды обоих Бесселево-Гауссовых пучков становятся точно равными, т. е.  $E_5 = E_2 = 1$ , периферийные вихри находятся в бесконечности. Рис. 2.11 аналогичен рис. 2.10, но рассчитан для  $E_5 = E_2 = 1$ . На рис. 2.11 не показаны периферийные вихри. Точнее, он содержит только центральный вихрь второго порядка с  $TC = 2$ . Численно рассчитанное значение ТЗ равно  $TC = 2$ . Сравнение рисунков 2.9 и 2.11 показывает, что интенсивность почти одинакова, даже несмотря на то, что пучки Бесселя-Гаусса имеют разные ТЗ.

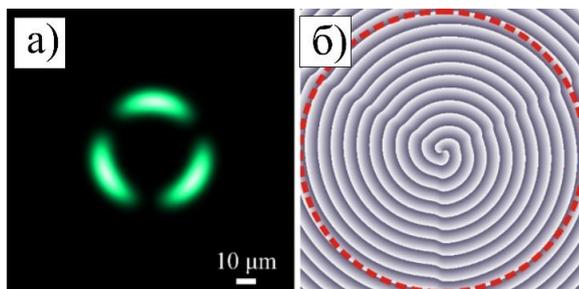


Рис. 2.11 Распределения интенсивности (а) и фазы (б) суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса с  $E_5 = E_2 = 1$ .

Перемещение оптического вихря к периферии пучка аналогично смещению оптического вихря от центра апертуры к ее краю. После прохождения такого отверстия комплексная амплитуда светового луча имеет вид  $E(r, \varphi) = \text{circ}(r / R)(re^{i\varphi} - r_0)^n$ , где  $r_0$  — смещение вихря,  $R$  — радиус отверстия,  $n$  — топологический заряд вихря,  $\text{circ}(\xi)$  — следующая функция:  $\text{circ}(\xi) = 1$ , если  $\xi \leq 1$ , и 0 для остальных параметров. На рис. 2.12(а) показан случай, когда в апертуре находится вихрь  $n$ -го порядка. Его ТЗ равен  $n$ . На рис. 2.12(б) вихрь движется к границе апертуры. Его топологический заряд становится равным  $TC = n/2$ , так как фаза по контуру, охватывающему вихрь, увеличивается на  $n\pi$  вместо  $2n\pi$ . Если размер отверстия бесконечно растет и вихрь находится на границе этого отверстия, то топологический заряд такого пучка должен быть в два раза меньше, чем в отсутствие отверстия. Таким образом, топологический заряд пучка, показанный на рис. 2.11, должен быть равен 3,5, т. е. он представляет собой сумму 2 (центральный вихрь) и  $3 \times 1/2$  (три периферийных вихря). Однако это доказано аналитически и подтвердить это невозможно ни расчетом, ни экспериментом.

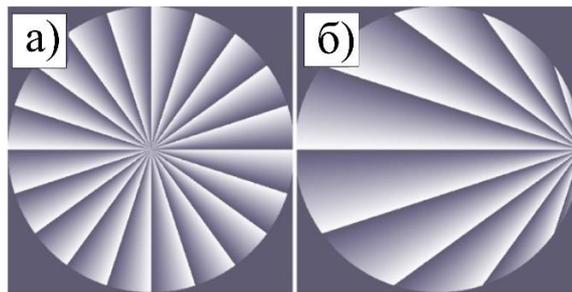


Рис. 2.12 Фазовые распределения оптического вихря, находящегося внутри (а) и на границе (б) круглой апертуры.

Если вместо амплитуд двух пучков Бесселя-Гаусса изменить их масштабные коэффициенты, аналогичные изменения произойдут для оптических вихрей, генерируемых суперпозицией. Если увеличить коэффициент масштабирования луча с большим ТЗ, т.е.  $\alpha = 1,2/\lambda$ ,  $\beta = 1/\lambda$ , то в фазовом распределении, показанном

на рис. 2.13(б), снова наблюдаются три периферийных вихря с унитарным зарядом. Согласно рис. 2.13(а), распределение интенсивности вращается против часовой стрелки со скоростью, определяемой (2.36).

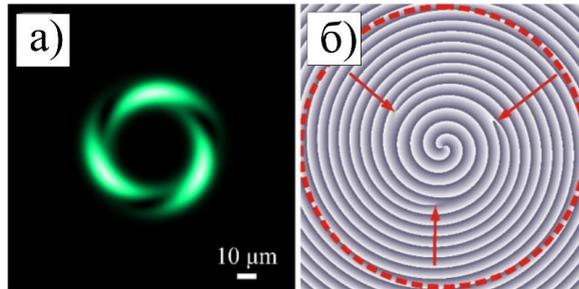


Рис. 2.13 Распределения интенсивности (а) и фазы (б) суперпозиции пучков Бесселя-Гаусса с  $E_5 = E_2 = 1$ ,  $\alpha = 1,2/\lambda$ ,  $\beta = 1/\lambda$ .

Если масштабный параметр пучка с меньшим ТЗ увеличить (например,  $\alpha = 1/\lambda$ ,  $\beta = 1,2/\lambda$ ), изменение становится другим. Из рис. 2.14(б) видно, что в этом случае, помимо вихря 2-го порядка, возникают три дополнительных вихря с единичным зарядом в центральной области и три вихря с ТЗ  $-1$  на периферии пучка. В результате ТЗ суперпозиции равняется 2. Как видно из рисунка 2.14(а), картина интенсивности также повернута по часовой стрелке согласно уравнению. (2.36).

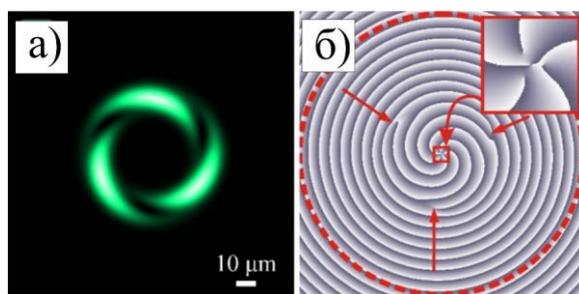


Рис. 2.14 Распределения интенсивности (а) и фазы (б) суперпозиции пучков Бесселя-Гаусса с  $E_5 = E_2 = 1$ ,  $\alpha = 1/\lambda$ ,  $\beta = 1,2/\lambda$ .

На рис. 2.15 показано, что распределение интенсивности пучка с рис. 2.14 вращается против часовой стрелки в ближней зоне ( $z < z_0$ ).

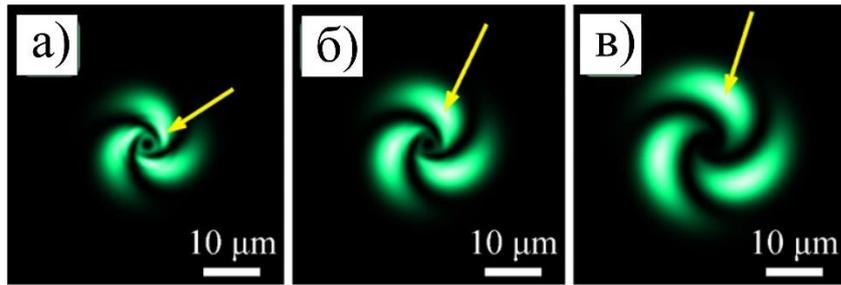


Рис. 2.15 Распределения интенсивности суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса с  $E_5 = E_2 = 1$  и  $\alpha = 1/\lambda$ ,  $\beta = 1,2/\lambda$  в трех различных плоскостях:  $z = z_0/5$  (а),  $z = z_0/4$  (б),  $z = z_0/3$  (в). Желтые стрелки показывают один и тот же максимум интенсивности.

На рис. 2.16 показано наложение двух пучков Бесселя-Гаусса, когда параметры масштабирования более отчетливы и когда расстояния распространения больше, включая зону дифракции Френеля и дальнее поле (т. е. когда расстояние меньше, равно или превышает длину Рэлея).

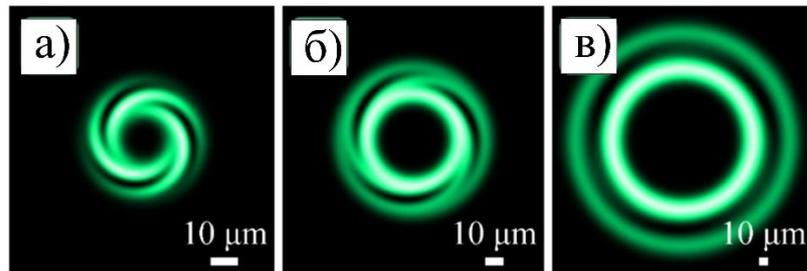


Рис. 2.16 Распределения интенсивности суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса с  $E_5 = E_2 = 1$  и  $\alpha = 1,5/\lambda$ ,  $\beta = 1/\lambda$  в трех различных плоскостях:  $z = z_0/2$  (а),  $z = z_0$  (б),  $z = 3z_0$  (в).

На этих расстояниях распространение вращения не так отчетливо видно, и в дальней зоне пучок становится кругово-симметричным [52\*]. Диаграмма дальнего поля содержит два световых кольца, по одному для каждого из пучков Бесселя-Гаусса. Внутреннее и внешнее кольца относятся соответственно к пучкам Бесселя-Гаусса 2-го и 5-го порядка (поскольку  $\alpha > \beta$ ). Это объясняет, почему вся суперпозиция имеет ТЗ, равный 5.

## Выводы к главе 2.

1. Рассмотрен новый тип вихревых пучков, пересекающийся с семейством хорошо известных пучков Лагерра-Гаусса (ЛГ). У этих пучков многочлен Лагерра взят в квадрате, и они называются пучки Лагерра-Гаусса в квадрате (ЛГ)<sup>2</sup>. Пучки ЛГ с нулевым радиальным индексом и четным азимутальным индексом совпадают с (ЛГ)<sup>2</sup>. Показано теоретически и численно, что вихревой пучок ЛГ «в квадрате» является Фурье-инвариантным и сохраняет свою структуру в фокусе сферической линзы или в дальней зоне дифракции. В зоне дифракции Френеля такой пучок преобразуется в осевую суперпозицию обычных пучков ЛГ, число которых равно числу колец у пучка ЛГ «в квадрате». Если кольцо всего одно, то пучок является структурно-стабильным. Также рассмотрен более общий пучок, являющийся «произведением» двух пучков ЛГ. Такой пучок будет Фурье-инвариантным, если число колец у двух пучков ЛГ в «произведении» одинаковое [106\*, 107\*]. Результаты работы могут найти свое применение в оптических коммуникациях [99-101].

2. Рассмотрен пучок ЛГ, который отличается от обычных модовых пучков ЛГ. Этот пучок не сохраняет своей поперечной структуры при распространении в свободном пространстве, но обладает интересными свойствами. Этот пучок фурье-инвариантен и имеет увеличенную темную область как в начальной плоскости (плоскость перетяжки), так и в дальней зоне. Таким образом, без изменения топологического заряда изменение радиального (нижнего) индекса ассоциированного полинома Лагерра позволяет увеличивать или уменьшать эффективный диаметр центрального темного пятна интенсивности. Кроме того, пучок является автофокусирующим, т.е. распределение интенсивности на рэлеевском расстоянии от перетяжки имеет форму светового кольца (при любом значении радиального индекса) с минимальным диаметром и максимальной интенсивностью на кольце. Такой пучок можно использовать для манипулирования микрочастицами без использования дополнительной сферической линзы для его фокусировки [123\*, 124\*].

3. Исследована суперпозиция двух пучков Бесселя-Гаусса. Если пучки различаются только своими ТЗ (т.е. масштабные коэффициенты и амплитуды одинаковы), то ТЗ суперпозиции может иметь полуцелое значение, которое, кроме того, сохраняется при распространении в свободном пространстве. В этом случае часть оптических вихрей (их количество равно разности ТЗ пучков в суперпозиции) находится на окружности бесконечного радиуса [52\*].

## ГЛАВА 3. СПИРАЛЬНЫЕ ЗОННЫЕ ПЛАСТИНКИ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ В ОСТРОМ ФОКУСЕ

### 3.1 Сравнение фазовой зонной пластинки, освещенной оптическим вихрем, со спиральной зонной пластинкой

В данном разделе представлено сравнительное моделирование фокусировки оптических вихрей зонной пластиной, освещенной оптическим вихрем, и спиральной зонной пластиной с порядком, равным топологическому заряду оптического вихря. Для численного исследования использовался пакет программ FullWAVE, основанный на методе конечных разностей во временной области. Показано, что бинарная зонная пластинка, освещенная гауссовым пучком с топологическим зарядом  $m = 3$ , и спиральная бинарная зонная пластинка с порядком  $m = 3$ , освещенная гауссовым пучком, формируют различные распределения интенсивности в своих фокальных плоскостях. Обе пластинки имеют числовую апертуру близкую к единице и имеют одинаковое фокусное расстояние. Спиральная бинарная зонная пластинка формирует распределение интенсивности в остром фокусе с тремя максимумами интенсивности, которые при распространении в свободном пространстве образовывали световое кольцо. Обычная зонная пластинка давала кольцеобразную картину интенсивности с двумя максимумами по вертикальной оси непосредственно в фокусе.

Оптические вихри (ОВ) широко распространены в современной сингулярной оптике [139]. Энергия в этих пучках распространяется по спирали таким образом, что образуется «воронка», похожая на воздушный вихрь (торнадо). Из-за этого оптические вихри и получили свое название. Мировое научное сообщество активно занимается исследованием формирования [140 141 71], распространения [142, 143], фокусировки [144 70 145] и обнаружения ОВ. В [142] обсуждалась новая система генерации азимутально и радиально поляризованных вихревых пучков Бесселя. В этой оптической установке использовался бинарный фазовый аксикон. В [143] предложен новый метод

генерации ОВ, основанный на поляризационной анизотропии вокруг связанных двумерных периодических структур. В [70] авторы численно и экспериментально исследовали фокусировку вихрей Лагерра-Гаусса с длиной волны  $\lambda = 1550$  нм через кольцевые щели, круглые отверстия и зонные пластины (ЗП). Показано, что ЗП не влияет на топологический заряд (ТЗ) ОВ.

В [146, 147] оптические вихри формировались спиральной зонной пластиной (СЗП). Генератор вихревого пучка с управляемым фокусом на основе СЗП был предложен и продемонстрирован в [146]. Фокусное расстояние предложенного элемента может быть изменено за счет использования различных длин волн падающего света. В [147] описаны СЗП, которые обрабатывались остророфокусированными фемтосекундными импульсами, которые изменяли показатель преломления сапфирового кристалла. Изучение фоторефракции показало высокую дифракционную эффективность (78%) предложенных элементов. Кроме того, СЗП внедрены под поверхность сапфира, что обеспечивает стабильные оптические свойства компонентов при изменении внешнего показателя преломления. Такие СЗП позволяют формировать идеальные однородные оптические вихри.

Вихревые лазерные пучки нашли достаточно широкое применение в различных областях. В основном они используются для захвата и вращения наночастиц по окружности в плоскости поперечного сечения луча. Это свойство оптических вихрей стало основой для создания оптических пинцетов [148], позволяющих исследовать такие мельчайшие и сложноорганизованные объекты, как, например, молекулы ДНК. Оптические вихри также используются для оптической связи [145], в квантовых вычислениях [149], в модуляционной нанолитографии [150] и криптографии [151].

В данном разделе проведен сравнительный анализ дифракции лазерного излучения на фазовых ЗП и СЗП. Основная цель – сравнение распределения интенсивности в фокусе, создаваемого бинарной ЗП, освещенной оптическим вихрем, и создаваемого бинарной СЗП, освещенной обычным гауссовым пучком.

### Постановка задачи

Рассмотрены фазовая ЗП и СЗП, выполненные из кварцевого стекла на подложке. Как и в исследовании [152], была использована ЗП с 13 кольцами. Радиусы зон бинарного рельефа можно рассчитать по следующему уравнению:

$$r_p = \sqrt{p\lambda f + p^2 \lambda^2 / 4} \quad (3.1)$$

где  $r_p$  — радиус зоны с номером  $p$ ,  $\lambda$  — длина волны падающего излучения,  $f$  — фокусное расстояние. Для проектирования ЗП использовались следующие параметры:  $\lambda = 0,532$  мкм,  $f = \lambda$ ,  $M = 27$  (общее количество зон, что дает 13 колец).

В качестве падающего света для ЗП предлагается линейно поляризованный гауссов вихревой пучок с длиной волны  $\lambda = 0,532$  мкм, радиусом перетяжки  $w = 8$  мкм и топологическим зарядом  $m = 3$ . Падающее поле задавалось в MATLAB по следующей формуле:

$$\begin{cases} E_x(r, \vartheta) = \exp\left(-\frac{r^2}{\omega^2}\right) \exp(im\vartheta); \\ E_y(r, \vartheta) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Функция пропускания бинарной СЗП рассчитывалась по следующему уравнению:

$$T(r, \vartheta) = \text{sign} \left\{ \exp \left[ im\vartheta + ik \left( \sqrt{f^2 + r^2} - f \right) \right] \right\}, \quad (3.3)$$

где  $r$  и  $\theta$  — полярные координаты,  $k$  — волновое число,  $f$  — фокусное расстояние. Для расчета СЗП использовались следующие параметры:  $m = 3$ ,  $\lambda = 0,532$  мкм,  $f = \lambda$ . Максимальный диаметр элемента ограничен 8 мкм. В качестве падающего света для СЗП предлагается линейно поляризованный гауссов пучок с длиной волны  $\lambda = 0,532$  мкм и радиусом перетяжки  $\omega = 4$  мкм. Падающее поле задавалось в MATLAB следующей формулой:

$$\begin{cases} E_x(r, \vartheta) = \exp\left(-\frac{r^2}{\omega^2}\right); \\ E_y(r, \vartheta) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Моделирование проводилось методом конечных разностей во временной области FDTD в программном комплексе FullWAVE. Для кварцевого стекла использовалась модель диэлектрической проницаемости Селлмейера [153]. Моделирование проводилось с шагом 15 нм по поперечным координатам и 7 нм по продольной координате. Шаг псевдовремени  $c\Delta t$ , ( $c$  — скорость света в вакууме,  $\Delta t$  — шаг по времени) был равен 5 нм для обеспечения стабильности метода. При анализе результатов моделирования проводилось усреднение расчетных полей по 10 периодам.

### **Результаты моделирования**

В этом подразделе представлены результаты моделирования для фокальной плоскости (вблизи рельефа ЗП). В ходе исследования анализировались усредненная напряженность, компоненты вектора электрического поля и компоненты вектора Пойнтинга. Результаты моделирования показаны ниже. На рис. 3.1 показано распределение интенсивности на расстоянии  $z = f = 0,532$  мкм от рельефа (плоскость теоретического фокуса).

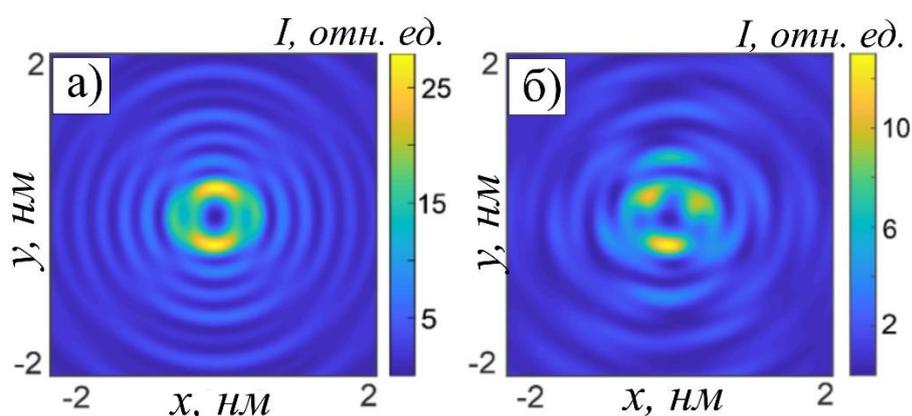


Рис. 3.1 Распределение интенсивности в фокальной плоскости на расстоянии 0,532 мкм от рельефа ЗП, освещенной гауссовым оптическим вихрем с топологическим зарядом  $m=3$  (а) и СЗП с порядком тоже  $m=3$ , освещенной гауссовым пучком (б).

