

На правах рукописи

Савельева Александра Александровна

РАСЧЕТ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ЗАРЯДА СУПЕРПОЗИЦИИ  
ВИХРЕВЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ

1.3.6. - Оптика

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Самара - 2024

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» на кафедре технической кибернетики.

Научный руководитель: **Котляр Виктор Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты:

**Воляр Александр Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского», Физико-технический институт, заведующий кафедрой общей физики;

**Вьюнышев Андрей Михайлович**, кандидат физико-математических наук, Институт физики им. Л.В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук – обособленное подразделение федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр» СО РАН», лаборатория когерентной оптики, старший научный сотрудник.

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Томск.

Защита состоится 6 декабря 2024 года в 10:00 на заседании диссертационного совета 24.2.379.01, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева», по адресу: 443086, г. Самара, Московское шоссе, д. 34.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАО ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева»: [https://ssau.ru/resources/dis\\_protection/savelyeva](https://ssau.ru/resources/dis_protection/savelyeva).

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета 24.2.379.01  
к.ф.-м.н., доцент

Телегин А. М.

## Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена расчету топологического заряда суперпозиции вихревых лазерных пучков, а также поиску новых Фурье-инвариантных вихревых лазерных пучков.

**Актуальность темы.** Лазерные оптические вихри, известные в науке с начала 80х годов прошлого века, до сих пор вызывают интерес ученых из-за их широкого применения в зондировании турбулентной атмосферы, передачи и обработки информации с уплотнением информационных каналов, субволновой микроскопии, квантовой информатики, микроманипулировании. Основными характеристиками параксиальных вихревых лазерных пучков является орбитальный угловой момент (ОУМ) и топологический заряд (ТЗ).

Световые поля с фазовой сингулярностью, то есть с точками неопределенности фазы, в которых световое поле имеет изолированный ноль интенсивности, ввели в рассмотрение J. Nye и M. Berry (1974). Точки фазовой сингулярности также называются винтовыми дислокациями. В известной работе L. Allen и соавторов (1992), установлено, что пучок Лагерра-Гаусса обладает орбитальным угловым моментом (ОУМ). Причем каждый фотон в пучке обладает ОУМ, равным  $n\hbar$ , где  $n$  – топологический заряд пучка,  $\hbar$  – постоянная Планка. Топологический заряд (ТЗ) вихревого пучка по определению M. Berry (2004) равен алгебраической сумме целого числа скачков фазы на  $2\pi$  при обходе в сечении пучка по окружности бесконечного радиуса. Орбитальный угловой момент вихревого пучка сохраняется при распространении пучка в свободном пространстве. Топологический заряд тоже сохраняется за исключением начальной плоскости, в которой ТЗ может быть задан произвольно. Оптические элементы, которые преобразуют гауссов пучков в пучок сингулярностью фазы известны давно. Это элементы бессель-оптики (Сойфер В.А., 1984), амплитудные голограммы с вилочками (Соскин М.С., 1991), модовые конверторы (Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г., 1991), спиральные фазовые пластинки (Котляр В.В., Хонина С.Н., 1992), жидкокристаллические модуляторы света (Forbes A., 2016). Вихревые оптические пучки, амплитуды которых являются точными решениями параксиального уравнения Гельмгольца, хорошо известны в оптике. Это пучки Лагерра-Гаусса (Siegman A.E., 1986), Бесселя-Гаусса (Gori F., 1987), Эрмита-Лагерра-Гаусса (Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г., 2004), Айнса-Гаусса (Bandres M.A., 2004), Гипергеометрические-Гаусса (Karimi E., 2007), erf-Гаусса (Фадеева Т., Воляр А.В., 2012), асимметричные Лагерра-Гаусса (Котляр В.В., Ковалев А.А., 2016) и др. Наличие точного аналитического выражения для описания комплексной амплитуды вихревых пучков позволяет найти основные характеристики этих пучков (ОУМ, ТЗ, расходимость пучка, его мощность и т.д.) до моделирования. Поэтому поиск новых аналитических точных решений для параксиальных пучков всегда был интересен оптикам и поэтому является актуальной задачей. Многие из перечисленных пучков являются структурно-устойчивыми пучками, которые сохраняют структуру распределения интенсивности при распространении, изменяясь только масштабно (например, пучки Лагерра-Гаусса). Но некоторые из упомянутых пучков не являются структурно-устойчивыми и даже не являются Фурье-инвариантными (например, пучки Бесселя-Гаусса). Для задач зондирования турбулентной атмосферы с помощью вихревых пучков достаточно, чтобы пучок был Фурье-инвариантным, так как рассматривается распространение пучка на большие расстояния. Кроме этого такие пучки удобны для манипуляции микрочастицами, так как известно распределение интенсивности в фокусе сферической линзы. Поэтому поиск новых вихревых лазерных пучков, обладающих Фурье-инвариантностью, явля-