На рис. 3.1 видно, что картины интенсивности в фокусе предлагаемых ЗП имеют разный вид. На рис. 3.1а интенсивность после ЗП имеет форму кольца с двумя максимумами на вертикальной оси, а на рис. 3.1б после СЗП сформировались три максимума, лежащих на окружности такого же радиуса, что и кольцо на рис. 3.1а. Для более подробной информации приведем распределения компонент вектора электрического поля  $E$  на рис. 3.2 и распределения компонент вектора Пойнтинга  $S$  на рис. 3.3.

Интересно, что как распределение интенсивности (рис. 3.2д), так и осевой поток энергии (рис.3.3ф) в фокусе СЗП имеют три локальных максимума, расположенных в углах правильного треугольника. Хотя интенсивность в фокусе ЗП (рис. 3.1а) имеет только два локальных максимума, а поток энергии в фокусе ЗП (рис. 3.3а) имеет форму кольца. Для сравнения полученных результатов показаны поперечное сечение интенсивности и продольная компонента вектора Пойнтинга  $S_z$  на рис. 3.4.

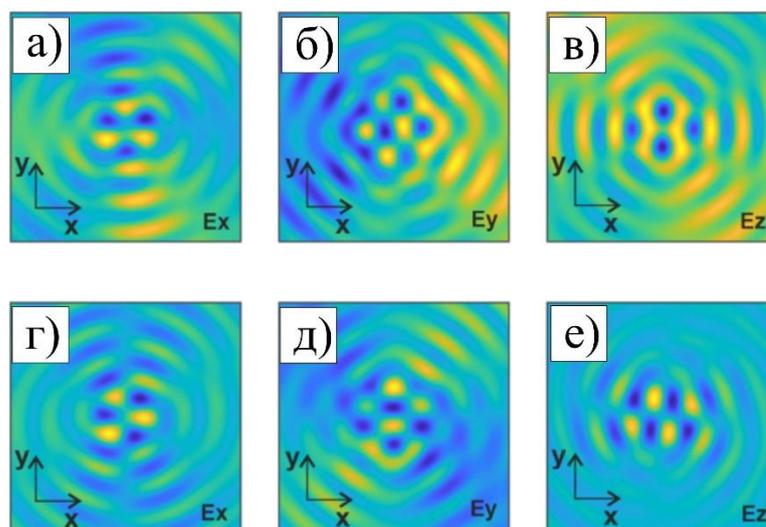


Рис. 3.2 Распределения компонент вектора электрического поля в фокальной плоскости на расстоянии 0,532 мкм от рельефа ЗП (а-в) и СЗП (г-е).

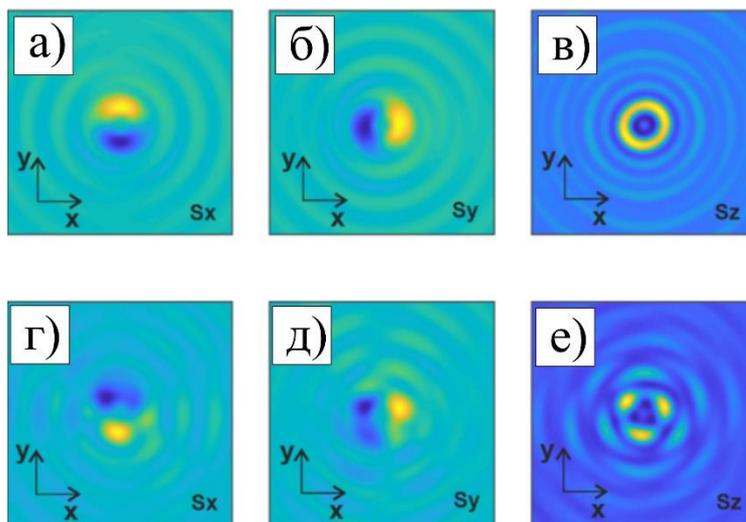


Рис. 3.3 Распределения компонент вектора Пойнтинга в фокальной плоскости на расстоянии 0,532 мкм от рельефа ЗП (а-в) и СЗП (г-е).

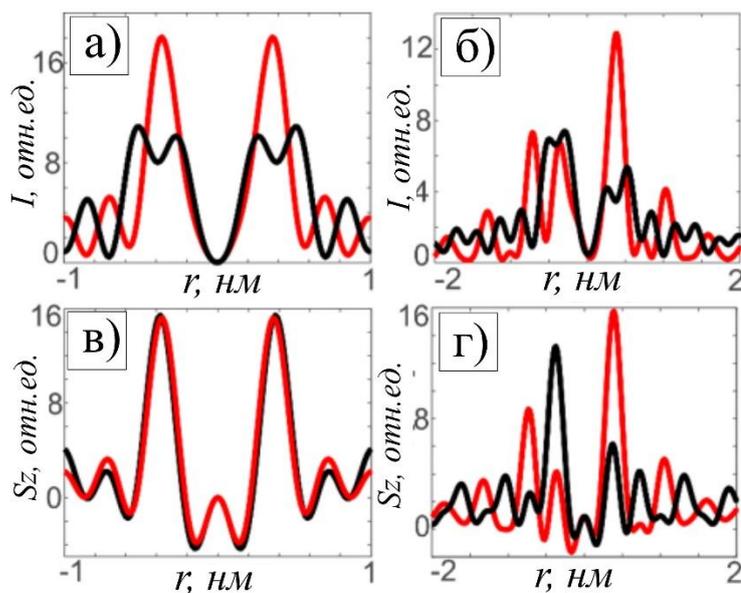


Рис. 3.4 Сечение интенсивности (а, б) и продольной составляющей вектора Пойнтинга  $S_z$  (в, г) в фокальной плоскости по X (чёрная линия) и Y (красная линия) для ЗП (а, в) и СЗП (б, г).

На рис. 3.4а и рис. 3.4в видно, что интенсивность в фокусе ЗП имеет кольцевую структуру, а форма компоненты  $S_z$  подтверждает наличие обратного потока энергии, окруженного областью прямого потока энергии, таким образом, форма обратного потока энергии имеет трубчатую структуру. Также из рис. 3.4

можно отметить, что обратный поток энергии, создаваемый СЗП, значительно слабее, чем формируемый ЗП, и имеет спиралевидную структуру.

Следующие выводы можно сделать по результатам моделирования. Поток энергии в фокусе светосильной ЗП, освещенной линейно поляризованным оптическим вихрем с топологическим зарядом  $m = 3$ , имеет кольцевую форму (рис. 3.3в), как и при острой фокусировке линейно поляризованного оптического вихря идеальной сферической линзой [154].

По-иному «ведет себя» СЗП порядка  $m=3$  при фокусировке линейно поляризованного гауссова пучка. Ввиду многолучевой структуры СЗП вблизи центра (из центра СЗП выходят три «рукава») поток энергии в остром фокусе (у поверхности СЗП) также имеет три «лепестка» (рис. 3.3е). В фокусе СЗП распределение интенсивности также сохраняет трехлепестковую структуру.

### *Результаты моделирования в дальнем поле*

Поскольку для рассматриваемых элементов были получены разные распределения вблизи зонных пластинок, для СЗП было рассчитано световое поле в дальней зоне. На рис. 3.5 представлена картина интенсивности на расстоянии 5 мкм после рельефа СЗП. Для детального анализа вектор электрического поля и вектор Пойнтинга показаны на рис. 3.6.

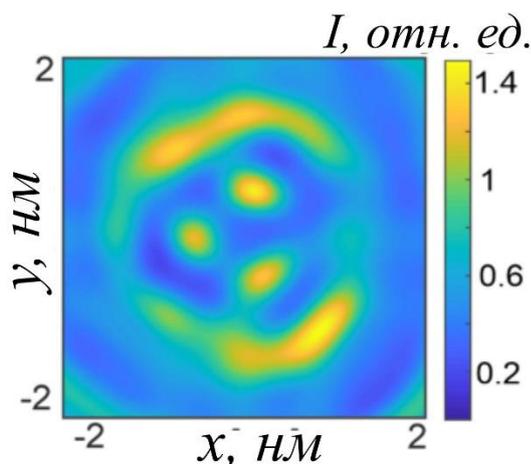


Рис. 3.5 Распределение интенсивности на расстоянии 5 мкм от рельефа СЗП.

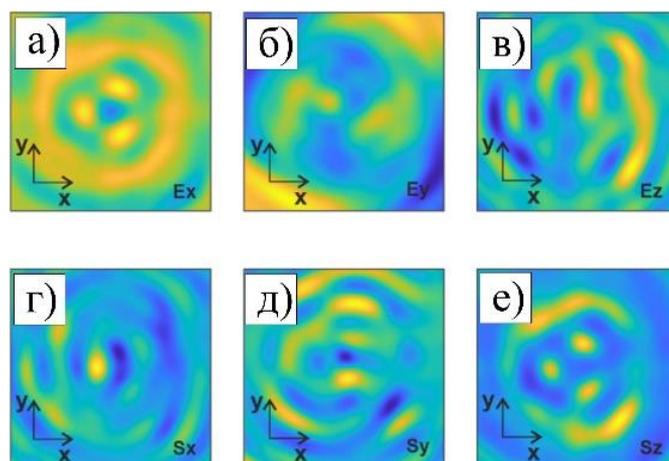


Рис. 3.6 Распределение компонент вектора электрического поля (а-с) и компонент вектора Пойнтинга (d-f) на расстоянии 5 мкм от рельефа СЗП.

Из рис. 3.5 видно, что напряженность электрического поля по-прежнему имеет три максимума интенсивности, расположенных в углах правильного треугольника на расстоянии 0,9675 мкм от центра. Однако на внешнем радиусе области с лепестками начинает формироваться другая структура. Из рис. 3.6a видно, что энергия пиков перетекает в кольцевую структуру с радиусом около 0,01855 мкм. Более того, поворот картины интенсивности можно наблюдать из сравнения интенсивности в фокусе на рис. 3.1б (или потока на рис. 3.3e) и интенсивности на расстоянии  $z = 5$  мкм (рис. 3.5).

Для отслеживания дальнейшей эволюции пучка рассчитывалась интенсивность на расстоянии 15 мкм от рельефа СЗП. Распределение интенсивности в этой зоне показано на рис. 3.7, а распределение компонент вектора электрического поля и компонент вектора Пойнтинга представлено на рис.3.8.

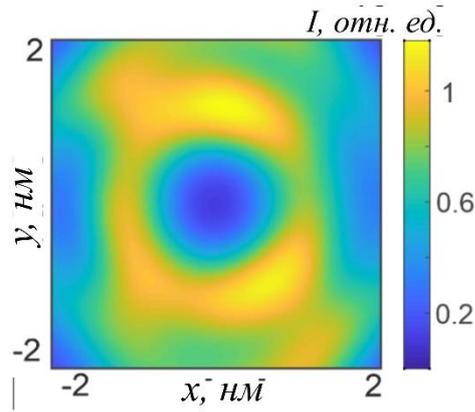


Рис. 3.7 Распределение интенсивности на расстоянии  $z=15$  мкм от рельефа СЗП.

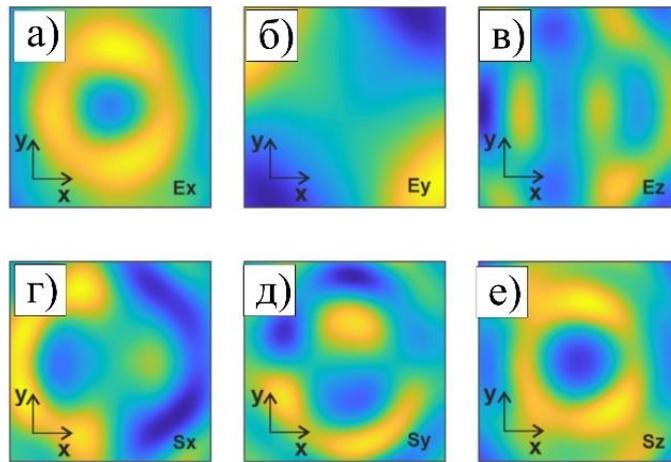


Рис. 3.8 Трехмерное распределение компонент вектора электрического поля (а-б) и компонент вектора Пойнтинга (г-е) на расстоянии 15 мкм от рельефа СЗП.

На рис. 3.7б видно, что световое кольцо интенсивности, характерное для оптических вихрей, формируется на расстоянии  $z = 15$  мкм от СЗП. При распространении света от СЗП вклад в световое поле вносят не центральные «плечи», а периодические кольца СЗП, которые, как и спиральный аксикон [155], образуют кольцо [156\*, 157\*]. Из сравнения рис.3.7 и рис.3.8f видно, что распределение интенсивности почти совпадает с продольной проекцией вектора Пойнтинга.

### 3.2 Спиральные зонные пластинки для фокусировки оптических вихрей

В данном разделе представлен анализ полей, формируемых светосильными бинарными обычными и спиральными зонными пластинами. Исследование выполнено с использованием пакета программ FullWAVE, реализующего метод конечных разностей во временной области. Обычная зонная пластина освещалась оптическими вихрями с топологическими зарядами  $m = 1, 2$  и  $3$ , а предлагаемые спиральные зонные пластины с теми же топологическими зарядами  $m = 1, 2$  и  $3$  освещались обычным гауссовым пучком. Показано, что предлагаемые бинарные зонные пластины из кварцевого стекла формируют в своих фокальных плоскостях различное распределение интенсивности и потока энергии. Спиральная зонная пластина в фокальной плоскости дает распределение интенсивности с разрывом  $m$ , в то время как обычная зонная пластина дает кольцеобразную картину интенсивности с двумя максимумами на вертикальной оси. При распространении вихревого поля, образованного спиральной зонной пластиной, картина интенсивности меняется и становится кольцевой.

Световые поля с винтовыми возмущениями волнового фронта принято называть оптическими вихрями [84, 139, 158, 159]. В центре оптического вихря световые волны гасят друг друга, образуя точку с нулевой интенсивностью. Когда такой вихрь проецируется на плоскость, он принимает форму светового кольца с темным пятном в центре. Кроме того, каждый оптический вихрь имеет топологический заряд. Это целочисленное значение указывает, сколько оборотов делает вихрь при распространении на расстояние, равное длине волны [71]. Сингулярная оптика занимается изучением этих оптических явлений [160, 161].

Оптические вихри широко изучаются современным научным сообществом во всем мире и этой теме посвящено большое количество научных исследований [162-171]. Например, в [164] исследуются оптические вихри с бесконечным топологическим зарядом. Такие пучки имеют счетное число фазовых особенностей, которые, как правило, имеют единый топологический заряд и располагаются либо эквидистантно, либо неэквидистантно на прямой в

поперечном сечении луча. Важнейшим преимуществом этих оптических вихрей является структурная стабильность. Поперечная интенсивность лучей сохраняется при распространении, изменяясь только по масштабу и повороту. В [165] представлена новая методика измерения квадратов амплитуд и фаз парциальных вихревых пучков в комплексной решетке пучков в реальном масштабе времени. Методика основана на измерении моментов интенсивности высокого порядка. Показано, что погрешность измерений для решетки из 10–15 лучей не превышает 4 %. Работа [171] посвящена исследованию скорости вращения светового пучка в ближней зоне, образованного спиральным аксиконом с топологическим зарядом 2. В результате авторы показали, что при использовании спирального аксикона с малым числовой апертурой ( $NA \approx 0,6$ ) можно сформировать двухлепестковый пучок, вращающийся со скоростью 55 град/мкм в ближнем поле (от 0,5 мкм до 4,5 мкм) аксикона. Особенно актуальны исследования генерации [72, 172, 173], распространения [174-176], обнаружения [177-179], фокусировки [70, 145, 169, 180, 181].

Генерация оптических вихрей является одной из общих задач. В [164] авторы рассматривают новые методы генерации оптических вихрей, получившие развитие после генерации оптического вихря в 1992 г. Среди таких методов можно выделить генерацию вихрей планарными элементами типа динамических фазовых пластин [182], геометрические фазовые пластины [183] и гибридные фазовые пластины [184]. В [163] для генерации оптических вихрей использовалась нанометровая спиральная щель. По сравнению с обычными методами генерации вихревого пучка с фиксированным топологическим зарядом оптический вихрь, генерируемый предлагаемым методом, имеет топологический заряд, изменяющийся с расстоянием распространения. Величину топологического заряда можно модулировать геометрическим зарядом спиральной щели и расстоянием распространения. Активные вихревые лазеры также следует двигать как один из эффективных методов [185-187].

В фокусе оптических вихрей можно наблюдать интересные оптические явления. Например, в [181] авторы исследовали фокусировку полого гауссова

пучка, несущего осевые и внеосевые вихри. Две новые пары вихрей генерируются попеременно по осям  $x$  и  $y$  в векторных электрических полях в фокусе линзы с высокой числовой апертурой. При этом топологические заряды увеличиваются только на единицу. Свойства жесткой фокусировки аномальных вихревых пучков, проходящих через линзовую систему с высокой числовой апертурой, исследовались с помощью векторной теории дифракции в [188]. Было показано, что картина полной интенсивности не является осесимметричной. Авторы обнаружили, что влияние порядка пучка на форму диаграмм интенсивности не так значительно, как влияние топологического заряда. В работе [70] методом FDTD для исследования процесса фокусировки векторного оптического вихря на металлинзу в области острого фокуса были найдены области с отрицательными значениями проекции вектора Умова-Понтинга на ось  $z$ . Этот факт указывает на наличие обратного потока энергии в фокальном распределении светового поля.

Вихревые лазерные пучки широко используются на практике. Например, их можно использовать для захвата и вращения наночастиц по окружности в плоскости поперечного сечения луча. Это свойство стало основой для создания оптических пинцетов [149, 189], с помощью которых стало возможным изучать молекулы ДНК и другие микрообъекты. Оптические вихри также используются для оптической связи [190, 191], в квантовых вычислениях [192, 193], в электрическом зондировании [150] и обнаружении вращающихся объектов [194], в нанолитографии [150] и фотолитографии [75], в криптографии. [151] и др.

В данной работе с помощью численного моделирования рассмотрен процесс фокусировки на зонной пластине (ЗП) и спирально-зонной пластине (СЗП) из кварцевого стекла. Численный эксперимент проводился в программном комплексе FullWAVE, реализующем метод конечных разностей во временной области (метод FDTD). Представлен подробный анализ полученных сфокусированных предложенными элементами вихревых полей.

В ходе нашего исследования с помощью пакета FullWAVE мы моделировали взаимодействие световых пучков с ЗП и СЗП из кварцевого стекла ( $n = 1,5$ ) на подложке. Все шаблоны элементов рассчитаны для длины волны 532

нм и фокусного расстояния, равного длине волны. Общий диаметр ЗП составляет 16 мкм, а количество колец равно 13, как и в нашем предыдущем исследовании [195]. В данной работе рассматриваются СЗП с топологическим зарядом (ТЗ)  $m = 1, 2$  и  $3$ . Суммарный диаметр СЗП составляет 8 мкм. Разница в диаметрах элементов вызвана средствами задания моделируемых объектов в пакете FullWAVE и связана с объемом оперативной памяти, необходимой для расчетов. Бинарные шаблоны предлагаемых ЗП и СЗП представлены на рисунке 3.9.

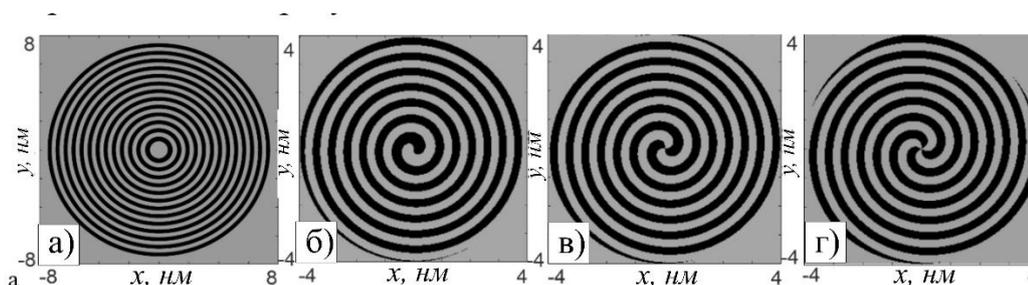


Рис. 3.9. Распределение фазы зонной пластинки (а) и СЗП с ТЗ:  $m = 1$  (б),  $m = 2$  (в),  $m = 3$  (г). Черный цвет – фаза ноль, серый цвет – фаза  $\pi$ .

В качестве падающего света для ЗП предложены линейно поляризованные гауссовы вихревые пучки с длиной волны  $\lambda = 532$  нм, перетяжкой  $w = 4$  мкм и ТЗ  $m = 1, 2$  и  $3$ . В качестве падающего света для всех СЗП предлагается линейно поляризованный гауссов пучок с длиной волны  $\lambda = 532$  нм и перетяжкой  $w = 4$  мкм.

Как было сказано выше, моделирование осуществляется программным комплексом FullWAVE, реализующим метод FDTD. Используем следующие параметры сетки: шаг 15 нм по осям  $x$  и  $y$  и 7 нм по оси  $z$ . Шаг псевдовремени  $c\Delta t$  ( $c$  — скорость света в вакууме,  $\Delta t$  — шаг по времени) составляет 5 нм согласно пределу устойчивости по Куранту [196]. Расчетные электромагнитные поля были усреднены по 10 периодам, чтобы получить стационарное поле, которое обычно регистрируется фотокамерами во время натуральных экспериментов.

### Результаты моделирования в фокусе

В этом подразделе мы проанализировали усредненную интенсивность и продольную компоненту вектора Пойнтинга в фокусе ЗП и СЗП. Сравним поля, полученные при фокусировке ЗП вихревого пучка с топологическим зарядом  $m$  и при фокусировке гауссова пучка СЗП с топологическим зарядом  $m$ . Результаты моделирования показаны ниже.

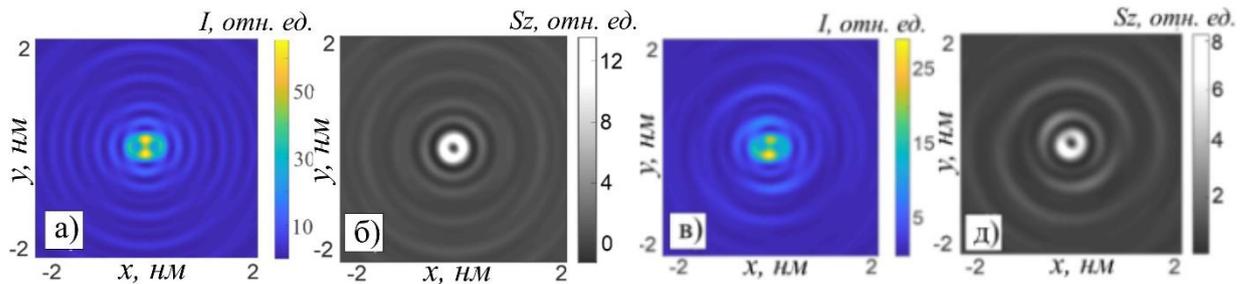


Рис. 3.10 Распределение интенсивности (а, в) и продольной составляющей вектора Пойнтинга (б, г) на расстоянии 532 нм после рельефа ЗП (а, б), освещенной вихрем с топологическим зарядом  $m = 1$  и СЗП с топологическим зарядом  $m = 1$ , освещенной гауссовым пучком (в, г).

На рис. 3.10 (а, в) видно, что распределение интенсивности двух образовавшихся фокусов практически одинаково и имеет вид двух световых пятен на вертикальной оси (вектор линейной поляризации падающего поля направлен по горизонтальной оси). Из рис. 3.10(б) видно, что осевой поток энергии в фокусе ЗП имеет форму симметричного кольца, что характерно для оптического вихря. А поток энергии в фокусе СЗП имеет вид неоднородного кольца (рис. 3.10(г)). В обоих случаях ноль на оптической оси отсутствует. Это связано с ненулевым вкладом продольной компоненты электрического поля, но поток энергии вдоль оптической оси распространяться не будет.

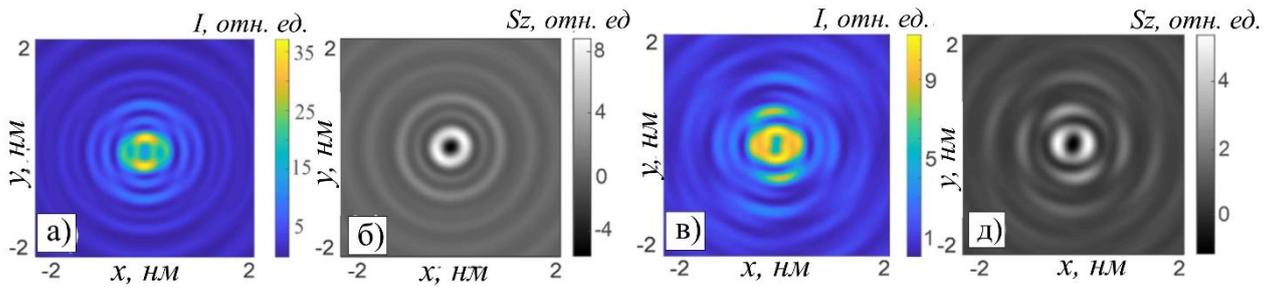


Рис. 3.11 Распределение интенсивности (а, в) и продольной составляющей вектора Пойнтинга (б, г) на расстоянии 532 нм после рельефа ЗП (а, б), освещенной вихрем с топологическим зарядом  $m = 2$  и СЗП с ТЗ  $m = 2$ , освещенной обычным гауссовым пучком (в, г).

На рис. 3.11(а) видно, что на кольце вдоль вертикальной оси в фокусе ЗП имеются два локальных максимума интенсивности, аналогично, как и на рис.3.10(а) Из рис. 3.11(в) видно, что в фокусе СЗП формируется кольцо интенсивности, которое искажено, но не распадается на два максимума. Наоборот, осевой поток энергии в фокусе ЗП (рис. 3(б)) имеет форму кольца, а поток энергии в фокусе СЗП (рис. 3(г)) имеет два локальных максимума, которые лежат на горизонтальная ось. Энергия света не распространяется вдоль оптической оси.

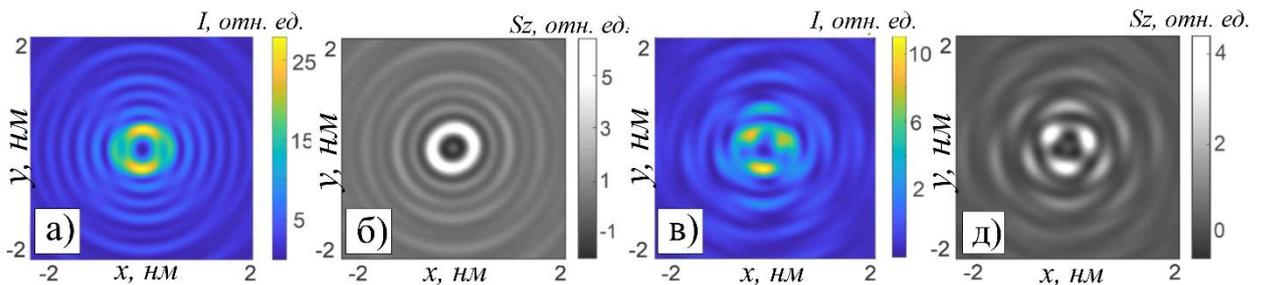


Рис. 3.12 Распределение интенсивности (а, в) и продольной составляющей вектора Пойнтинга (б, г) на расстоянии 532 нм после рельефа ЗП (а, б), освещенной вихрем с ТЗ  $m = 3$  и СЗП с ТЗ  $m = 3$ , освещенной обычным гауссовым пучком с линейной поляризацией (в, г).

На рис. 3.12 видно, что распределение интенсивности в фокальной плоскости имеет форму кольца с двумя пиками для ЗП (рис. 3.12(а)), тогда как СЗП дает три отдельных пика (рис. 3.12(в)). Продольная составляющая вектора Пойнтинга имеет вид кольца для ЗП (рис. 3.12(б)) и трех пиков для СЗП (рис. 3.13(г)). Этот результат уже обсуждался в предыдущем разделе. Отметим интересную особенность обычной ЗП, которая освещается оптическими вихрями с разными ТЗ  $m=1,2,3$ . Интенсивность в фокусе в этих трех случаях будет почти одинаковой и будет иметь два максимума интенсивности на вертикальной оси [197\*].

### **3.3 Измерение распределения интенсивности в остром фокусе амплитудной зонной пластинки**

В данном разделе теоретически и экспериментально исследуется распространение цилиндрического векторного луча второго порядка через алюминиевую линзу, образующую плотный фокус на расстоянии длины волны. Моделирование методом конечных разностей во временной области и формулами Ричардса-Вольфа дает распределения светового поля, которые совпадают с экспериментальными измерениями, полученными с помощью сканирующей оптической микроскопии ближнего поля. Показано, что металлизированный кантилевер пирамидальной формы с отверстием более чувствителен к поперечной составляющей интенсивности, чем к полной интенсивности или к вектору Умова–Пойнтинга в областях обратного потока энергии.

Сканирующая ближнепольная оптическая микроскопия (СБОМ) широко используется для исследований в области плазмоники, нанофотоники и др. [198 199 200 201 202]. Благодаря СБОМ исследователи могут обнаруживать световые поля вблизи границ раздела двух сред. Помимо распространяющихся световых волн, которые можно обнаружить с помощью классической оптической микроскопии, существуют также затухающие волны, которые обычные микроскопы обнаружить бессильны.

Существует два типа кантилеверов для регистрации излучения с помощью СБОМ: безапертурные (s-СБОМ) [203 204 205] и апертурные (a-СБОМ) [206 207 208 209]. Несмотря на то, что в последнее время наблюдается устойчивый рост применения безапертурного СБОМ, интерес к апертурному СБОМ сохраняется. Это можно объяснить большой сложностью измерений безапертурными методами СБОМ.

Существует два типа апертурных СБОМ: на основе металлизированного конического волокна и на полых пирамидальных консолях. Отличительной особенностью апертурного СБОМ, как видно из обозначения, является наличие небольшого отверстия — апертуры на конце зонда. Через этот зазор осуществляется обнаружение прошедшего излучения. Диаметр отверстий варьируется от нескольких десятков до сотен нанометров. Зазор обычно имеет форму круга, однако для решения конкретных задач можно использовать и другую форму консольной апертуры СБОМ. В [210] изучалась поляризационная чувствительность апертурных кантилеверов СБОМ с прямоугольным отверстием. Было показано, что пропускание излучения увеличивается, если поляризация падающего на кантилевер света направлена по большей стороне прямоугольника.

В [211] апертурный СБОМ на волоконной основе применялся для исследования интерференционной картины поверхностных плазмонных поляритонов, создаваемых светом с различной поляризацией. В [212] был предложен зонд, в котором микросфера закреплялась в отверстии пирамидального кантилевера. Апертурные кантилеверы с зазором в виде «бабочки» могут быть выполнены как в металлизированных волноводах [213,214], так и в пирамидальных кантилеверах [215]. Эта форма апертуры работает как наноантенна, позволяя локально усиливать световое поле, например, для литографических целей. Поляризационные свойства пирамидальных кантилеверов изучались в работах [216,217]. Показано, что в ближней зоне такие кантилеверы более чувствительны к поляризации проходящего через них излучения, чем вдали от границы раздела двух сред. В работе [218] для обнаружения люминесцирующих наночастиц использовался кантилевер с

квадратным отверстием. В [219] изучалась острая фокусировка светового поля зонной пластинкой Френеля (ЗФ). Показано, что форма фокального пятна, регистрируемого стандартным пирамидальным кантилевером СБОМ, ближе к форме поперечной компоненты интенсивности, чем к полной интенсивности, и не близка к продольной компоненте вектора Умова–Пойнтинга. Консоли с апертурой из углеродного наконечника были введены в работах [220,221]. Влияние апертурного кантилевера на процесс измерения изучалось в [222].

Ранее с помощью численного моделирования мы исследовали плотную фокусировку цилиндрических векторных пучков (ЦВП) второго порядка [223] и оптических вихрей с топологическим зарядом два [224] с фазовой зонной пластиной. Показано, что в центре фокальных пятен имеются области, в которых вектор Умова–Пойнтинга направлен против направления распространения лазерного луча. Экспериментальное исследование жесткой фокусировки таких пучков с помощью СБОМ ранее не проводилось.

Зонные пластинки Френеля и линзы на их основе широко используются в приложениях для фокусировки света [225-233]. Особый интерес представляют спиральные зонные пластины и спиральные аксиконы, позволяющие одновременно формировать и фокусировать вихревой пучок [169, 234-237]. В последнее время научное сообщество проявляет повышенный интерес к изучению более сложной фокусировки векторного поля [229,238-242]. Например, в [229] рассматривалась металинза для эффективного управления амплитудой, фазой и поляризацией. Эта металинза была изготовлена из тонкой пленки аморфного кремния. Нанобары из аморфного кремния сильно ограничивают магнитные дипольные резонансы с разностью фаз  $\pi$  на длине волны падающего света 635 нм и, таким образом, обеспечивают высокую кросс-поляризацию и нулевое пропускание ко-поляризации. Изготовленные металинзы показали эффективность фокусировки и контрастность изображения в 1,5 и 2,3 раза выше, чем у обычной зонной пластинки в пленке хрома (100 нм). В [238] теоретически и численно исследованы характеристики радиально и азимутально поляризованных пучков после прохождения плазмонных субволновых структур в виде кольцевых щелей.

В [239] исследовался эффект Холла света с гигантским угловым спином. В работе [240] методом конечных разностей во временной области (FDTD) была изучена фокусировка ЦВП спиральной метаповерхностью с единичным топологическим зарядом и единичной числовой апертурой (ЧА), фокусирующей свет на расстоянии длины волны падающего света. Показано, что эта линза создает вблизи своей поверхности круглое и кольцевое фокусные пятна для падающих ТЕ-волн и ТМ-волн соответственно. Диаметр фокального пятна для падающих ТЕ-волн был меньше дифракционного предела. Распределение интенсивности в создаваемом фокальном пятне содержало локальные (асимметричные и симметричные) области обратного потока энергии, которые могли располагаться как на периферии, так и в центре.

В данном разделе изучалось распространение цилиндрического векторного пучка второго порядка через амплитудную ЗП диаметром 15 мкм, которая фокусировала падающий пучок на расстояние длины волны падающего света ( $f=\lambda=532$  нм). Линза (или бинарная ЗП) была изготовлена с помощью химического травления, электронно-лучевой литографии и процесса отрыва в алюминиевой пленке толщиной 50 нм. Численное моделирование с применением метода FDTD и формул Ричардса–Вольфа показало, что такая линза формирует в фокальном пятне на оси область, в которой вектор Умова–Пойнтинга направлен против направления распространения падающего света (область обратный поток энергии). Как распределение продольной компоненты вектора Умова–Пойнтинга, так и интенсивность имели форму колец. Однако продольная компонента вектора Умова–Пойнтинга имела симметричное кольцо, а интенсивность – асимметричное из-за неравномерного вклада различных компонент поля. В частности, поперечная компонента интенсивности была отличной от нуля на оптической оси и имела вид трех пиков, расположенных вдоль оси  $x$ . Затем область обратного потока энергии исследовалась с помощью сканирующего ближнепольного оптического микроскопа Ntegra Spectra (NT-MDT) на основе полого пирамидального апертурного кантилевера. Экспериментально фиксировалось распределение пиковой интенсивности в фокусе (с субволновыми размерами

$\text{FWHM}_x = 0,39\lambda$  и  $\text{FWHM}_y = 0,71\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны падающего излучения 532 нм). Это свидетельствовало о чувствительности кантилевера к поперечной составляющей напряженности светового поля в области обратного потока энергии.

ЦВП используется в самых разных приложениях, таких как наноструктурирование, оптический захват и оптические телекоммуникации [243,244]. Кроме того, актуальны исследования в области спин-орбитального преобразования в узком фокусе пучков с гибридной поляризацией [241,242]. Исследование поведения ЦВП важно из-за присутствующих различных поляризационных эффектов, например, обратного потока энергии в его узком фокусе. При этом особое значение имеет проблема экспериментального обнаружения этих эффектов.

#### ***Расчет и изготовление ЗП***

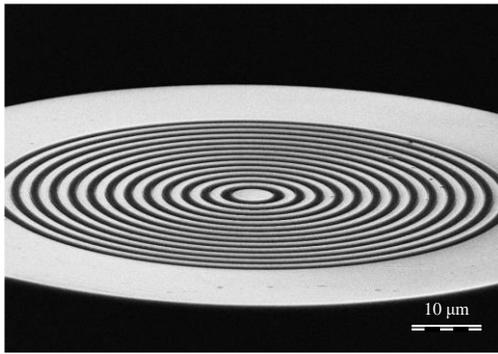
Предлагаемая линза имела форму концентрических колец. Радиусы колец рассчитывались по формуле:

$$r_p = \left( p\lambda f - \frac{p^2 \lambda^2}{4} \right)^{1/2}, \quad (3.5)$$

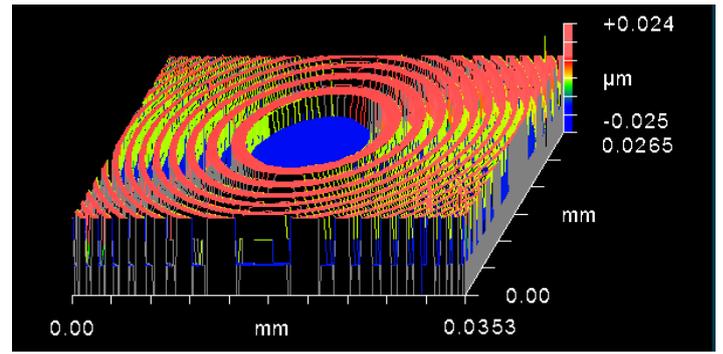
где  $r_p$  — радиус края рельефного кольца,  $p$  — номер концентрической зоны,  $\lambda$  — длина волны падающего луча,  $f$  — фокусное расстояние. Предлагаемая линза рассчитана на освещение с  $\lambda = 532$  нм и  $f = \lambda$ . Диаметр линзы составлял 15 мкм. Числовая апертура объектива с этими параметрами составила 0,99749.

Для изготовления субволнового дифракционного оптического элемента использовались технологии, включающие литографию, химическое травление и процесс отрыва. В качестве подложки будущего элемента использовался кварц. Шероховатость поверхности не превышала 10 нм. Металлическую пленку наносили на кварцевую подложку с помощью системы магнетронного напыления CarolineD12A (ESTO-Vacuum, Inc., Москва, Россия). Металлический слой формировался при осаждении алюминия при вакуумметрическом давлении  $10^{-3}$  Па и мощности 300–700 Вт. Толщина пленки алюминия контролировалась

временем осаждения и составляла 50 нм. Далее в центрифуге наносился резист для электронно-лучевой литографии. Толщина нанесенного резиста составляла 400 нм (контролировалось на профилометре P-16 (KLA-Tencor, Inc., Милпитас, Калифорния, США)). Экспонирование резиста проводили с помощью SEM-микроскопа с разрешением 10 нм. Затем оставшуюся маску удаляли с резиста химическим путем. Полученную структуру очищали и обжигали для повышения адгезионных свойств. Тонкую пленку хрома наносили на установке для магнетронного напыления CarolineD12A (ESTO-Vacuum, Inc.). Осаждение происходило при следующих параметрах: 700 Вт и  $10^{-3}$  Па. Толщина пленки составляла 45 нм. Кроме того, был использован процесс отрыва. Резист удалялся ацетоном вместе с пленкой хрома на нем. Это позволило получить негативную маску в хrome по сравнению с маской на резисте. Металлический слой удаляли через пленку хрома с помощью NaOH. На последнем этапе хромовую маску удаляли гексацианоферратом (III) калия ( $K_3[Fe(CN)_6]$ ) в течение 10 мин. Изображение изготовленной линзы, полученное с помощью SEM-микроскопа, представлено на рис. 3.13а. Для проверки качества изготовления и параметров изготовленного элемента применялся оптический интерферометр белого света («Zygo New View 7300»). Размеры анализируемой области составляли  $35 \text{ мкм} \times 26 \text{ мкм}$ , оптическое увеличение —  $200\times$ . Рельефная высота линзы составляла 50 нм. Результаты измерений представлены на рис. 3.13б.