ется актуальной задачей. В данной диссертационной работе будут исследованы новые Фурье-инвариантные вихревые пучки: квадратные пучки Лагерра-Гаусса и пучки Лагерра-Гаусса с автофокусировкой.

Для многих из перечисленных вихревых лазерных пучков нахождение топологического заряда является тривиальной задачей (например, для пучков Лагерра-Гаусса, Бесселя-Гаусса), так как в комплексной амплитуде этих пучков присутствует в качестве множителя угловая гармоника  $\exp(in\varphi)$ , где  $n$  - целое число,  $\varphi$  - полярный угол в сечении пучка. Поэтому ТЗ таких пучков равен  $n$ . Мы уже упоминали, что нормированный на мощность ОУМ таких пучков также равен  $n$ . В общем случае, если параксиальный вихревой пучок описывается комплексной амплитудой  $E(r, \varphi, z)$ , то его ОУМ  $J_z$  и ТЗ  $TC$  рассчитываются по известным формулам:

$$J_z = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} E^*(r, \varphi, z) \frac{\partial}{\partial \varphi} E(r, \varphi, z) r dr d\varphi, \quad (1)$$

$$TC = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi, z) d\varphi,$$

где  $\operatorname{Im}$  – мнимая часть числа,  $\arg$  – аргумент комплексного числа,  $(r, \varphi, z)$  - цилиндрические координаты,  $*$  - комплексное сопряжение. Отсюда видно, что ОУМ зависит и от амплитуды пучка, и от фазы, а ТЗ зависит только от фазы светового поля. Поэтому в общем случае это две разные характеристики оптического вихря, и для понимания особенностей эволюции пучка в пространстве требуется вычисление обеих этих характеристик. Но, если ОУМ для вихревых пучков рассчитывается во многих работах, то ТЗ, особенно суперпозиций оптических вихрей, почти не исследовался.

В данной диссертационной работе будет рассчитан ТЗ суперпозиции оптических вихрей в виде геометрической прогрессии и суперпозиции одинаковых параллельных пучков Лагерра-Гаусса с разными амплитудами, но одинаковыми фазами.

**Цель диссертационной работы.** Расчет топологического заряда суперпозиции лазерных оптических вихрей и поиск новых видов Фурье-инвариантных оптических вихрей.

#### **Задачи диссертационной работы.**

1. Исследовать суперпозицию лазерных оптических вихрей в виде геометрической прогрессии и рассчитать топологический заряд такой суперпозиции.
2. Рассчитать топологический заряд суперпозиции смещенных с оптической оси одинаковых пучков Лагерра-Гаусса.
3. Предложить и изучить три новых вида Фурье-инвариантных вихревых лазерных пучков: квадратные, двойные и самофокусирующиеся пучки Лагерра-Гаусса.

**Научная новизна.** В диссертационной работе впервые получены следующие результаты.

1. Рассчитан топологический заряд соосной суперпозиции скалярных гауссовых оптических вихрей, которая представляет собой геометрическую конечную или бесконечную прогрессию. У такой суперпозиции в общем случае три целых параметра и один действительный. Топологический заряд суперпозиции зависит от этих четырех параметров. Показано, что если в начальной плоскости у такой суперпозиции топологический заряд полуцелый, то при распространении в свободном пространстве он становится целым.