(a)



(б)

Рис. 3.13 Изготовленная алюминиевая линза: СЭМ-изображение (а); карта поверхности линзы, полученная с помощью оптического интерферометра белого света (б).

### *Результаты моделирования методом FDTD*

Моделирование проводилось методом конечных разностей во временной области FDTD ((FD)<sup>2</sup>TD), реализованным в программе FullWAVE. В расчетах использовались следующие параметры сетки: шаг по пространству 15 нм, шаг псевдовремени  $c\Delta t$  выбран равным 7,5 нм в соответствии с условием Куранта. При анализе результатов моделирования компоненты поля усреднялись по 10 периодам. Параметры линзы при моделировании (диаметр, фокусное расстояние, глубина рельефа) соответствовали параметрам изготовленного элемента. Возможные производственные ошибки не учитывались.

Интенсивность в фокусе рассчитывалась по формуле:

$$I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2 = I_x + I_y + I_z, \quad (3.6)$$

где  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  — компоненты электрического поля;  $I_x$ ,  $I_y$  и  $I_z$  — компоненты распределения интенсивности. Вектор Умова–Пойнтинга вычислялся по формуле:

$$\mathbf{S} = \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}), \quad (3.7)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — векторы электрического и магнитного полей в фокусе с компонентами  $(E_x, E_y, E_z)$  и  $(H_x, H_y, H_z)$  соответственно. Начальное световое поле было выбрано равным  $\mathbf{E} = (\sin 2\varphi, \cos 2\varphi, 0)$ , где  $\varphi$  — полярный угол в плоскости

XY при  $z = 0$ . Результаты фокусировки на расстоянии  $f = 532$  нм показаны на рис. Рисунки 3.14 и 3.15.

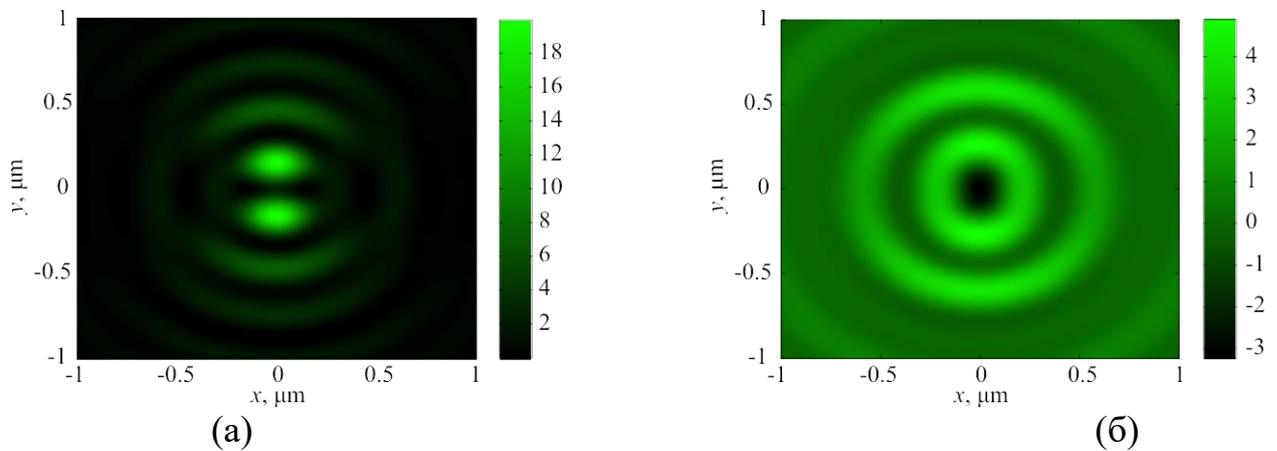


Рис. 3.14 Распределение полной интенсивности (а) и продольной составляющей вектора Умова–Пойнтинга (б) в фокусе амплитудной ЗП (рис.3.13), полученном FDTD-методом, при освещении цилиндрическим векторным пучком второго порядка.

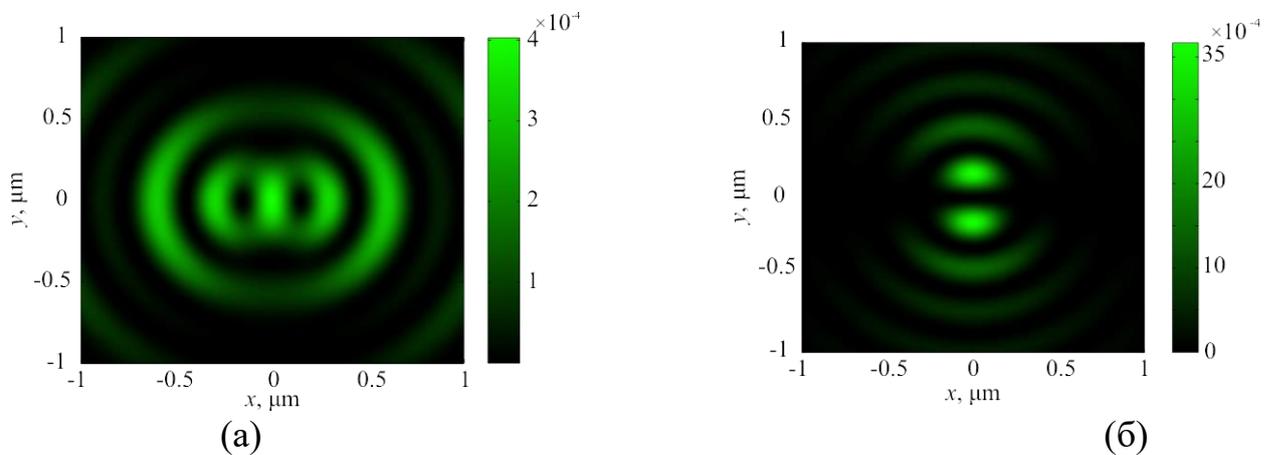


Рис. 3.15 Поперечная  $I_r = I_x + I_y$  (а) и продольная  $I_z$  (б) компоненты интенсивности в фокусе, полученные методом FDTD.

Из рис. 3.14а видно, что полная интенсивность имеет в фокусе два лепестка, расположенных вертикально, которые определяются продольной составляющей интенсивности (рис.3.15б) имеет вид значка бесконечности (лежащей восьмерки) в эллиптическом кольце. Кольцо вытянуто вдоль горизонтального направления.

Продольной компоненты вектора Умова–Пойнтинга в плоскости фокуса (рис.3.14б) имеют двух кольцевую структуру. При этом отрицательные значения наблюдались в центре кольца, образованного продольной компонентой вектора Умова–Пойнтинга (обратный поток энергии).

### *Численное моделирование по формулам Ричардса–Вольфа*

Для проверки правильности результатов моделирования FDTD методом было также проведено моделирование другим способом. Острая фокусировка света с помощью бинарной амплитудной ЗП была промоделирована, используя формулы Ричардса–Вольфа [245]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\rho, \psi, z) = & \frac{if}{\lambda} \int_0^{\alpha_{\max}} \int_0^{2\pi} \mathbf{B}(\theta, \varphi) T(\theta) l(\theta) \mathbf{P}(\theta, \varphi) \times \\ & \times \exp\{ik[\rho \sin \theta \cos(\varphi - \psi) + z \cos \theta]\} \sin \theta d\theta d\varphi, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $\mathbf{U}(\rho, \psi, z)$  — магнитное или электрическое поле в фокусе,  $\mathbf{B}(\theta, \varphi)$  — падающее магнитное или электрическое поле ( $\theta$  и  $\varphi$  — азимутальный и полярный углы соответственно),  $T(\theta)$  — функция аподизации (может быть записана как  $T(\theta) = \cos^{1/2}\theta$  и  $T(\theta) = \cos^{-3/2}\theta$  для апланатической линзы и плоской дифракционной линзы соответственно),  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волны падающего света,  $\alpha_{\max}$  — максимальный полярный угол, определяемый числовой апертурой предлагаемой линзы ( $NA = \sin\alpha_{\max}$ ), а  $\mathbf{P}(\theta, \varphi)$  — матрица поляризации для магнитного и электрического полей:

$$\mathbf{P}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 + \cos^2 \varphi (\cos \theta - 1) \\ \sin \varphi \cos \varphi (\cos \theta - 1) \\ -\sin \theta \cos \varphi \end{bmatrix} a(\theta, \varphi) + \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \varphi (\cos \theta - 1) \\ 1 + \sin^2 \varphi (\cos \theta - 1) \\ -\sin \theta \sin \varphi \end{bmatrix} b(\theta, \varphi), \quad (3.9)$$

где  $a(\theta, \varphi)$  и  $b(\theta, \varphi)$  — функции поляризации для  $x$ - и  $y$ -компонент стартового луча соответственно.

Векторы Джонса для луча с цилиндрической поляризацией  $m$ -го порядка можно записать как:

$$\mathbf{E}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

в случае электрического поля и

$$\mathbf{H}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(m\varphi) \\ -\sin(m\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

в случае магнитного поля. Вектор Умова–Пойнтинга рассчитывали по уравнению (3.7). При расчете предполагалось, что линза освещается ЦВП второго порядка в виде моды Лагерра–Гаусса (0,1), которая в координатах выходного зрачка имела следующий вид:

$$l(\theta) = \sin(\theta) \exp\left\{-\beta^2 \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_{max}}\right\}, \quad (3.12)$$

где параметр  $\beta$  описывает положение линзы и радиусы луча  $\beta = R/\omega$ . Параметр  $\beta$  равнялся единице, что соответствовало эксперименту.

Уравнение (3.8) было справедливо для фокусировки света в свободном пространстве, вдали от разделения двух сред, но качественно результаты совпали с расчетом методом FDTD. Распределения сфокусированного света представлены на рис. 3.16 и рис.3.17: на рис. 3.16 показано распределение интенсивности  $I = I_x + I_y + I_z$  и продольной компоненты вектора Умова–Пойнтинга  $S_z$ , а на рис. 3.17 — распределение поперечного сечения  $I_r = I_x + I_y$  и продольные компоненты интенсивности  $I_z$ .

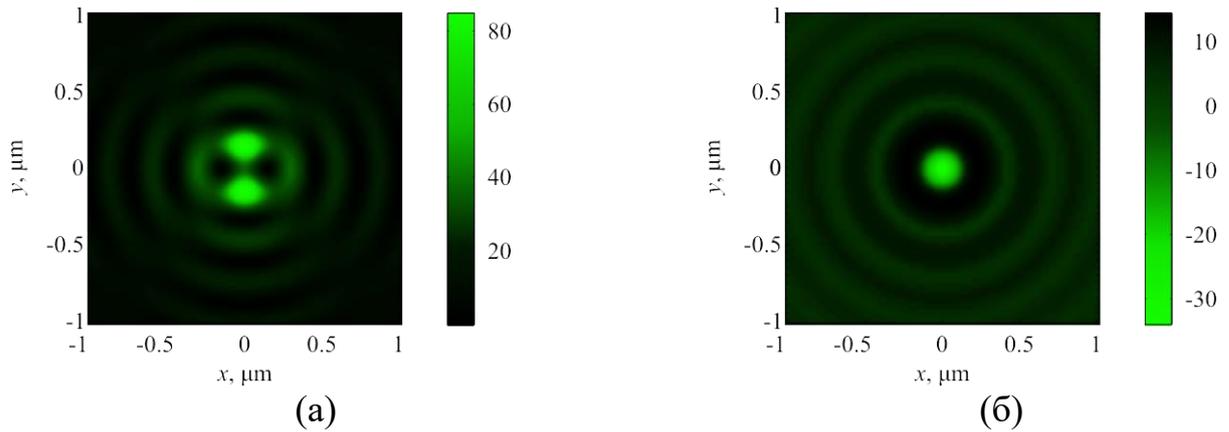


Рис. 3.16 Суммарная интенсивность  $I = I_x + I_y + I_z$  (а) и продольная компонента вектора Умова–Пойнтинга  $S_z$  (б) в фокусе, полученные по формулам Ричардса–Вольфа.

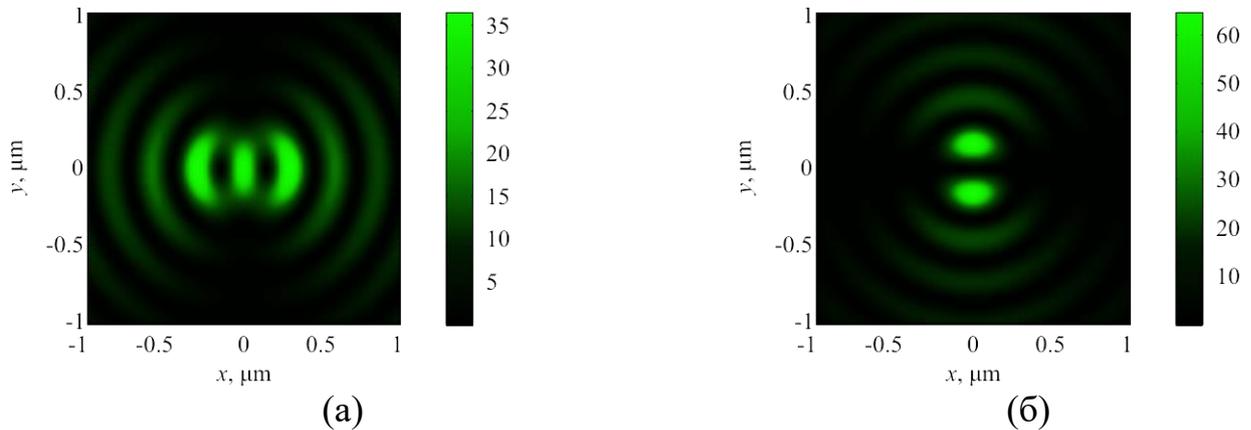


Рис. 3.17 Поперечная  $I_r = I_x + I_y$  (а) и продольная  $I_z$  (б) компоненты интенсивности в фокусе, полученные по формулам Ричардса–Вольфа.

При этом качественно наблюдались те же распределения интенсивности, что и при моделировании FDTD. Однако в распределении поперечной составляющей интенсивности центральный пик был больше (рис. 3.17а), чем в случае освещения плоской волной (рис. 3.14а). Это было вызвано использованием моды Лагерра–Гаусса (3.12), которая по сути была эквивалентом кольцевой апертуры. Центральная часть линзы не участвовала в процессе фокусировки при таком освещении, а эффекты плотной фокусировки усиливались. При этом поворот исходного луча на 90 градусов приводил к такому же повороту (рис. 3.16 и 3.17), а

максимумы поперечной составляющей (рис. 3.17а) располагались вдоль горизонтальной оси.

### Эксперимент

С помощью сканирующего ближнепольного оптического микроскопа Ntegra Spectra исследована фокусировка ЦВП второго порядка. Схема эксперимента представлена на рисунке 6.

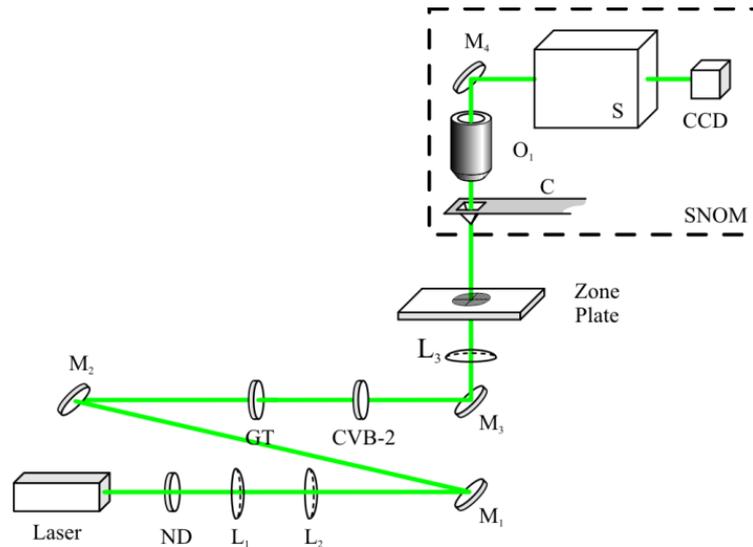


Рис. 3.18 Экспериментальная установка. Лазер LCM-S-111-20-R (50 мВт, 532 нм);

ND — фильтр нейтральной плотности;  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  — линзы с фокусным расстоянием  $f_1 = 35$ ,  $f_2 = 100$  и  $f_3 = 10$  мм соответственно;  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  и  $M_4$  — зеркала; GT — призма Глана–Тейлора; CVB-2 — преобразователь поляризации (Thorlabs WPV10-532); C – кантилевер диаметром 100 нм (SNOM\_C, NT-MDT); S – спектрометр (Solar ТП, Nanofinder 30); O1 представляет собой 100-кратный объектив (100-кратный объектив Mitutoyo Plan Apo Infinity Corrected Long WD); CCD — это ПЗС-камера (Andor, DV401-BV).

Консоль СБОМ имела форму полой пирамиды из тонкого слоя алюминия с отверстием в вершине. Размер отверстия составлял около 90 нм. СЭМ-изображение используемого кантилевера представлено на рис. 3.19 Поперечное сканирование области фокуса проводилось с точностью 35 нм.

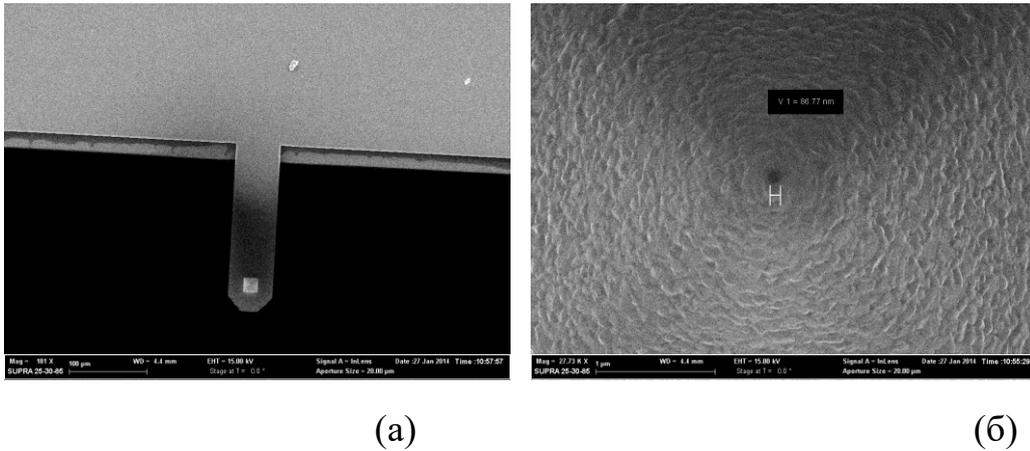


Рис. 3.19 СЭМ-изображения кантилевера: полный вид (а) и увеличенный снимок его апертуры (б).

Измерения СБОМ показали, что картина интенсивности в фокальной плоскости носила пиковый характер. Пример распределения интенсивности в фокусе (расстояние от рельефа линзы составляло 0,6 мкм) и его сечения представлены на рис. 3.20.