2. Показано, что топологический заряд суперпозиции нескольких одинаковых параллельных однокольцевых пучков Лагерра-Гаусса (ЛГ) с разными амплитудами и одинаковой начальной фазой равен топологическому заряду каждого отдельного пучка.

Показано, что наличие фазовой задержки между пучками ЛГ в суперпозиции позволяет увеличивать или уменьшать топологический заряд всей суперпозиции.

3. Показано, что вихревой пучок Лагерра-Гаусса «в квадрате» является Фурье-инвариантным и сохраняет свою структуру в фокусе сферической линзы. В зоне дифракции Френеля такой пучок преобразуется в суперпозиции обычных пучков ЛГ, число которых равно числу колец у пучка ЛГ «в квадрате». Рассмотрен также более общий пучок - двойной пучок Лагерра-Гаусса, являющийся «произведением» двух пучков ЛГ. Такой пучок будет Фурье-инвариантным, если число колец у двух пучков ЛГ в «произведении» одинаковое.

**Научная и практическая значимость.** Если топологический заряд отдельных вихревых оптических пучков Лагерра-Гаусса, Бесселя-Гаусса и других известен и равен целому числу  $n$  в вихревой фазе  $n\varphi$ , где  $\varphi$  – полярный угол в сечении пучка, комплексной амплитуды пучка, то определение топологического заряда суперпозиции оптических вихрей является проблемой, решать которую следует для каждой конкретной суперпозиции. В данной диссертационной работе решены две задачи. Найден топологический заряд суперпозиции оптических вихрей в виде геометрической прогрессии и найден топологический заряд суперпозиции одинаковых, смещенных с оптической оси, пучков Лагерра-Гаусса. Также найдено несколько новых вихревых лазерных пучков, которые являются точным решением параксиального уравнения Гельмгольца и которые обладают свойством Фурье-инвариантности. Число точных решений уравнения распространения в оптике ограничено, и нахождение новых таких решений является определенным шагом в развитии оптики лазерных пучков.

Практическое значение полученных результатов в том, что для зондирования турбулентной атмосферы не требуется, чтобы пучок был структурно-инвариантным, а достаточно, чтобы он был Фурье-инвариантным, так как зондирование происходит на больших расстояниях и пучок при этом находится в дальней зоне дифракции. Поэтому найденные в работе новые вихревые Фурье-инвариантные лазерные пучки могут быть также использованы для зондирования турбулентной атмосферы, для беспроводной передачи информации и для манипулирования микрочастицами.

**Достоверность полученных результатов.** Достоверность полученных результатов доказывается корректными математическими преобразованиями и совпадением результатов расчета с помощью полученных аналитических выражений с результатами расчета с помощью интегрального преобразования Френеля. Полученные в работе результаты относятся к скалярным параксиальным лазерным пучкам, которые описываются комплексными амплитудами и являются точными решениями параксиального уравнения Гельмгольца.

#### **Основные положения, выносимые на защиту.**

1. Если у осевой суперпозиции гауссовых вихрей в виде геометрической прогрессии в начальной плоскости первый член прогрессии равен  $a \exp(ikm\varphi)$ , где  $k, m$  – целые числа,  $a$  – действительное число,  $\varphi$  – полярный угол в сечении пучка, и если знаменатель прогрессии равен  $a \exp(im\varphi)$ , а последний член прогрессии (последний оптический вихрь в суперпозиции) равен  $a^n \exp(inm\varphi)$ , то топологический заряд такой суперпозиции, при любой амплитудной функции, зависящей только от радиальной переменной  $r$  в сечении пучка, равен  $km$ , если  $|a| < 1$ , или  $nm$ , если  $|a| > 1$ , или равен  $(k+n)m/2$ , если  $|a| = 1$ .

2. Топологический заряд суперпозиция нескольких одинаковых параллельных однокольцевых пучков Лагерра-Гаусса с разной амплитудой, но с одинаковой начальной фазой, равен топологическому заряду пучков, входящих в суперпозицию. Подбором разности фаз между пучками в суперпозиции можно увеличивать или уменьшать топологический заряд всей суперпозиции.
3. Вихревой лазерный пучок, комплексная амплитуда которого равна квадрату комплексной амплитуды пучка Лагерра-Гаусса, является Фурье-инвариантным, то есть сохраняет с точностью до постоянной и масштаба свою структуру в дальнем поле и фокусе сферической линзы. В зоне дифракции Френеля такой пучок преобразуется в суперпозицию обычных пучков ЛГ, число которых равно числу колец у пучка ЛГ «в квадрате».

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 11 работ в изданиях, рекомендованных ВАК России и/или цитируемых в международной базе Scopus.

**Апробация работы.** Результаты, вошедшие в диссертационную работу, представлялись на 17 конференциях, в том числе на 14 международных и 3 всероссийских. Основные результаты работы докладывались на международных и всероссийских конференциях, в том числе: VI Международная конференция и молодежная школа «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2020), Россия, г. Самара, 26–29 мая 2020; XVIII Всероссийский молодежный Самарский конкурс-конференция научных работ по оптике и лазерной физике, Россия, г. Самара, ФИАН, 10–14 ноября 2020; XVIII Международная научная конференция ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЯХ-2020, Россия, г. Самара, 17-20 ноября 2020; XXII International Conference of Transparent Optical Networks, Bari, Italy, 19-23 July 2020; «Оптические технологии в телекоммуникациях» ОТТ-2021 Материалы XIX Международной научно-технической конференции, Россия, г. Самара, ПГУТИ, 23 – 26 ноября 2021; VII Международная конференция и молодежная школа «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2021), г. Самара, 20-24 сентября 2021; Международная конференция "Физика.СПб", Россия, г. Санкт-Петербург, 17-21 Октября 2021; PIERS 2021, Hangzhou, 22 November; XV Международная конференция «Прикладная оптика», Санкт-Петербург, ГОИ, 15-16 декабря 2022; VIII Международная конференция и молодежная школа «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2022), г. Самара, 23-27 Мая 2022; HOLOSCHOOL XXXII, Россия, Санкт-Петербург, 30 Мая - 3 Июня 2022; XX Международная научно-техническая конференция «Оптические технологии в телекоммуникациях» ОТТ-2022, г. Уфа, 23 – 25 ноября 2022; Всероссийская научная конференция с международным участием "Енисейская Фотоника – 2022", 19 – 24 сентября 2022; Международная конференция "Физика.СПб", Россия, г. Санкт-Петербург, 17–21 октября 2022; XX Всероссийский молодежный Самарский конкурс-конференция научных работ по оптике и лазерной физике, посвященный 100-летию со дня рождения Н.Г. Басова, Россия, г. Самара, 8–12 ноября 2022; IX International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT-2023), Samara, Russia, 17-21 April 2023; 20-я Международная конференция по голографии и прикладным оптическим технологиям (HOLOEXPO-2023), Сочи, Россия, 12-15 сентября 2023; Photonics of Vortex Light: Problems And Perspectives, Samarkand, Uzbekistan, 23-26 October 2023.

**Объем и структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка цитируемой литературы (247 наименований). Работа изложена на 151 странице и содержит 51 рисунок.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы ее цель и задачи, дан краткий обзор научных работ по рассматриваемым вопросам, показана научная новизна полученных результатов, приводятся положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** посвящена суперпозициям оптических вихрей (ОВ). В первой части главы рассматривается коаксиальная суперпозиция гауссовых ОВ, которая может быть описана геометрической прогрессией. В начальной плоскости ( $z = 0$ ) такая суперпозиция имеет следующую комплексную амплитуду:

$$\begin{aligned} E_{1nk}(r, \varphi) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left(a^k e^{ikm\varphi} + a^{k+1} e^{i(k+1)m\varphi} + \dots + a^n e^{imn\varphi}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) a^k e^{ikm\varphi} \left(\frac{1 - a^{n-k+1} e^{i(n-k+1)m\varphi}}{1 - a e^{im\varphi}}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

где  $a^k$  – знаменатель геометрической прогрессии,  $k$  – первый член геометрической прогрессии,  $n$  – последний член геометрической прогрессии,  $m$  – топологический заряд,  $w$  – радиус перетяжки гауссова пучка.