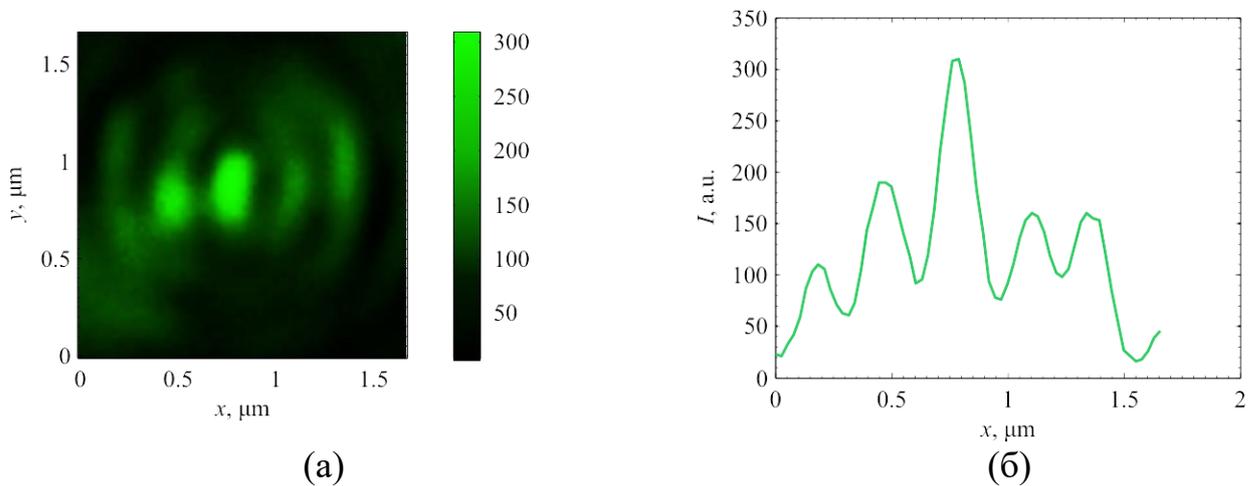


Рис. 3.20 Картина интенсивности (а) и ее распределение по оси абсцисс (б) в фокусе, измеренном с помощью СБОМ.

Размеры фокального пятна в полную ширину половины максимума интенсивности (рис. 3.20) составили  $\text{FWHM}_x = 0,39\lambda$  и  $\text{FWHM}_y = 0,71\lambda$ .

Сравнение рисунков 3.15, 3.17 и 3.20 показало качественное соответствие между результатами, полученными с помощью СБОМ (рис. 3.20), и распределением поперечной составляющей интенсивности светового поля  $I_r = I_x + I_y$  при моделировании (рис. 3.15а и 3.17а). Хотя при численном моделировании боковые пики по оси  $y$  оказались более выраженными, чем в эксперименте [246\*, 247\*].

### Выводы к главе 3

1. Представлено сравнительное моделирование фокусировки оптических вихрей с помощью ЗП и СЗП. Для численного моделирования использовался пакет программ FullWAVE, основанный на методе конечных разностей во временной области. Сопоставлены электромагнитные поля, формируемые ЗП, освещенной линейно поляризованным гауссовым вихревым пучком, и СЗП, освещенной линейно поляризованным гауссовым пучком. Распределение интенсивности в фокусе светосильной ЗП, освещенной оптическим вихрем с линейной поляризацией и топологическим зарядом  $m = 3$ , имеет вид двух локальных максимумов, лежащих на вертикальной оси (направление начальной поляризации по горизонтальной оси). Таким образом, при фокусировке бинарная ЗП «ведет себя» почти как идеальная сферическая линза. По-иному «ведет себя» СЗП при фокусировке линейно поляризованного гауссова пучка. Благодаря многолучевой структуре СЗП вблизи центра поток энергии и распределение интенсивности в остром фокусе имеют три «лепестка». Однако трехлепестковая структура потока интенсивности и энергии не сохраняется. Она исчезает на расстоянии 15 мкм от СЗП, где формируется светлое кольцо [157\*, 167\*, 197\*].
2. Рассмотрена фокусировка цилиндрического векторного лазерного пучка второго порядка с амплитудной линзой с фокусным расстоянием 532 нм и диаметром 15 мкм, изготовленной методами химического травления, электронной литографии и процесса отрыва. в алюминиевой пленке толщиной 50 нм [246\*, 247\*]. Численно доказано, что такая линза создает в фокальном пятне на оси

область, где вектор Умова–Пойнтинга направлен против направления распространения света (область обратного оттока энергии), а на оптической оси поперечная составляющая интенсивности отлична от нуля. и имел вид трех пиков вдоль оси абсцисс. Область обратного потока энергии изучали с помощью сканирующего ближнепольного оптического микроскопа Ntegra Spectra (NT-MDT) с использованием кантилевера с полой пирамидальной апертурой. Экспериментально фиксировалось распределение пиковой интенсивности в фокусе (с субволновыми размерами  $\text{FWHM}_x = 0,39\lambda$  и  $\text{FWHM}_y = 0,71\lambda$ ). Сравнение распределений интенсивности, регистрируемых кантилевером СБОМ, и особенностей распределений светового поля, рассчитанных с помощью метода  $(\text{FD})^2\text{TD}$  и формул Ричардса–Вольфа, позволило сделать вывод о чувствительности кантилевера к поперечной интенсивности компонент. Однако он не был чувствителен ни к полной интенсивности, ни к компонентам вектора Умова–Пойнтинга в областях обратного потока энергии. Наши результаты по чувствительности кантилевера к поперечной составляющей интенсивности согласуются с исследованиями, представленными в [50].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие основные научные результаты:

1. Рассмотрена суперпозиция нескольких одинаковых параллельных однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса. Как для начальной плоскости, так и для дальней зоны аналитически показано и численно подтверждено, что в случае вещественных весовых коэффициентов суперпозиции (то есть все пучки имеют одинаковую фазу, но могут иметь разную амплитуду), общий топологический заряд суперпозиции равен топологическому заряду каждого отдельного пучка. Также показано, что наличие фазовой задержки между пучками позволяет менять общий топологический заряд суперпозиции [53\*]. Полученный результат может использоваться при передаче информации несколькими вихревыми пучками с помощью модуляции задержки фазы между ними.

2. Рассмотрены осевые суперпозиции Гауссовых оптических вихрей, которые описываются геометрической прогрессией. Для всех вариантов рассмотренных суперпозиций получен топологический заряд. В начальной плоскости топологический заряд может быть целым или полуцелым, а при распространении светового поля в свободном пространстве топологический заряд всегда остается целым. В общем случае геометрическая прогрессия оптических вихрей имеет три целочисленных параметра и один действительный параметр. От величины этих четырех параметров зависит топологический заряд всей суперпозиции оптических вихрей. При распространении в пространстве суперпозиция оптических вихрей, описываемая геометрической прогрессией, не сохраняет своей структуры интенсивности, но может иметь число лепестков интенсивности, равное одному из параметров семейства. Если действительный параметр геометрической прогрессии оптических вихрей равен единице, то все угловые гармоники в суперпозиции имеют одинаковый вес. В этом случае топологический заряд суперпозиции равен номеру средней угловой гармоники в прогрессии, то есть, если первая угловая гармоника в прогрессии имеет

топологический заряд  $k$ , а последняя –  $n$ , то топологический заряд всей суперпозиции в начальной плоскости будет равен  $(n + k)/2$ , а при распространении топологический заряд будет равен  $n$  [40\*].

3. Показано, что вихревой пучок Лагерра-Гаусса (ЛГ) «в квадрате» является Фурье-инвариантным и сохраняет свою структуру в фокусе сферической линзы. В зоне дифракции Френеля такой пучок преобразуется в суперпозиции обычных пучков ЛГ, число которых равно числу колец у пучка ЛГ «в квадрате». Если кольцо всего одно, то пучок является структурно-стабильным. Также рассмотрен более общий пучок, являющийся «произведением» двух пучков ЛГ. Такой пучок будет Фурье-инвариантным, если число колец у двух пучков ЛГ в «произведении» одинаковое [106\*, 107\*, 108\*]. Рассмотренные пучки дополняют хорошо известный базис пучков ЛГ, которые интенсивно изучаются в связи с их устойчивостью при распространении в турбулентности.

4. Рассмотрен новый пучок Лагерра-Гаусса (ЛГ), который отличается от обычных модовых пучков ЛГ, сохраняющих с точностью до масштаба структуру распределения интенсивности. Этот пучок не сохраняет свою структуру при распространении в свободном пространстве, но обладает некоторыми интересными свойствами. Этот пучок Фурье-инвариантный, имеет в начальной плоскости (в плоскости перетяжки) и в дальней зоне дифракции увеличенную область темного. То есть при сохранении топологического заряда пучка, меняя радиальный индекс многочлена ЛГ, можно увеличивать эффективный диаметр центрального темного пятна интенсивности, или уменьшать. Кроме того, данный пучок обладает свойством автофокусировки, то есть на расстоянии Рэлея от перетяжки распределение интенсивности имеет вид светового кольца (при любом значении радиального индекса) с минимальным диаметром и максимальной интенсивностью на кольце [123\*, 124\*]. Данный пучок можно применять для манипулирования микрочастицами без использования дополнительной сферической линзы для его фокусировки.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Kang, L. High-Harmonic Optical Vortex Generation from Photonic Bound States in the Continuum / L. Kang, Yu. Wu, X. Ma, S. Lan, D.H. Werner // *Adv. Opt. Mat.* – 2022. – Vol. 10. – 2101497. <https://doi.org/10.1002/adom.202101497>.
- [2] Volyar, A.V. Transformations of structurally stable states of spiral beams subjected to sector perturbations / A.V. Volyar, Y.E. Akimova // *Comput. Opt.* – 2021. – Vol. 45. – P. 789–799. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-1009>.
- [3] Kovalev, A.A. Off-axis elliptic Gaussian beams with an intrinsic orbital angular momentum / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, D.S. Kalinkina, A.G. Nalimov // *Comput. Opt.* – 2021. – Vol. 45. – P. 809–817. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-916>.
- [4] Habibi, F. Evaluation of nonlinear behavior of Airy, cos-Airy, and cosh-Airy beams with and without optical vortex / F. Habibi, M. Moradi // *J. Opt.* – 2022. – 24. – P. 045507. <https://doi.org/10.1088/2040-8986/ac4e5e>.
- [5] Kotlyar, V.V. Fourier-Bessel beams of finite energy / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, D.S. Kalinkina, E.S. Kozlova // *Comput. Opt.* – 2021 – Vol. 45 – P. 506–511. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-864>.
- [6] Chen, J.; Wan, C.; Chong, A.; Zhan, Q. Experimental demonstration of cylindrical vector spatiotemporal optical vortex. *Nanophotonics* 2021, Vol. 10, 4489–4495. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2021-0427>.
- [7] Kozlova, E.S. Transverse intensity at the tight focus of a second-order cylindrical vector beam / E.S. Kozlova, S.S. Stafeev, S.A. Fomchenkov, V.V. Podlipnov, V.V. Kotlyar // *Comput. Opt.* – 2021. – Vol. 45, – P. 165–171. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-835>.
- [8] Wang, J. Tunable Brillouin-erbium fiber laser producing multiwavelength cylindrical vector beams / J. Wang, J. Zhang, A. Wang, J. Yao, X. Jiang, Q. Zhan // *Opt. Laser Technol.* – 2022. – Vol. 149. – 107852. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2022.107852>.

- [9] Stafeev, S.S. Focusing a second-order cylindrical vector beam with a gradient index Mikaelian lens / S.S. Stafeev, E.S. Kozlova, A.G. Nalimov // *Comput. Opt.* – 2020. – Vol. 44. – P. 29–33. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-633>.
- [10] Pan, D. Conversions of linear-circular polarizations and spin-orbital angular momentums in a focused vector vortex beam with fractional topological charges / D. Pan, K.-H. Chew, Y. Wu, R.-P. Chen // *Optik.* – 2022. – Vol. 252. – 168473. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.168473>.
- [11] Stafeev, S.S. Focusing cylindrical vector beams with fractional order / S.S. Stafeev, V.D. Zaitsev // *Comput. Opt.* – 2021. – Vol. 45 – P. 172–178. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-805>.
- [12] Song, L. Virtual source for the fractional-order Bessel—Gauss beams. / L. Z. Song, Ren, C. Fan. Y. Qian, // *Opt. Commun.* – 2021. – Vol. 499. – 127307. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2021.127307>.
- [13] Kotlyar, V.V. Evolution of an optical vortex with initial fractional topological charge / V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov // *Comput. Opt.* – 2021. – Vol. 45. – P. 5–12. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-766>.
- [14] Long, J. Generation of optical vortex lattices by a coherent beam combining system / J. Long, T. Hou, Q. Chang, T. Yu, R. Su, P. Ma, Y. Ma, P. Zhou, L. Si // *Opt. Lett.* – 2021. – Vol. 46. – P. 3665–3668. <https://doi.org/10.1364/OL.425186>.
- [15] Ikonnikov, D.A. 3D Optical vortex lattices / D.A. Ikonnikov, S.A. Myslivets, V.G. Arkhipkin, A.M. Vyunishev // *Ann. Phys.* – 2021. – Vol. 533. – 2100114. <https://doi.org/10.1002/andp.202100114>.
- [16] Yang, Y. Optical trapping with structured light: A review / Y. Yang, Y. Ren, M. Chen, Y. Arita, C. Rosales-Guzmán // *Adv. Photon.* – 2021. – Vol. 3. – 034001. <https://doi.org/10.1117/1.AP.3.3.034001>.
- [17] Nalimov, A.G. Optical force acting on a particle in the presence of a backward energy flow near the focus of a gradient lens / A.G. Nalimov // *Comput. Opt.* – 2020. – Vol. 44. – P. 871–875. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-744>.

- [18] Zhou, Y. Rotating of metallic microparticles with an optimal radially polarized perfect optical vortex / Y. Zhou, Y. Zhang, W. Gao, S. Yan, M. Li, X. Li, P. Wang, B. Yao // *J. Opt.* – 2022. – Vol. 24. – 064003.
- [19] Yang, Q. Ultra-secure optical encryption based on tightly focused perfect optical vortex beams / Q. Yang, Z. Xie, M. Zhang, X. Ouyang, Y. Xu, Y. Cao, S. Wang, L. Zhu, X. Li // *Nanophotonics*. – 2022. – Vol. 11. – P. 1063–1070. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2021-0786>.
- [20] Zhang, Q. Parallel Coded Optical Vortex Beam Free-Space Communication Based on Single-Photon Detection / Q. Zhang, C. Pang, L. Yang, Z. Li, H. Huang, G. Wu, // *IEEE Phot. J.* – 2022. – Vol. 14. – P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/JPHOT.2022.3164531>.
- [21] Li, C. Optical vortices in nanophotonics / C. Li, S.A. Maier, H. Ren // *Chin. Opt.* – 2021. – Vol. 14. – P. 792–811. <https://doi.org/10.37188/CO.2021-0066>.
- [22] Pryamikov, A. Optical vortices in waveguides with discrete and continuous rotational symmetry / A. Pryamikov, L. Hadzievski, M. Fedoruk, S. Turitsyn, A. Aceves // *J. Eur. Opt. Soc.-Rapid. Publ.* – 2021. – Vol. 17. – 23. <https://doi.org/10.1186/s41476-021-00168-5>.
- [23] Volyar, A.V. Reconstruction of stable states of spiral vortex beams / A.V. Volyar, E.G. Abramochkin, Y.E. Akimova, M.V. Bretsko // *Comput. Opt.* – 2022. – 46. – P. 5–15. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-1032>.
- [24] Allen, L. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // *Phys. Rev. A.* – 1992. – Vol. 45. – P. 8185–8189. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.8185>.
- [25] Durnin, J. Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, Jr., J.H. Eberly // *Phys. Rev. Lett.* – 1987. – Vol. 58. – P. 1499–1501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1499>.
- [26] Gori, F. Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // *Opt. Commun.* – 1987. – Vol. 64. – P. 491–495. [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(87\)90276-8](https://doi.org/10.1016/0030-4018(87)90276-8).

- [27] Kotlyar, V.V. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Almazov, S.N. Khonina, V.A. Soifer, H. Elfstrom, J. Turunen // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2005. – Vol. 22. – P. 849–861. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.22.000849>.
- [28] Kotlyar, V.V. Hypergeometric modes / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Opt. Lett.* – 2007. – Vol. 32, . – P. 742–744. <https://doi.org/10.1364/OL.32.000742>.
- [29] Karimi, E. Hypergeometric-Gaussian modes / E. Karimi, G. Zito, B. Piccirillo, L. Marrucci, E. Santamato // *Opt. Lett.* – 2007. – Vol. 32. – P. 3053–3055. <https://doi.org/10.1364/OL.32.003053>.
- [30] Bandres, M.A. Circular beams / M.A. Bandres, J.C. Gutiérrez-Vega // *Opt. Lett.* – 2008. – Vol. 33. – P. 177–179. <https://doi.org/10.1364/OL.33.000177>.
- [31] Bandres, M.A. Elliptical beams / M.A. Bandres, J.C. Gutiérrez-Vega // *Opt. Express.* – 2008. – Vol. 16. – P. 21087–21092. <https://doi.org/10.1364/OE.16.021087>.
- [32] Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Opt. Lett.* – 2014. – Vol. 39. – P. 2395–2398. <https://doi.org/10.1364/OL.39.002395>.
- [33] Abramochkin, E.G. Generalized Gaussian beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // *J. Opt. A Pure Appl. Opt.* 2004, 6, S157–S161. <https://doi.org/10.1088/1464-4258/6/5/001>.
- [34] Kotlyar, V.V. Topological charge of a linear combination of optical vortices: Topological competition / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.V. Volyar // *Opt. Express.* – 2020. – Vol. 28. – P. 8266–8281. [ps://doi.org/10.1364/OE.386401](https://doi.org/10.1364/OE.386401).
- [35] Berry, M.V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *J. Opt. A Pure Appl. Opt.* – 2004. – Vol. 6. – P. 259–268. <https://doi.org/10.1088/1464-4258/6/2/018>.
- [36] Fu, D. Realization of a scalable Laguerre-Gaussian mode sorter based on a robust radial mode sorter / D. Fu, Y. Zhou, R. Qi, S. Oliver, Y. Wang, S. M. H.

- Rafsanjani, J. Zhao, M. Mirhosseini, Z. Shi, P. Zhang, R.W. Boyd // *Opt. Express.* – 2018. – Vol. 26. – P. 33057–33065.
- [37] Kotlyar, V.V. Optical vortex beams with a symmetric and almost symmetric OAM spectrum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2021. – Vol. 38. – P. 1276–1283. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.432623>.
- [38] Gbur, G. Fractional vortex Hilbert’s hotel / G. Gbur // *Optica.* – 2016. – Vol. 3. – P. 222–225. <https://doi.org/10.1364/OPTICA.3.000222>.
- [39] Nalimov, A.G. Topological charge of optical vortices in the far field with an initial fractional charge: Optical “dipoles” / A.G. Nalimov, V.V. Kotlyar // *Comput. Opt.* – 2022. – Vol. 46. – P. 189–195. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-1073>.
- [40] Kotlyar, V. Geometric Progression of Optical Vortices / V. Kotlyar, A. Kovalev, E. Kozlova, A. Savelyeva, S. Stafeev // *Photonics.* – 2022. – V.9. – P.407. DOI: 10.3390/ photonics9060407.
- [41] Molina-Terriza, G. The curious arithmetic of optical vortices / G. Molina-Terriza, J. Recolons, L. Torner // *Opt. Lett.* – 2000. – Vol. 25. – P. 1135-1137. DOI: 10.1364/OL.25.001135.
- [42] Pyragaite, V. The interference of higher order Laguerre-Gaussian beams / V. Pyragaite, V. Smievicius, A. Stabinis, V. Maslinska // *Lithuanian Journal of Physics.* – 2007. – P. 47(1) . – P. 21–26. DOI: 10.3952/lithjphys.47101.
- [43] Pyragaite, V. Free-space propagation of overlapping light vortex beams / V. Pyragaite, A. Stabinis // *Opt Commun.* – 2002. – Vol. 213(4-6) . – P. 187–191. DOI: 10.1016/S0030-4018(02)02083-7.
- [44] Lopez-Mago, D. Dynamics of polarization singularities in composite optical vortices / D. Lopez-Mago, B. Perez-Garcia, A. Yepiz, R.I. Hernandez-Aranda, J.C. Gutiérrez-Vega // *J Opt.* – 2013. – Vol. 15(4). – 044028. DOI: 10.1088/2040-8978/15/4/044028.
- [45] Naik, D.N. Generation of singular optical beams from fundamental Gaussian beam using Sagnac interferometer / D.N. Naik, N.K. Viswanathan // *J Opt.* – 2016. – Vol. 18(9). – 095601. DOI: 10.1088/2040-8978/18/9/095601.