Для расчета ТЗ использовалась формула М.В. Берри:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} d\varphi \right\} \quad (3)$$

Было доказано аналитически, что ТЗ геометрической прогрессии ОВ (2) в исходной плоскости существенно зависит от параметра  $a$  и равен

$$TC = \begin{cases} km, & |a| < 1, \\ \frac{k+n}{2}m, & |a| = 1, \\ nm, & |a| > 1. \end{cases} \quad (4)$$

Теоретические выводы были подтверждены результатами моделирования. На Рисунке 1 представлены распределения интенсивности и фазы светового поля (2) при  $n = 3$ ,  $k = 0$ ,  $m = 1$ ,  $a = 1$ ,  $w_0 = 500$  мкм, длина волны  $\lambda = 532$  нм, длина Рэлея  $z_0 = \pi w_0^2 / \lambda = 1476$  мм в разных поперечных плоскостях. На рисунке 1 видно, что при выбранных параметрах ТЗ в начальной плоскости равен  $3/2$ , как и предсказывает формула (4). Но уже на расстоянии  $z_0/20$  ТЗ становится почти целым, равным 3, и далее сохраняется. ТЗ отличается на рисунке 1 от целого из-за того, что расчет по формуле 3 ведется по кадру, размер которого ограничен, и не учитывает вклад от фазы за пределами кадра.

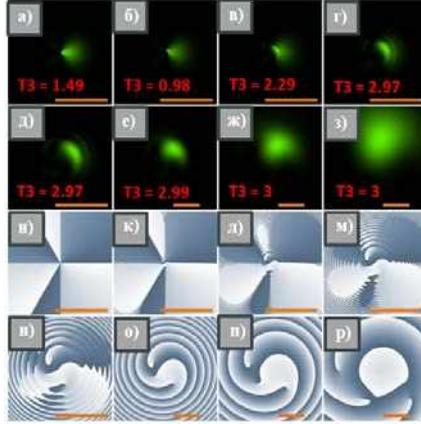


Рисунок 1 - Распределения интенсивности (а-д) и фазы (и-п) светового поля (2) при  $n = 3$ ,  $k = 0$ ,  $m = 1$ ,  $a = 1$ ,  $w_0 = 500$  мкм в плоскостях  $z = 0$  (а,и),  $z = z_0/200$  (б,к),  $z = z_0/50$  (в,л),  $z = z_0/20$  (г,м),  $z = z_0/10$  (д, н),  $z = z_0/2$  (е,о),  $z = z_0$  (ж,п),  $z = 2z_0$  (з,р).  
Отметка шкалы на каждом рисунке соответствует 1 мм.

Во второй части главы рассматривались суперпозиции однокольцевых пучков Лагерра-Гаусса с ТЗ  $m$ . Было показано, что если весовые коэффициенты такой суперпозиции действительные (то есть все пучки ЛГ имеют одинаковую фазу, но могут иметь разную амплитуду), то ТЗ суперпозиции равен ТЗ каждого пучка, то есть  $m$ . Комплексная амплитуда суперпозиции  $N$  параллельных одинаковых однокольцевых пучков ЛГ в начальной плоскости имеет вид:

$$E_m(x, y) = \sum_{n=1}^N c_n \left( r e^{i\varphi} - r_n e^{i\varphi_n} \right)^m \exp\left(-r^2 - r_n^2 + 2rr_n \cos(\varphi - \varphi_n)\right). \quad (5)$$