- [46] Cheng, K. Composite coherence vortices in coherent and incoherent superpositions of two off-axis partially coherent vortex beams / K. Cheng, B. Lü // *J Mod Opt.* – 2008. – Vol. 55(17). – P. 2751–2764. DOI: 10.1080/09500340802167524.
- [47] Sukhorukov, A.P. Superposition of noncoaxial vortices in parametric wave mixing / A.P. Sukhorukov, A.A. Kalinovich, G. Molina-Terriza, L. Torner // *Phys Rev E.* – 2002. – Vol. 66(3). – 036608. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.036608.
- [48] Zhang, Y. Splitting, generation, and annihilation of phase singularities in non-coaxial interference of Bessel-Gaussian beams / Y. Zhang, Z. Wu, K. Yang, P. Li, F. Wen, Y. Gu // *Physica Scripta.* – 2021. – Vol. 96(12) . – 125105. DOI: 10.1088/1402-4896/ac2185.
- [49] Kotlyar, V.V. Topological charge of two parallel Laguerre-Gaussian beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, P. Amiri, P. Soltani, S. Rasouly // *Opt Express.* – 2021. – Vol. 29(26). – P. 42962-42977. DOI: 10.1364/OE.446743.
- [50] Kovalev, A.A. Orbital angular momentum of superposition of identical shifted vortex beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar // *J Opt Soc Am A.* – 2015. – Vol. 32(10) . – P. 1805-1810. DOI: 10.1364/JOSAA.32.001805.
- [51] Kotlyar V.V., Kovalev A.A. Topological charge of optical vortices [In Russian]. Samara: Novaya Technika, 2021. ISBN: 978-5-88940-157-5.
- [52] Kotlyar, V.V. Topological Charge of Coaxial Superposition of Bessel-Gauss Laser Beams / V. V. Kotlyar, A. A. Kovalev, E. S. Kozlova and A. A. Saveleyeva // *IEEEExplore: 2021 Photonics & Electromagnetics Research Symposium (PIERS).* —2022. —P. 969-975. DOI: 10.1109/PIERS53385.2021.9694675.
- [53] Котляр, В.В. Топологический заряд суперпозиции одинаковых параллельных однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.А. Савельева // *Компьютерная оптика.* – 2022. – Т. 46, № 2. – С. 184-188. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1086.
- [54] Arkhelyuk, O.O. Creation and diagnostics of stable rainbow optical vortices / O.O. Arkhelyuk, P.V. Polyanskii, A.A. Ivanovskii, M.S. Soskin // *Opt Appl* 2004. – XXXIV. – P. 419–26.

- [55] Denisenko, V. Determination of topological charges of polychromatic optical vortices / V. Denisenko, V. Shvedov, A.S. Desyatnikov, D.N. Neshev, W. Krolikovski, A. Volyar, M. Soskin, Y.S. Kivshar // *Opt. Express*. – 2009. – Vol. 17. – P. 23374–9. DOI: 10.1364/OE.17.023374.
- [56] Hakobyan, D. Tailoring orbital angular momentum of light in the visible domain with metallic metasurfaces / D. Hakobyan, H. Magallanes, G. Seniutinas, S. Juodkazis, E. Brasselet // *Adv. Opt. Mater.* – 2015. – Vol. 4. – P. 306–12. DOI: 10.1002/adom.201500494.
- [57] Kobashi, J. Polychromatic optical vortex generation from patterned cholesteric liquid crystal / J. Kobashi, H. Yoshida, M. Ozaki // *Phys. Rev. Lett.* – 2016. – Vol. 116. – 253903. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.253903.
- [58] Zhang, Y. LED-based chromatic and white-light vortices of fractional topological charges / Y. Zhang, H. Guo, X. Qiu, X. Lu, X. Ren, L. Chen // *Opt Commun.* – 2021. – Vol. 485. – 126732. DOI: 10.1016/j.optcom.2020.126732.
- [59] Vallone, G. On the properties of circular beams: normalization, Laguerre-Gauss expansion, and free-space divergence / G. Vallone // *Opt. Lett.* – 2015. – Vol. 40. – P. 1717–20. DOI: 10.1364/OL.40.001717.
- [60] Vallone, G. Role of beam waist in Laguerre-Gauss expansion of vortex beams / G. Vallone // *Opt. Lett.* – 2017. – Vol. 42. – P. 1097–100. DOI: 10.1364/OL.42.001097.
- [61] Prudnikov, A.P. Integrals and Series: Special functions / A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev // CRC Press; 1986. ISBN: 2-88124-090-9.
- [62] Котляр, В.В. Когерентная суперпозиция пучков Лагерра–Гаусса с разными длинами волн: цветные оптические вихри / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.А. Савельева // *Компьютерная оптика*. – 2022. – Т. 46, № 5. – С. 692-700. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1106.
- [63] Shen, Y. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities / Y. Shen, X. Wang, Z. Xie, C. Min, X. Fu, Q. Liu, M. Gong, X. Yuan // *Light. Sci. Appl.* – 2019. – Vol. 8(90). – P. 1-29. <https://doi.org/10.1038/s41377-019-0194-2>.

- [64] Zhang, H. Centrosymmetric Optical Vortex / H. Zhang, X. Li, H. Ma, M. Tang, H. Li, Y. Cai // *Applied Sciences*. – 2019. – Vol. 9(7). – 1429. <https://doi.org/10.3390/app9071429>.
- [65] Kotlyar, V.V. Vortex Laser Beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // CRC Press; 2018. ISBN: 9781351009607. <https://doi.org/10.1201/9781351009607>.
- [66] Lian, Y. OAM beam generation in space and its applications: A review / Y. Lian, X. Qi, Y. Wang, Z. Bai, Y. Wang, Z. Lu // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2022. – Vol. 151. – 106923. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2021.106923>.
- [67] Zhang, K. A Review of Orbital Angular Momentum Vortex Beams Generation: From Traditional Methods to Metasurfaces / K. Zhang, Y. Wang, Y. Yuan, S.N. Burokur // *Appl. Sci.* – 2020. – Vol. 10. – 1015. <https://doi.org/10.3390/app10031015>
- [68] Wang, J. Generation and Detection of Structured Light / J. Wang, Y. Liang // *A Review. Front. Phys.* – 2021. – Vol. 9. – 688284. doi: 10.3389/fphy.2021.688284.
- [69] Zhu, L. A review of multiple optical vortices generation: methods and applications / L. Zhu, J. Wang // *Front. Optoelectron.* – 2019. – Vol. 12. – P. 52–68. <https://doi.org/10.1007/s12200-019-0910-9>.
- [70] Kotlyar, V.V. A vector optical vortex generated and focused using a metalens / V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov // *Computer Optics*. – 2017. – Vol. 41(5). – P. 645–654.
- [71] Wang, B. Generating optical vortex beams by momentum-space polarization vortices centred at bound states in the continuum / B. Wang, W. Liu, M. Zhao, J. Wang, Y. Zhang, A. Chen, F. Guan, X. Liu, L. Shi, J. Zi // *Nat. Photonics*. – 2020. – Vol. 14. – P. 623–628. <https://doi.org/10.1038/s41566-020-0658-1>
- [72] Wang, X. Recent advances on optical vortex generation / X. Wang, Z. Nie, Y. Liang, J. Wang, T. Li, B. Jia // *Nanophotonics*. – 2018. – Vol. 7(9) . – P. 1533–1556. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2018-0072>.

- [73] Liang, Y. Rotating of low-refractive-index microparticles with a quasi-perfect optical vortex / Y. Liang, M. Lei, S. Yan, M. Li, Y. Cai, Z. Wang, X. Yu, B. Yao // *Appl. Opt.* – 2018. – Vol. 57. – P. 79-84.
- [74] Xu, C.-T. Tunable band-pass optical vortex processor enabled by wash-out-refill chiral superstructures / C.-T. Xu, P. Chen, Y.-H. Zhang, X.-Y. Fan, Y.-Q. Lu, W. Hu // *Appl. Phys. Lett.* – 2021. – Vol. 118. – 151102. <https://doi.org/10.1063/5.0041117>.
- [75] Li, X. Optical vortex beam direct-writing photolithography / X. Li, Y. Liang, S. Zhan, J. Xu, J. Bai, K. Wang // *Applied Physics Express.* – 2018. – Vol. 11(3) . – 036503. <https://doi.org/10.7567/APEX.11.036503>.
- [76] Zhu, Y. Compact high-efficiency four-mode vortex beam generator within the telecom C-band / Y. Zhu, H. Tan, N. Zhou, L. Chen, J. Wang, X. Cai // *Opt. Lett.* – 2020. – Vol. 45(7) . – P. 1607-1610.
- [77] Backlund, M.P. The double-helix point spread function enables precise and accurate measurement of 3D single-molecule localization and orientation / M.P. Backlund, M.D. Lew, A.S. Backer, S.J. Sahl, G. Grover, A. Agrawal, R. Piestun, W.E. Moerner // *Proc SPIE Int Soc Opt Eng.* – 2013. – Vol. 8590. – 85900L.
- [78] Yu, S. Compositing orbital angular momentum beams in Bi<sub>4</sub>Ge<sub>3</sub>O<sub>12</sub> crystal for magnetic field sensing / S. Yu, F. Pung, H. Liu, X. Li, J. Yang, T. Wang // *Appl. Phys. Lett.* – 2017. – Vol. 111(9). – 091107.
- [79] Li, P. Spiral autofocusing Airy beams carrying power-exponent-phase vortices / P. Li, S. Liu, T. Peng, G. Xie, X. Gan, J. Zhao // *Opt. Express.* – 2014. – Vol. 22. – P. 7598-7606. <https://doi.org/10.1364/OE.22.007598>.
- [80] Martinez-Herrero, R. A New Type of Shape-Invariant Beams with Structured Coherence: Laguerre-Christoffel-Darboux Beams / R. Martinez-Herrero, M. Santarsiero, G. Piquero, J.C. Gonzalez de Sande // *Photonics.* – 2021. – Vol. 8. – 134. <https://doi.org/10.3390/photonics8040134>.
- [81] Khonina, S.N. Vector Lissajous laser beams / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, A.P. Porfirev // *Opt. Lett.* – 2020. – Vol. 45. – P. 4112-4115. <https://doi.org/10.1364/OL.398209>.

- [82] Cheng, S. Power-exponent helico-conical optical beams / S. Cheng, T. Xia, M. Liu, Y. Jin, G. Zhang, Y. Xiong, S. Tao // *Optics & Laser Technology*. – 2019. – Vol. 117. – P. 288–292. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2019.04.041>.
- [83] Котляр, В.В. Пучки Фурье–Бесселя с конечной энергией / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, Д.С. Калинкина, Е.С. Козлова // *Компьютерная оптика*. – 2021. – Vol. 45(4) . – P. 506–511. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-864>.
- [84] Hu, J. Optical vortex with multi-fractional orders / J. Hu, Y. Tai, L. Zhu, Z. Long, M. Tang, H. Li, X. Li, Y. Cai // *Appl. Phys. Lett.* – 2020. – Vol. 116. – 201107. <https://doi.org/10.1063/5.0004692>.
- [85] Stafeev, S.S. Tight focusing cylindrical vector beams with fractional order / S.S. Stafeev, A.G. Nalimov, V.D. Zaitsev, V.V. Kotlyar // *Journal of the Optical Society of America B*. – 2021. – Vol. 38(4). – P. 1090-1096. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.413581>.
- [86] Baranov, P.F. Photonic hook - a new type of self-bending structured light beams / P.F. Baranov, I.A. Zatonov, D.B. Bui // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2020. – Vol. 1614. – 012106. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1614/1/012106>.
- [87] Kotlyar V.V. Sinusoidal Gaussian optical vortex as a superposition of two hypergeometric beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Computer Optics*. – 2022. – Vol. 46(1). – P. 16-21. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1008.
- [88] Wang, M. Laguerre-Gaussian beam generation via enhanced intracavity spherical aberration / M. Wang, Y. Ma, Q. Sheng, X. He, J. Liu, W. Shi, J. Yao, T. Omatsu // *Opt. Express*. – 2021. – Vol. 29. – P. 27783-27790. <https://doi.org/10.1364/OE.436110>.
- [89] Rafayelyan, M. Laguerre–Gaussian modal q-plates / M. Rafayelyan, E. Brasselet // *Opt. Lett.* – 2017. – Vol. 42. – P. 1966-1969. <https://doi.org/10.1364/OL.42.001966>.
- [90] Mao, H. Broadband meta-converters for multiple Laguerre-Gaussian modes / H. Mao, Y.-H. Ren, Y. Yu, Z. Yu, X. Sun, S. Zhang, K.K.Y. Wong // *Photon.* – 2021. – Vol. 9. – P. 1689-1698. <https://doi.org/10.1364/PRJ.423344>.

- [91] Liang, G. Controllable conversion between Hermite Gaussian and Laguerre Gaussian modes due to cross phase / G. Liang, Q. Wang // *Opt. Express.* – 2019. – Vol. 27. – P. 10684-10691. <https://doi.org/10.1364/OE.27.010684>.
- [92] Longman, A. Optimal Laguerre–Gaussian modes for high-intensity optical vortices / A. Longman, R. Fedosejevs // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2020. – Vol. 37. – P. 841-848. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.389031>.
- [93] Dong, M. Measuring topological charge of partially coherent elegant Laguerre-Gaussian beam / M. Dong, X.-Y. Lu, C. Zhao, Y. Cai, Y. Yang // *Opt. Express.* – 2018. – Vol. 26. – P. 33035-33043. <https://doi.org/10.1364/OE.26.033035>.
- [94] Kovalev A.A. Asymmetric Laguerre-Gaussian beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // *Physical Review A.* – 2016. – Vol. 93(6). – 063858. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.063858>.
- [95] Hsieh, Y.H. Generating high-power asymmetrical Laguerre-Gaussian modes and exploring topological charges distribution / Y.H. Hsieh, Y.H. Lai, M.X. Hsieh, K.F. Huang, Y.F. Chen // *Opt. Express.* – 2018. – Vol. 26. – P. 31738-31749. <https://doi.org/10.1364/OE.26.031738>.
- [96] Ghaderi Goran Abad, M. Laguerre-Gaussian modes generated vector beam via nonlinear magneto-optical rotation / M. Ghaderi Goran Abad, M. Mahmoudi // *Sci Rep.* – 2021. – Vol. 11. – 5972. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-85249-8>.
- [97] Huang, S. Composite vortex beams by coaxial superposition of Laguerre–Gaussian beams / S. Huang, Z. Miao, C. He, F. Pang, Y. Li, T. Wang // *Optics and Lasers in Engineering.* – 2016. – Vol. 78. – P. 132–139. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2015.10.008>.
- [98] Chen, Y. Elliptical Laguerre-Gaussian correlated Schell-model beam / Y. Chen, L. Liu, F. Wang, C. Zhao, Y. Cai // *Opt. Express.* – 2014. – Vol. 22. – P. 13975-13987. <https://doi.org/10.1364/OE.22.013975>.
- [99] Pang, K. Demonstration of a 10 Mbit/s quantum communication link by encoding data on two Laguerre–Gaussian modes with different radial indices / K. Pang, C. Liu, G. Xie, Y. Ren, Z. Zhao, R. Zhang, Y. Cao, J. Zhao, H. Song, H. Song, L. Li,

- A.N. Willner, M. Tur, R.W. Boyd, A.E. Willner // *Opt. Lett.* – 2018. – Vol. 43. – P. 5639-5642. <https://doi.org/10.1364/OL.43.005639>.
- [100] Zeng, J. Spiral spectrum of a Laguerre-Gaussian beam propagating in anisotropic non-Kolmogorov turbulent atmosphere along horizontal path / J. Zeng, X. Liu, C. Zhao, F. Wang, G. Gbur, Y. Cai // *Opt. Express.* – 2019. – Vol. 27. – P. 25342-25356. <https://doi.org/10.1364/OE.27.025342>.
- [101] Cox, M.A. The Resilience of Hermite – and Laguerre–Gaussian Modes in Turbulence / M.A. Cox, L. Maqondo, R. Kara, G. Milione, L. Cheng, A. Forbes // *J. Lightwave Technol.* – 2019. – Vol. 37. – P. 3911-3917.
- [102] Otsu, T. Direct evidence for three-dimensional off-axis trapping with single Laguerre-Gaussian beam / T. Otsu, T. Ando, Y. Takiguchi, Y. Ohtake, H. Toyoda, H. Itoh // *Scientific Reports.* – 2014. – Vol. 4(1) . – P. 4579. <https://doi.org/10.1038/srep04579>
- [103] Peshkov, A.A. Photoexcitation of atoms by Laguerre-Gaussian beams / A.A. Peshkov, D. Seipt, A. Surzhykov, S. Fritzsche // *Physical Review A.* – 2017. – Vol. 96(2). – 023407. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.023407>.
- [104] Doster, T. Laguerre-Gauss and Bessel-Gauss beams propagation through turbulence: analysis of channel efficiency / T. Doster, A.T. Watnik // *App. Opt.* – 2016. – Vol. 55. – P. 10239-10246. DOI: <https://doi.org/10.1364/AO.55.010239>
- [105] Abramochkin EG, Volostnikov VG, Spiral-type beams: optical and quantum aspects / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // *Opt. Commun.* 1996; 125: 302-323. DOI: [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(95\)00640-0](https://doi.org/10.1016/0030-4018(95)00640-0).
- [106] Kotlyar, V.V. Product of Two Laguerre–Gaussian Beams / V.V. Kotlyar, E.G. Abramochkin, A.A. Kovalev, A.A. Savelyeva // *Photonics.* – 2022. –V. 9. –P. 496. DOI: 10.3390/photonics9070496.
- [107] Kotlyar, V.V. New type of vortex laser beams: Squared Laguerre-Gaussian beam / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, E.S. Kozlova, A.A. Savelyeva, S.S. Stafeev // *Optik.* –2022. – V. 270. – P.169916. DOI: 10.1016/j.ijleo.2022.169916.

- [108] Котляр, В.В. Двойные пучки Лагерра–Гаусса / В.В. Котляр, Е.Г. Абрамочкин, А.А. Ковалёв, А.А. Савельева // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 6. – С. 872-876. – DOI: 18287/2412-6179-CO-1177.
- [109] Prentice, P.A. Manipulation and filtration of low index particles with holographic Laguerre-Gaussian optical trap arrays / P.A. Prentice, M.P. MacDonald, T.G. Frank, A. Cuschieri, G.C. Spalding, W. Sibbett, P.A. Campbell, K. Dholakia // Opt. Express. – 2004. – Vol. 12. – P. 593-600. DOI: 10.1364/OPEX.12.000593.
- [110] Doster, T. Laguerre–Gauss and Bessel–Gauss beams propagation through turbulence: analysis of channel efficiency / T. Doster, A.T. Watnik // Appl. Opt. – 2016. – Vol. 55. – P. 10239-10246. DOI: 10.1364/AO.55.010239.
- [111] Ferlic, N.A. Propagation of Laguerre-Gaussian and Im Bessel beams through atmospheric turbulence: A computational study / N.A. Ferlic, M. van Iersel, D.A. Paulson, C.C. Davis // Proc. SPIE. – 2020. – Vol. 11506. – 115060H. DOI: 10.1117/12.2567348.
- [112] Cao, M. Demonstration of CNOT gate with Laguerre Gaussian beams via four-wave mixing in atom vapor / M. Cao, Y. Yu, L. Zhang, F. Ye, Y. Wang, D. Wei, P. Zhang, W. Guo, S. Zhang, H. Gao, F. Li // Opt. Express. – 2014. – Vol. 22. – P. 20177-20184. DOI: 10.1364/OE.22.020177.
- [113] Dedecker, P. Orientational effects in the excitation and de-excitation of single molecules interacting with donut-mode laser beams / P. Dedecker, B. Muls, J. Hofkens, J. Enderlein, J. Hotta // Opt. Express. – 2007. – Vol. 15. – P. 3372-3383. DOI: 10.1364/OE.15.003372.
- [114] Bokor, N. Investigation of polarization effects for high-numerical-aperture first-order Laguerre-Gaussian beams by 2D scanning with a single fluorescent microbead / N. Bokor, Y. Iketaki, T. Watanabe, M. Fujii // Opt. Express. – 2005. – Vol. 13. – P. 10440-10447. DOI: 10.1364/OPEX.13.010440.
- [115] Zhou, G. Orbital angular momentum density of an elegant Laguerre–Gaussian beam / G. Zhou, G. Ru // Prog. Electromagn. Res. – 2013. – Vol. 141. – P. 751-768. DOI: 10.2528/PIER13051608.

- [116] Abramochkin, E. General astigmatic transform of Hermite–Laguerre–Gaussian beams / E. Abramochkin, E. Razueva, V. Volostnikov // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2010. – Vol. 27. – P. 2506-2513. DOI: 10.1364/JOSAA.27.002506.
- [117] Bisson, J.F. Generation of Laguerre-Gaussian modes in Nd:YAG laser using diffractive optical pumping / J.F. Bisson, Y. Senatsky, K.I. Ueda // *Laser Phys. Lett.* – 2005. – Vol. 2(7). – P. 327-333. DOI: 10.1002/lapl.200510008.
- [118] Lin, D. Controlling the handedness of directly excited Laguerre–Gaussian modes in a solid-state laser / D. Lin, J.M.O. Daniel, W.A. Clarkson // *Opt. Lett.* – 2014. – Vol. 39(13). – P. 3903-3906. DOI: 10.1364/OL.39.003903.
- [119] Thirugnanasambandam, M.P. Generation of very-high order Laguerre-Gaussian modes in Yb:YAG ceramic laser / M.P. Thirugnanasambandam, Y. Senatsky, K. Ueda // *Laser Phys. Lett.* – 2010. – Vol. 7(9). – P. 637-643. DOI: 10.1002/lapl.201010044.
- [120] Abramochkin, E. Beam transformations and nontransformed beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // *Opt. Commun.* – 1991. – Vol. 83. – P. 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [121] Matsumoto, N. Generation of high-quality higher-order Laguerre-Gaussian beams using liquid-crystal-on-silicon spatial light modulators / N. Matsumoto, T. Ando, T. Inoue, Y. Ohtake, N. Fukuchi, T. Hara // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2008. – Vol. 25. – P. 1642-1651. DOI: 10.1364/JOSAA.25.001642.
- [122] Graham, R.L.; Knuth D.E.; Patashnik, O., *Concrete mathematics* (Addison-Wesley, 1994).
- [123] Kotlyar, V.V. Laguerre-Gaussian Beams with an Increased Dark Area and Autofocusing / V.V. Kotlyar, E.G. Abramochkin, A.A. Kovalev, A.A. Savelyeva // *Photonics.* – 2022. – Vol. 9(10). – P. 708. DOI: 10.3390/ photonics9100708.
- [124] Kotlyar, V. Fourier-Invariant Laguerre-Gaussian Beams With An Increased Central Spot / V. Kotlyar, E. Abramochkin, A. Kovalev, A. Savelyeva, E. Kozlova // *2022 International Conference on Electrical Engineering and Photonics (EExPolytech).* – 2022. – P. 375-378, DOI: 10.1109/EExPolytech56308.2022.9950930.

- [125] Allen, L. The orbital angular momentum of light / L. Allen, M. Padgett, M. Babiker // *Prog. Opt.* – 1999. – Vol. 39. – 291.
- [126] Kotlyar, V.V. Rotation of laser beams with zero of the orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // *Opt. Commun.* – 2007. – Vol. 274. – 8.
- [127] Zhang, Z. Generation controllable orbital angular momentum beams in fiber laser system / Z. Zhang, S. Wang, B. Gu, S. Wang // *J. Opt.* – 2021. – Vol. 23. – 105603.
- [128] Volyar, A.V. Avalanche instability of the orbital angular momentum higher order optical vortices / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, Ya.E. Akimova, Yu.A. Egorov // *Computer Optics.* – 2019. – Vol. 43. – 14.
- [129] Zhang, Y. Orbital angular momentum transformation of optical vortex with aluminum metasurfaces / Y. Zhang, X. Yang, J. Gao // *Sci. Rep.* 9, 9133 (2019).
- [130] Ruffalo, G. Multiplication and division of the orbital angular momentum of light with diffractive transformation optics / G. Ruffalo, M. Massari, F. Romanato // *Light-Sci. Appl.* – 2019. – Vol. 8. – 113.
- [131] Hui, Y. Canonical momentum, angular momentum, and helicity of circularly polarized Airy beams / Y. Hui, Z. Cui, P. Song, Y. Han, W. Zhao // *Phys. Lett. A.* – 2020. – Vol. 384. – P. 126284.
- [132] Rybakov, F.N. Chiral magnetic skyrmions with arbitrary topological charge / F.N. Rybakov, N.S. Kiselev // *Phys. Rev. B.* – 2019. – Vol. 99. – 064437.
- [133] Li, L. Direct dynamical characterization of higher-order topological phases with nested band inversion surfaces / L. Li, W. Zhu, J. Gong // *Science Bulletin.* – 2021. – Vol. 66(15). – 1502.
- [134] Volyar, A.V. Sectoral perturbation of vortex beams: Shannon entropy, orbital angular momentum and topological charge / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, Ya.E. Akimova, Yu.A. Egorov // *Computer Optics.* – 2019. – Vol. 43. – P. 723.
- [135] Soskin, M.S. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices / M.S. Soskin, V.N. Gorshkov, M.V. Vasnetsov, J.T. Malos, N.R. Heckenberg // *Phys. Rev. A.* – 1997. – Vol. 56. – 4064.

- [136] Wen, J. Vortex strength and beam propagation factor of fractional vortex beams / J. Wen, L. Wang, X. Yang, J. Zhang, S. Zhu // *Opt. Express.* – 2019. – Vol. 27. – 5893.
- [137] Jesus-Silva, A.J. Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone / A.J. Jesus-Silva, E.J.S. Fonseca, J.M. Hickmann // *Opt. Lett.* – 2012. – Vol. 37. – 4552.
- [138] Orlov S. Propagation of superpositions of coaxial optical Bessel beams carrying vortices / S. Orlov, A. Stabinis // *J. Opt. A.: Pure Appl. Opt.* – 2004. – Vol. 6. – S259.
- [139] Volyar, A.V. Shaping and processing the vortex spectra of singular beams with anomalous orbital angular momentum / A. V. Volyar, M. V. Bretsko, Y. E. Akimova, Y. A. Egorov // *Computer Optics.* – 2019. – Vol. 43(4). – P. 517-527.
- [140] Uren, R. Method for Generating High Purity Laguerre–Gaussian Vortex Modes / R. Uren, S. Beecher, C. R. Smith, W. A. Clarkson // *IEEE Journal of quantum electronics.* – 2019. – Vol. 55(5). – 1700109.
- [141] Karpeev, S.V. Generation of nonuniformly polarised vortex Bessel beams by an interference polarizer / S. V. Karpeev, V. D. Paranin, S. N. Khonina // *Quantum Electronics.* – 2018. – Vol. 48(6). – P. 521–526.
- [142] Wang, W.B. Deep transmission of Laguerre–Gaussian vortex beams through turbid scattering media / W. B. Wang, R. Gozali, L. Shi, L. Lindwasser, R. R. Alfano // *Opt. Lett.* – 2016. – Vol. 41(9). – P. 2069-2072.
- [143] Karpeev, S.V. Comparison of the stability of LaguerreGauss vortex beams to random fluctuations of the optical environment / S. V. Karpeev, V. D. Paranin, M. S. Kirilenko // *Computer Optics.* – 2017. – Vol. 41(2). – P. 208-217.
- [144] Stafeev, S.S. Tight focusing of a sector-wise azimuthally polarized optical vortex / S. S. Stafeev, V. V. Kotlyar // *Computer Optics.* – 2017. – Vol. 41(2). –P. 147-154.
- [145] Cui, C. Focusing characteristics of optical vortex passing through a Fresnel zone plate / C. Cui, Z. Wang, X. Zhan, H. Wang, J. Wang, L. Liu, Z. Li, C. Wu // *Optical Engineering.* – 2021. – Vol. 60(1). – 016101.

- [146] Yu, J. Super-variable Focusing Vortex Beam Generators Based on Spiral Zone Plate Etched on Optical Fiber Facet / J. Yu, C. Fu, Z. Bai, Y. Wang // *Journal of Lightwave Technology*. – 2020. – Vol. 39(5). – P. 1416-1422.
- [147] Lu, Y.-M. High-Efficiency Spiral Zone Plates in Sapphire / Y.-M. Lu, Z.-N. Tian, S.-N. Yang, J.-G. Hua, X.-Q. Liu, Y. Zhao, Q.-D. Chen, Y.-L. Zhang, H.-B. Sun // *IEEE Photonics technology letters*. – 2019. – Vol. 31(12). – P. 979-982.
- [148] Kotlyar, V.V. Energy backflow in the focus of an optical vortex / V. V. Kotlyar, A. G. Nalimov, S. S. Stafeev // *Laser Physics*. –2018. – Vol. 28(12). – 126203.
- [149] Tewari, S. Quantum Computation using Vortices and Majorana Zero Modes of a  $px + ipy$  Superfluid of Fermionic Cold Atoms / S. Tewari, S. D. Sarma, C. Nayak, C. Zhang, P. Zoller // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 98. – 010506.
- [150] Ambrosio, A. Light-induced spiral mass transport in azo-polymer films under vortex-beam illumination / A. Ambrosio, L. Marrucci, F. Borbone, A. Roviello, P. Maddalena // *Nature Communications*. – 2012. – Vol. 3. – 989.
- [151] Mirhosseini, M. High-dimensional quantum cryptography with twisted light / M. Mirhosseini, O. S. Magana-Loaiza, M. N. O’Sullivan, B. Rodenburg, M. Malik, M. P. J. Lavery, M. J. Padgett, D. J. Gauthier, R. W. Boyd // *New J. Phys.* – 2017. – Vol. 17. – 033033.
- [152] Kozlova, E.S. Laser Light Focusing by Aluminium Zone Plate / E. S. Kozlova, S. S. Stafeev, S. A. Fomchenkov, V. V. Podlipnov, V. V. Kotlyar // 22nd International Conference on Transparent Optical Networks (ICTON), Bari, Italy. – 2020. – P. 1-4.
- [153] Couairon, A. Surface physics, nanoscale physics, low-dimensional systems- Filamentation and damage in fused silica induced by tightly focused femtosecond laser pulses / A. Couairon, L. Sudrie, M. Franco, B. Prade, A. Mysyrowicz // *Phys. Rev. B*. – 2005. – Vol 71(12). – 125435.
- [154] Kotlyar, V.V. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V. V. Kotlyar, A. A. Kovalev, A. P. Porfirev // *Appl. Opt.* – 2017. – Vol. 56(14). – P. 4095-4104.

- [155] Degtyarev, S.A. Photonic nanohelix generated by a binary spiral axicon / S. A. Degtyarev, A. P. Porfirev, S. N. Khonina // *Appl. Opt.* – 2016. – Vol. 55(12). – P. B44-B48.
- [156] Savelyeva, A. Comparative modeling of phase spiral and conventional zone plates / A. Savelyeva, E. Kozlova, V. Kotlyar // *IEEE Explore: 2021 International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)*. – 2021. – P. 1-4, DOI: 10.1109/ITNT52450.2021.9649109.
- [157] Saveleyeva, A.A. Analysis of the Fields Formed by the High-Aperture Zone Plate and the Spiral Zone Plate/ A. A. Saveleyeva, E. S. Kozlova, V. V. Kotlyar // *IEEEExplore: 2021 Photonics & Electromagnetics Research Symposium (PIERS)*. —2022. —P. 1101-1107. DOI: 10.1109/PIERS53385.2021.9694958.
- [158] Tsuchida, S. and H. Kuratsuji, “Random motion theory of an optical vortex in nonlinear birefringent media,” *Phys. Rev. E.* – 2020. – Vol. 102. – 032204, 2020.
- [159] Kumar, P. and N. K. Nishchal, “Self-referenced interference of laterally displaced vortex beams for topological charge determination,” *Opt. Commun.* – 2020. – Vol. 459. – 125000.
- [160] Dennis, M. R. Chapter 5 Singular Optics: Optical Vortices and Polarization Singularities / M. R. Dennis, K. O’Holleran, M. J. Padgett // *Prog. Opt.* – 2009. – P. 293–363.
- [161] Gbur, G. J. *Singular Optics* / G. J. Gbur // CRC Press. – 2016. – Boca Raton.
- [162] Vanacore, G. M., G. Ultrafast generation and control of an electron vortex beam via chiral plasmonic near fields / G. M. Vanacore, G. Berruto, I. Madan, E. Pomarico, P. Biagioni, R. J. Lamb, D. McGrouther, O. Reinhardt, I. Kaminer, B. Barwick, H. Larocque, V. Grillo, E. Karimi, F. J. Garcia de Abajo, F. Carbone // *Nat. Mater.* – 2019. – Vol. 18(6). – P. 573–579.
- [163] Wang, H. Vortex beam generation with variable topological charge based on a spiral slit / H. Wang, L. Liu, C. Zhou, J. Xu, M. Zhang, S. Teng, Y. Cai // *Nanophotonics*. – 2019. – Vol. 8(2).
- [164] Kovalev, A. A. Optical vortex beams with the infinite topological charge / A. A. Kovalev, V. V. Kotlyar // *J Opt.* – 2021. – Vol. 23(5). – 055601.

- [165] Volyar, A. Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront / A. Volyar, M. Bretsko, Y. Akimova, Y. Egorov // *Opt. Lett.* – 2018. – Vol. 43(22). – P. 5635-5638.
- [166] Yang, Y. Anomalous Bessel vortex beam: modulating orbital angular momentum with propagation / Y. Yang, X. Zhu, J. Zeng, X. Lu, C. Zhao, Y. Cai // *Nanophotonics.* – 2018. – Vol. 7(3). – P. 677–682.
- [167] Savelyeva, A. A. Comparative modeling of optical vortex focusing by Fresnel zone plates / A. A. Savelyeva, E. S. Kozlova, and V. V. Kotlyar // *Proc. SPIE 11793, Optical Technologies for Telecommunications 2020, Samara, Russian Federation.* –2021. –117930J.
- [168] Ji, C. Dual-band vortex beam generation with different OAM modes using single-layer metasurface / C. Ji, J. Song, C. Huang, X. Wu, X. Luo // *Opt. Express.* – 2019. – Vol. 27(1). – P. 34-44.
- [169] Kozlova, E. S. Investigation of the influence of amplitude spiral zone plate parameters on produced energy backflow / E. S. Kozlova // *Comput. Opt.* – 2019. – Vol. 43(6). – P. 1093-1097.
- [170] Liu, H. Generation of High-Order Bessel Orbital Angular Momentum Vortex Beam Using a Single-Layer Reflective Metasurface / H. Liu, H. Xue, Y. Liu, Q. Feng, L. Li // *IEEE.* – 2020. – Vol. 8. – P. 126504-126510.
- [171] Lopez-Quintas, I. Optical vortex production mediated by azimuthal index of radial polarization / I. Lopez-Quintas, W. Holgado, R. Drevinskas, P. G. Kazansky, I. J. Sola, and B. Alonso // *J Opt.* – 2020. – Vol. 22(9). – 095402.
- [172] Kotlyar, V. V. Two-petal laser beam near a binary spiral axicon with topological charge 2 / V.V. Kotlyar, S. S. Stafeev, A. G. Nalimov, S. Schulz, and L. O'Faolain // *Opt Laser Technol.* – 2019. – Vol. 119. – 105649.
- [173] Zhou, Y. Formation of polarization-dependent optical vortex beams via an engineered microsphere / Y. Zhou, M. Hong // *Opt. Express.* – 2021. – Vol. 29(7). – P. 11121-11131, 2021.
- [174] He, S. Propagation dynamics of abruptly autofocusing circular Airy Gaussian vortex beams in the fractional Schrodinger equation / S. He, B. A. Malomed, D.

- Mihalache, X. Peng, X. Yu, Y. He, D. Deng // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 2021. – Vol. 142. – 110470.
- [175] Augustyniak, I. Off-axis vortex beam propagation through classical optical system in terms of Kummer confluent hypergeometric function / I. Augustyniak, W. Lamperska, J. Masajada, L. Plociniczak, A. Popiolek-Masajada // *Photonics*. – 2020. – Vol. 7(60).
- [176] Luo, C. Evolution and Beam spreading of Arbitrary order vortex beam propagating in atmospheric turbulence / C. Luo, X. Han // *Opt. Commun.* – 2019.
- [177] Asahara, A. Detection of Optical Vortices with Various Topological Charges using Single-pixel Dual-comb Imaging / A. Asahara, T. Adachi, S. Akiyama, and K. Minoshima // *OSA Technical Digest, LM7F.4*. – 2020.
- [178] Ou, K. High efficiency focusing vortex generation and detection with polarization-insensitive dielectric metasurfaces / K. Ou, G. Li, T. Li, H. Yang, F. Yu, J. Chen, Z. Zhao, G. Cao, X. Chen, W. Lu // *Nanoscale*. – 2018. – Vol. 10. – 19154–19161.
- [179] Khonina, S. N. A technique for simultaneous detection of individual vortex states of Laguerre–Gaussian beams transmitted through an aqueous suspension of microparticles / S. N. Khonina, S. V. Karpeev, V. D. Parandin // *Opt Lasers Eng.* – 2018. – Vol. 105. – P. 68–74.
- [180] Zhuang, J. Tight-focusing properties of linearly polarized circular Airy Gaussian vortex beam / J. Zhuang, L. Zhang, D. Deng // *Opt. Lett.* – 2020. – Vol. 45(2) . – P. 296-299.
- [181] Ye, F. The Effect of the Spin Angular Momentum on the Tight-Focusing Vortex Hollow Gaussian Beams / F. Ye, J. Zou, D. Deng // *Ann. Phys.* – 2020. – 1900548.
- [182] Weber, K. Single mode fiber based delivery of OAM light by 3D direct laser writing / K. Weber, F. Hutt, S. Thiele, T. Gissibl, A. Herkommer, H. Giessen // *Opt. Express*. – 2017. – Vol. 25(17). – P. 19672.
- [183] Lin, D. Dielectric gradient metasurface optical elements / D. Lin, P. Fan, E. Hasman, M. L. Brongersma // *Science*. – 2014. – Vol. 345(6194). – P. 298–302.