Для вычисления ТЗ суперпозиции (5) использовалась формула М.В. Бери (3). Было получено, что ТЗ данной суперпозиции равен  $m$ . Далее была рассмотрена суперпозиция  $N$  параллельных одинаковых пучков ЛГ с разными весовыми коэффициентами в дальнем поле, комплексная амплитуда в начальной плоскости равна:

$$E_m(x, y) = \sum_{n=1}^N c_n \left\{ \frac{\sqrt{2}}{w_0} \left[ (x - a_n) + i(y - b_n) \right] \right\}^m \times \exp\left[ -\frac{(x - a_n)^2 + (y - b_n)^2}{w_0^2} \right], \quad (6)$$

где  $(x, y)$  – декартовы координаты в начальной плоскости,  $w_0$  – радиус перетяжки гауссова пучка,  $(a_n, b_n)$  – координаты центров пучков,  $c_n$  – коэффициенты суперпозиции. В отличие от (5) в (6) пучки в суперпозиции взяты с комплексными весовыми коэффициентами  $c_n$  и явно выделен радиус перетяжки гауссова пучка. После подстановки комплексной амплитуды (6) в формулу для вычисления ТЗ (3) получим:

$$TC = m + \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^N c_n \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \exp(ika_n r \cos \varphi + ikb_n r \sin \varphi) \right] \times \left[ \sum_{n=1}^N c_n \exp(ika_n r \cos \varphi + ikb_n r \sin \varphi) \right]^{-1} d\varphi. \quad (7)$$

Можно показать, что второе слагаемое в (7), если  $c_n$  вещественные, равно нулю. Теоретические выводы были подтверждены результатами моделирования.

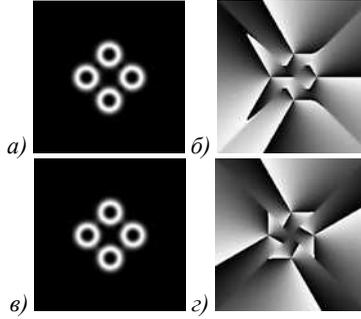


Рисунок 2 - Интенсивности (а, в) и фазы (б, г) двух суперпозиций внеосевых однокольцевых пучков ЛГ, у которых общий ТЗ (а, б) такой же, как у каждого пучка, или (в, г) отличается от ТЗ каждого пучка из-за наличия комплексных весовых коэффициентов в суперпозиции

На Рисунке 2 показаны интенсивности и фазы двух суперпозиций внеосевых однокольцевых пучков ЛГ при следующих параметрах: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки всех пучков  $w_0 = 0,5$  мм, число пучков ЛГ  $N = 4$ , ТЗ каждого из них  $m = 3$ , декартовы координаты центров этих пучков  $(a_1, b_1) = (r_0, 0)$ ,  $(a_2, b_2) = (0, r_0)$ ,  $(a_3, b_3) = (-r_0, 0)$ ,  $(a_4, b_4) = (0, -r_0)$ , где  $r_0 = 3w_0$ , коэффициенты суперпозиции при пучках ЛГ равны  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$  (рисунок 2а,б) и  $c_1 = -i$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = i$ ,  $c_4 = -1$  (рисунок 2в,г). Когда все коэффициенты суперпозиции одинаковы (Рисунок 2а,б), распределение фазы приобретает асимметричный вид, но общий ТЗ четырёх пучков ЛГ получился таким же, как у каждого из них:  $TC = 3,0042 \approx 3$ . Если же подобрать коэффициенты, как на Рисунке 2в,г, то, несмотря на их неодинаковость, распределение фазы симметрично относительно центра, а общий ТЗ изменился и получился равным  $TC = 4,0003 \approx 4$ .

В третьей части главы рассматривается суперпозиция пучков Лагерра-Гаусса с разными длинами волн. Комплексная амплитуда таких цветных оптических вихрей описывается выражением:

$$E(r, \varphi, z, t) = \sum_{s=1}^N c_s q_s^{-n_s-1}(z) \left( \frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^{n_s} \exp \left( -\frac{r^2}{w^2 q_s(z)} + in_s \varphi + ik_s z - i\omega_s t \right), \quad (8)$$

где  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты,  $t$  – время,  $w$  – радиус перетяжки гауссова пучка,  $c_s$  – весовые постоянные,  $n_s$  – топологические заряды каждого пучка в суперпозиции,

$$q_s(z) = 1 + i \frac{z}{z_s}, \quad z_s = \frac{k_s w^2}{2}, \quad k_s = \frac{2\pi}{\lambda_s}, \quad (9)$$

$z_s$  – длина Рэлея,  $k_s$  – волновое число света,  $\lambda_s$  – длина волны монохроматического света, а  $\omega_s$  – его частота ( $k_s = \omega_s/c$ ,  $c$  – скорость света в вакууме).

По известной формуле Берри (3) аналогично рассчитан топологический заряд суперпозиции (8). Оказалось, что ТЗ такой суперпозиции равен ТЗ пучка ЛГ с большей длиной волны, независимо от величины весового коэффициента этого пучка в суперпозиции и от величины его ТЗ. Это связано с тем, что расходимость пучка пропорциональна длине волны.

**Во второй главе** диссертации рассматривается суперпозиции пучков Лагерра-Гаусса и Бесселя-Гаусса. В первой части главы рассмотрен новый тип оптических пучков, амплитуда которых пропорциональна многочлену Лагерра в квадрате. Новый пучок по-

лучил название пучок ЛГ в квадрате  $(\text{ЛГ})^2$ , его комплексная амплитуда в начальной плоскости имеет вид:

$$E_{2,n,m}(r, \varphi) = E_2 \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + i2n\varphi\right) \left(\frac{r}{w}\right)^{2|n|} \left[ L_m^{|n|} \left( \frac{r^2}{w^2} \right) \right]^2, \quad (10)$$

где  $E_2$  – постоянная,  $L_m^n(x)$  –многочлен Лагерра. Для данного пучка было показано теоретически и численно, что вихревой пучок ЛГ «в квадрате» является Фурье-инвариантным и сохраняет свою структуру в фокусе сферической линзы или в дальней зоне дифракции. В зоне дифракции Френеля такой пучок преобразуется в осевую суперпозицию обычных пучков ЛГ, число которых равно числу колец у пучка ЛГ «в квадрате». Если кольцо всего одно, то пучок является структурно-стабильным.

На Рисунке 3 показаны распределения интенсивности пучка  $(\text{ЛГ})^2$  на разных расстояниях от перетяжки. Из Рисунка 3 видно, что на расстоянии 10 длин Рэлея (начало дальней зоны дифракции) в сечении пучка опять остаются 3 светлых кольца, как и в начальной плоскости, и самое яркое кольцо будет первым от центра. А на расстоянии 15 длин Рэлея распределение интенсивности совпадает с начальным распределением интенсивности, отличаясь только по масштабу. Таким образом, моделирование подтвердило теоретические предсказания.

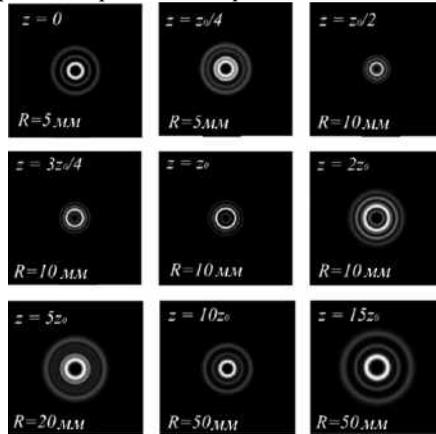


Рисунок 3 - Распределения интенсивности пучка  $(\text{ЛГ})^2$  при  $\lambda = 532 \text{ nm}$ ,  $w = 0,5 \text{ mm}$  ( $z_0 \approx 1,476 \text{ m}$ ),  $n = 3$ ,  $m = 2$  на расстоянии  $z$  от перетяжки Размер кадра  $2R \times 2R$ .