- [184] Yang, Y. Dielectric Meta-Reflectarray for Broadband Linear Polarization Conversion and Optical Vortex Generation / Y. Yang, W. Wang, P. Moitra, I. I. Kravchenko, D. P. Briggs, and J. Valentine // *Nano Letters*. – 2014. – Vol. 14(3) . – P. 1394–1399.
- [185] Kim, D. J. Q-switched Nd:YAG optical vortex lasers / D. J. Kim, J. W. Kim, W. A. Clarkson // *Opt. Express*. – 2013. – Vol. 21(24). – 29449.
- [186] Naidoo, D. Controlled generation of higher-order Poincare sphere beams from a laser / D. Naidoo, F. S. Roux, A. Dudley, I. Litvin, B. Piccirillo, L. Marrucci, and A. Forbes // *Nat. Photonics*. – 2016. – Vol. 10(5). – P. 327–332.
- [187] Maltese, G. Towards an integrated AlGaAs waveguide platform for phase and polarisation shaping / G. Maltese, Y. Halioua, A. Lemaitre, C. Gomez-Carbonell, E. Karimi, P. Banzer, S. Ducci // *J Opt.* – 2018. – Vol. 20(5) . – 05LT01.
- [188] Zhang, M. Tight focusing properties of anomalous vortex beams / M. Zhang, Y. Yang // *Optik*. – 2018. – Vol. 154. – P. 133–138.
- [189] Padgett, M. Tweezers with a twist / M. Padgett, R. Bowman // *Nat. Photonics*. – 2011. – Vol. 5(6). – P. 343–348.
- [190] Yin, J. Y. Microwave Vortex-Beam Emitter Based on Spoof Surface Plasmon Polaritons / J. Y. Yin, J. Ren, L. Zhang, H. Li, T. J. Cui // *Laser Photonics Rev.* – 2018. – Vol. 12(3). – 1600316.
- [191] Shao, W. Free-space optical communication with perfect optical vortex beams multiplexing / W. Shao, S. Huang, X. Liu, M. Chen // *Opt. Commun.* – 2018. – Vol. 427. – P. 545–550.
- [192] Nakatsuka, R. Electrical Sensing of Au Nanoparticles Manipulated by an Optical Vortex / R. Nakatsuka, S. Yanai, K. Nakajima, K. Doi, S. Kawano // *Phys. Chem. C*. – 2021. – Vol. 125(17). – P. 9507–9515.
- [193] Liu, H. Vortex Beam Encoded All-Optical Logic Gates Based on Nano-Ring Plasmonic Antennas / H. Liu, H. Deng, S. Deng, C. Teng, M. Chen, L. Yuan // *Nanomaterials*. – 2019. – Vol. 9(12). – P. 1649.

- [194] Qiu, S. Spinning object detection based on perfect optical vortex / S. Qiu, Y. Ren, T. Liu, L. Chen, C. Wang, Z. Li, Q. Shao // *Opt Lasers Eng.* – 2020. – Vol. 124. – 105842.
- [195] Bratchenko, L. A. Raman spectroscopy of human skin for kidney failure detection / L. A. Bratchenko, I. A. Bratchenko, Y. A. Khristoforova, D. N. Artemyev, D. Y. Konovalova, P. A. Lebedev, V. P. Zakharov // *J Biophotonics.* – 2020. – Vol. 14(6).
- [196] Yee, K. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media / K. Yee // *IEEE Trans. Antennas Propag.* – 1966. – Vol. 14(3). – P. 302–307.
- [197] Savelyeva, A.A. Comparison of the focused optical vortices produced by high-aperture phase conventional and spiral zone plates/ A. A. Savelyeva E. S. Kozlova, V.V. Kotlyar // *Journal of Physics: Conference Series.* - 2021. - V.2103. - Art. No. 012175. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2103/1/012175>.
- [198] Abed, J. Investigation of Broadband Surface Plasmon Resonance of Dewetted Au Structures on TiO<sub>2</sub> by Aperture-Probe SNOM and FDTD Simulations / J. Abed, F. Alexander, I. Taha, N. Rajput, C. Aubry, M. Jouiad // *Plasmonics.* – 2019. – Vol. 14. – P. 205–218. <https://doi.org/10.1007/s11468-018-0794-3>.
- [199] Bazylewski, P. Review of Three-Dimensional Scanning Near-Field Optical Microscopy (3D-SNOM) and Its Applications in Nanoscale Light Management / P. Bazylewski, S. Ezugwu, G. Fanchini // *Appl. Sci.* – 2017. – Vol. 7. – 973. <https://doi.org/10.3390/app7100973>.
- [200] Heydarian, H. Dual-color plasmonic probes for improvement of scanning near-field optical microscopy / H. Heydarian, A. Shahmansouri, P. Yazdanfar, B. Rashidian // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 2018. – Vol. 35. – P. 627–635. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.35.000627>.
- [201] Minin, I.V. Plasmonic nanojet: An experimental demonstration: publisher's note / I.V. Minin, O.V. Minin, I.A. Glinskiy, R.A. Khabibullin, R. Malureanu, A.V. Lavrinenko, D.I. Yakubovsky, A.V. Arsenin, V.S. Volkov, D.S. Ponomarev // *Opt. Lett.* – 2020. – Vol. 45. – P. 3418–3418. <https://doi.org/10.1364/OL.399899>.

- [202] Pohl, D.W. Scanning Near-field Optical Microscopy (SNOM) / D.W. Pohl // *Adv. Opt. Electron Microsc.* – 1991. – Vol. 12. – P. 243–312. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-029912-6.50009-9>.
- [203] Kazantsev, D.V. Apertureless near-field optical microscopy / D.V. Kazantsev, E.V. Kuznetsov, S.V. Timofeev, A.V. Shelaev, E.A. Kazantseva // *Phys. Uspekhi.* – 2017. – Vol. 60. – P. 259–275. <https://doi.org/10.3367/UFNe.2016.05.037817>.
- [204] Huber, Ch. Laser-induced cantilever behaviour in apertureless scanning near-field optical microscopes / Ch. Huber, Ye. Prior, W. Kautek // *Meas. Sci. Technol.* – 2014. – Vol. 25. – 075604. <https://doi.org/10.1088/0957-0233/25/7/075604>.
- [205] Sun, W.X. Preparation of cantilevered W tips for atomic force microscopy and apertureless near-field scanning optical microscopy / W.X. Sun, Z.X. Shen, F.C. Cheong, G.Y. Yu, K.Y. Lim, J.Y. Lin // *Rev. Sci. Instrum.* – 2002. – Vol. 73. – 2942. <https://doi.org/10.1063/1.1494867>.
- [206] Kassing, R. Sensors for scanning probe microscopy / R. Kassing, I. Rangelow, E. Oesterschulze, M. Stuke // *Appl. Phys. A.* – 2003. – Vol. 76. – P. 907–911. <https://doi.org/10.1007/s00339-002-1974-7>.
- [207] Ingham, J. An evaluation of the application of the aperture infrared SNOM technique to biomedical imaging / J. Ingham, M. J. Pilling, T. Craig, M. R. F. Siggel-King, C. I. Smith, P. Gardner, A. Varro, D. M. Pritchard, S. D. Barrett, D. S. Martin, P. Harrison, P. Unsworth, J. D. Kumar, A. Wolski, A. Cricenti, M. Luce, M. Surman, Y. M. Saveliev, P. Weightman // *Biomed. Phys. Eng. Express.* – 2018. – Vol. 4. – 025011. <https://doi.org/10.1088/2057-1976/aaa0de>.
- [208] Frolov, A.Y. Probing higher order optical modes in all-dielectric nanodisk, -square, and -triangle by aperture type scanning near-field optical microscopy / A.Y. Frolov, J. Van de Vondel, V.I. Panov, P. Van Dorpe, A.A. Fedyanin, V.V. Moshchalkov, N. Verellen // *Nanophotonics.* – 2022. – Vol. 11. – P. 543–557. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2021-0612>.
- [209] Vollkopf, A. Modified fabrication process for aperture probe cantilevers / A. Vollkopf, O. Rudow, T. Leinhos, C. Mihalcea, E. Oesterschulze // *J. Microsc.* –

1999. – Vol. 194. – P. 344–348. <https://doi.org/10.1046/j.1365-2818.1999.00535.x>.
- [210] Werner, S. Cantilever probes with aperture tips for polarization-sensitive scanning near-field optical microscopy / S. Werner, O. Rudow, C. Mihalcea, E. Oesterschulze // *Appl. Phys. A Mater. Sci. Process.* – 1998. – Vol. 66. – P. S367–S370. <https://doi.org/10.1007/s003390051165>.
- [211] Dvořák, P. Imaging of near-field interference patterns by aperture-type SNOM— influence of illumination wavelength and polarization state / P. Dvořák, Z. Édes, M. Kvapil, T. Šamořil, F. Ligmajer, M. Hrtoň, R. Kalousek, V. Křápek, P. Dub, J. Spousta, P. Varga, T. Šikola // *Opt. Express.* – 2017. – Vol. 25. – P. 16560–16573. <https://doi.org/10.1364/OE.25.016560>.
- [212] González Mora, C.A.; Hartelt, M.; Bayer, D.; Aeschlimann, M.; Ilin, E.A.; Oesterschulze, E. Microsphere-based cantilevers for polarization-resolved and femtosecond SNOM. *Appl. Phys. B.* – 2016. – Vol. 122. – 86. <https://doi.org/10.1007/s00340-016-6359-2>.
- [213] Atie, E.M. Remote optical sensing on the nanometer scale with a bowtie aperture nano-antenna on a fiber tip of scanning near-field optical microscopy / E.M. Atie, Z. Xie, A. El Eter, R. Salut, D. Nedeljkovic, T. Tannous, F.I. Baida, T. Grosjean // *Appl. Phys. Lett.* – 2015. – Vol. 106. – 151104. <https://doi.org/10.1063/1.4918531>.
- [214] El Eter, A. Fiber-integrated optical nano-tweezer based on a bowtie-aperture nano-antenna at the apex of a SNOM tip / A. El Eter, N.M. Hameed, F.I. Baida, R. Salut, C. Filiatre, D. Nedeljkovic, E. Atie, S. Bole, T. Grosjean // *Opt. Express.* – 2014. – Vol. 22. – P. 10072–10080. <https://doi.org/10.1364/OE.22.010072>.
- [215] Murphy-DuBay, N. Nanopatterning using NSOM probes integrated with high transmission nanoscale bowtie aperture / N. Murphy-DuBay, L. Wang, E.C. Kinzel, S.M.V. Uppuluri, X. Xu // *Opt. Express.* – 2008. – Vol. 16. – P. 2584–2589. <https://doi.org/10.1364/OE.16.002584>.
- [216] Biagioni, P. Unexpected polarization behavior at the aperture of hollow-pyramid near-field probes / P. Biagioni, D. Polli, M. Labardi, A. Pucci, G. Ruggeri, G.

- Cerullo, M. Finazzi, L. Duò // *Appl. Phys. Lett.* – 2005. – Vol. 87. – 223112.  
<https://doi.org/10.1063/1.2137891>.
- [217] Biagioni, P. Near-field vs. far-field polarization properties of hollow pyramid SNOM tips / P. Biagioni, M. Coduri, D. Polli, T. Virgili, M. Labardi, G. Cerullo, M. Finazzi, L. Duò, // *Phys. Status Solidi.* – 2005. – Vol. 2. – P. 4078–4082.  
<https://doi.org/10.1002/pssc.200562206>.
- [218] Shershulin, V.A. Use of scanning near-field optical microscope with an aperture probe for detection of luminescent nanodiamonds / V.A. Shershulin, S.R. Samoylenko, O.A. Shenderova, V.I. Konov, I.I. Vlasov // *Laser Phys.* – 2017. – Vol. 27. – 025201. <https://doi.org/10.1088/1555-6611/aa4f5f>.
- [219] Kotlyar, V.V. Analysis of the shape of a subwavelength focal spot for the linearly polarized light / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, Y. Liu, L. O’Faolain, A.A. Kovalev // *Appl. Opt.* – 2013. – Vol. 52. – P. 330–339.  
<https://doi.org/10.1364/AO.52.000330>.
- [220] Mikhailova, T.V. Light polarization and intensity behaviour in aperture cantilevers with carbon tip created by focused ion beam / T.V. Mikhailova, Y.E. Vysokikh, S.Y. Krasnoborodko, A.S. Kolomiytsev, A.A. Fedotov // *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* – 2019. – Vol. 699. – 012030. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/699/1/012030>.
- [221] Vysokikh, Y.E. Carbon tip aperture cantilevers: Fabrication & features in near-field magneto-optical imaging / Y.E. Vysokikh, T.V. Mikhailova, S.Y. Krasnoborodko, A.S. Kolomiytsev, O.I. Ilin, A.N. Shaposhnikov, V.N. Berzhansky, M.F. Bulatov, D.V. Churikov, V.I. Shevyakov // *J. Magn. Mater.* – 2021. – Vol. 529. – 167837.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2021.167837>.
- [222] Achmari, P. Investigating the probe-tip influence on imaging using scanning near-field optical microscopy / P. Achmari, A.M. Siddiquee, G. Si, J. Lin, B. Abbey, S. Kou // *OSA Contin.* – 2021. – Vol. 4. – P. 1143–1154.  
<https://doi.org/10.1364/OSAC.415810>.

- [223] Stafeev, S.S. The Non-Vortex Inverse Propagation of Energy in a Tightly Focused High-Order Cylindrical Vector Beam / S.S. Stafeev, V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov, E.S. Kozlova // *IEEE Photonics J.* – 2019. – Vol. 11. – 4500810. <https://doi.org/10.1109/JPHOT.2019.2921669>.
- [224] Kotlyar, V.V. Energy backflow in the focus of a light beam with phase or polarization singularity / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, A.G. Nalimov // *Phys. Rev. A.* – 2019. – Vol. 99. – 033840. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.99.033840>.
- [225] Huang, P. Fresnel zone plate fabricated using a polyvinyl chloride gel / P. Huang, Z. Zhou, H. Ren // *Opt. Eng.* – 2018. – Vol. 57. – 117101. <https://doi.org/10.1117/1.OE.57.11.117101>.
- [226] Liu, Q. Validation of vectorial theories for the focusing of high numerical aperture Fresnel zone plates / Q. Liu, T. Liu, S. Yang, T. Wang, Y. Wang // *Opt. Commun.* – 2018. – Vol. 429. – P. 119–126. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2018.08.010>.
- [227] Minerbi, E. Nonlinear Metasurface Fresnel Zone Plates for Terahertz Generation and Manipulation / E. Minerbi, S. Keren-Zur, T. Ellenbogen // *Nano Lett.* – 2019. – 19. – P. 6072–6077. <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.9b01970>.
- [228] Geints, Y.E. Controlling near-field focusing of a mesoscale binary phase plate in an optical radiation field with circular polarization / Y.E. Geints, O.V. Minin, E.K. Panina, I.V. Minin // *Comput. Opt.* – 2021. – Vol. 45. – P. 512–519. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-878>.
- [229] Yoon, G. Metasurface zone plate for light manipulation in vectorial regime / G. Yoon, J. Jang, J. Mun, K.T. Nam, J. Rho, // *Commun. Phys.* – 2019. – Vol. 2. – 156. <https://doi.org/10.1038/s42005-019-0258-x>.
- [230] Kotlyar, V.V. Tight focusing of laser light using a chromium Fresnel zone plate / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, A.G. Nalimov, M.V. Kotlyar, L. O’Faolain, E.S. Kozlova // *Opt. Express.* – 2017. – Vol. 25. – P. 19662–19671. <https://doi.org/10.1364/OE.25.019662>.

- [231] Mote, R.G. Focusing behavior of 2-dimensional plasmonic conical zone plate / R.G. Mote, O.V. Minin, I.V. Minin // *Opt. Quantum Electron.* – 2017. – Vol. 49. – 271. <https://doi.org/10.1007/s11082-017-1108-2>.
- [232] Kozlova, E.S. Simulation of tight focusing of laser light by gold zone plate / E.S. Kozlova, V.V. Kotlyar // In Proceedings of the 2018 20th International Conference on Transparent Optical Networks (ICTON), Bucharest, Romania, 1–5 July 2018. – P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/ICTON.2018.8474002>.
- [233] Kim, J. Numerical and Experimental Study on Multi-Focal Metallic Fresnel Zone Plates Designed by the Phase Selection Rule via Virtual Point Sources / J. Kim, H. Kim, G.-Y. Lee, J. Kim, B. Lee, Y. Jeong // *Appl. Sci.* – 2018. – Vol. 8. – 449. <https://doi.org/10.3390/app8030449>.
- [234] Yang, J. Dual-type fractal spiral zone plate for generating sequence of square optical vortices / J. Yang, Y. Zhong, C. Zheng, S. Ding, H. Zang, E. Liang, L. Cao // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2019. – Vol. 36. – 893.
- [235] Zang, H. Fractal spiral zone plate with high-order harmonics suppression / H. Zang, S. Ding, L. Wei, C. Wang, Q. Fan, L. Cao, // *Appl. Opt.* – 2019. – Vol. 58. – P. 8680–8686. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.36.000893>.
- [236] Kozlova, E.S. Modeling of the optical vortex generation using a silver spiral zone plate / E.S. Kozlova // *Comput. Opt.* – 2018. – Vol. 42. – P. 977–984. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2018-42-6-977-984>.
- [237] Cheng, S. Composite Spiral Zone Plate / S. Cheng, T. Xia, M. Liu, C. Zheng, H. Zang, S. Tao // *IEEE Photonics J.* – 2019. – Vol. 11. – P. 1–11. <https://doi.org/10.1364/AO.392746>.
- [238] Kim, H. Theoretical and numerical study of cylindrical-vector-mode radiation characteristics in periodic metallic annular slits and their applications / H. Kim, Y. Jeong // *Curr. Opt. Photonics.* – 2018. – Vol. 2. – P. 482–487.
- [239] Luo, X.-G. Broadband spin Hall effect of light in single nanoapertures / X.-G. Luo, M.-B. Pu, X. Li, X.-L. Ma // *Light Sci. Appl.* – 2017. – Vol. 6. – e16276. <https://doi.org/10.1038/lsa.2016.276>.

- [240] Kotlyar, V.V. Sharp focusing of vector optical vortices using a metalens / V.V. Kotlyar, A. G. Nalimov // *J. Opt.* – 2018. – Vol. 20. – 075101. <https://doi.org/10.1088/2040-8986/aac4b3>.
- [241] Zhang, Yu. Multidimensional manipulation of wave fields based on artificial microstructures / Yu. Zhang, H. Liu, H. Cheng, J. Tian, S. Chen // *Opto-Electron. Adv.* – 2020. – Vol. 3. – 200002. <https://doi.org/10.29026/oea.2020.200002>.
- [242] Luo, X. Vector optical field manipulation via structural functional materials: Tutorial / X. Luo, M. Pu, F. Zhang, M. Xu, Yi. Guo, L. Li, X. Ma // *J. Appl. Phys.* – 2022. – Vol. 131. – 181101. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0089859>.
- [243] Li, Y. Probability distribution of the orbital angular momentum mode of the ultrashort Laguerre-Gaussian pulsed beam propagation in oceanic turbulence / Y. Li, Y. Zhang, Y. Zhu // *Results Phys.* – 2018. – Vol. 11. – P. 698–705. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.10.013>.
- [244] Zukersteina, M. Formation of tubular structures and microneedles on silicon surface by doughnut-shaped ultrashort laser pulses / M. Zukersteina, J. Hrabovsky, J. Sladek, I. Mirza, Y. Levy, N.M. Buakova // *Appl. Surf. Sci.* – 2022. – Vol. 592. – 153228. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2022.153228>.
- [245] Richards, B. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system / B. Richards, E. Wolf // *Proc. R. Soc. A.* – 1959. – Vol. 253. – P. 358–379. <https://doi.org/10.1098/rspa.1959.0200>.
- [246] Kozlova, E. Measuring of Transverse Energy Flows in a Focus of an Aluminum Lens / E. Kozlova, S. Stafeev, S. Fomchenkov, V. Podlipnov, A. Savelyeva, V. Kotlyar // *Photonics.* – 2022. –V. 9. –P. 592. DOI: 10.3390/photonics9080592.
- [247] Kozlova, E.S. Investigation of Plasmonic Lens with Annular Structure for Laser Light Focusing / E. S. Kozlova, V. V. Kotlyar, and A. A. Saveleyeva // *IEEEExplore: 2021 Photonics & Electromagnetics Research Symposium (PIERS)*. —2022. — P. 1094-1100. DOI: 10.1109/PIERS53385.2021.9694753.