Во второй части главы был исследован новый ЛГ-пучок, топологический заряд которого равен разности между азимутальным (верхним) и радиальным (нижним) индексами ассоциированного полинома Лагерра, а радиальная координата возведена в степень, равную сумме этих показателей. Комплексная амплитуда данного пучка имеет вид:

$$E_{n,m}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + i(m-n)\varphi\right) \left(\frac{r}{w}\right)^{m+n} L_n^m \left( \frac{r^2}{w^2} \right) \quad (11)$$

В работе выявлено аналитически и подтверждено численным экспериментом, что обсуждаемый пучок демонстрирует интересные свойства: фурье-инвариантность, автофокусировку и возможность управления диаметром центрального темного пятна

интенсивности без изменения топологического заряда пучка. Обычно у вихревого пучка диаметр увеличивается с увеличением значения топологического заряда.

Результаты численного моделирования представлены на рисунке 4. Согласно Рисунку 4, на расстоянии Рэлея  $z_0$  от перетяжки образуется одиночное световое кольцо с радиусом, близким к 0,4 мм. Это эквивалентно фокусировке гауссова пучка с радиусом перетяжки 0,5 мм сферической линзой с числовой апертурой около 0,4. В начальной плоскости первое световое кольцо имеет радиус почти в два раза больше радиуса перетяжки и составляет примерно 0,9 мм. Обычный пучок ЛГ с радиусом перетяжки 0,5 мм имел бы такой радиус при топологическом заряде 3, тогда как пучок ЛГ из уравнения (11) имеет топологический заряд  $m - n = 4 - 3 = 1$ . Таким образом, моделирование подтверждает, что рассматриваемые пучки имеют увеличенную темную область в начальной плоскости (Рисунок 4а). И на расстоянии Рэлея фокальное пятно формируется в виде узкого светлого кольца (Рисунок 4и) почти без боковых лепестков. Из рисунка 4с также видно, что интенсивность в дальнем поле совпадает с начальной интенсивностью (Рисунок 4а). Это подтверждает свойство фурье-инвариантности пучков.

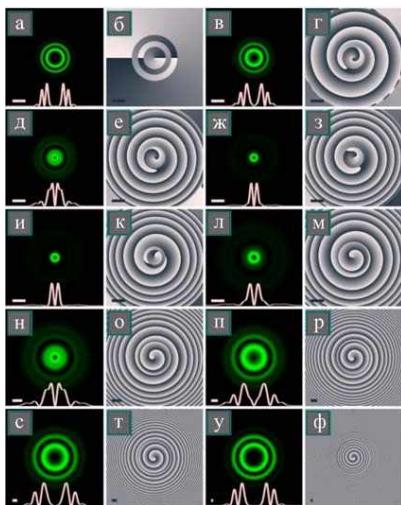


Рисунок 4 - Интенсивность (столбцы 1 и 3) и фазовые распределения (столбцы 2 и 4) пучка ЛГ из уравнения 1 в разных поперечных плоскостях  $z/z_0 = 0$  (а,б),  $1/4$  (в,г),  $1/2$  (д,е),  $3/4$  (ж,з),  $1$  (и,к),  $1,5$  (л, м),  $2$  (н, о),  $3$  (п, р),  $4$  (с, т),  $10$  (у, ф).

Другими параметрами расчета являются: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки гауссова пучка  $w_0 = 0,5$  мм, азимутальный (верхний) и радиальный (нижний) индексы полинома Лагерра соответственно  $m = 4$  и  $n = 3$ . Под распределениями интенсивности показаны радиальные сечения интенсивности. Отметки шкалы в левом нижнем углу (светлые в столбцах 1 и 3 и темные в столбцах 2 и 4) показывают 1 мм.

В третьей части главы рассматривается суперпозиция пучков Бесселя-Гаусса на расстоянии  $z$  от исходной плоскости, комплексная амплитуда которой имеет вид:

$$E(r, \varphi, z) = E_n \text{BG}_{n,w,\alpha}(r, \varphi, z) + E_m \text{BG}_{m,w,\beta}(r, \varphi, z), \quad (12)$$

где  $(r, \varphi, z)$  — цилиндрические координаты,  $E_n$  и  $E_m$  — коэффициенты суперпозиции,  $BG_{n,w,\alpha}$  и  $BG_{m,w,\beta}$  — комплексные амплитуды составляющих пучков Бесселя-Гаусса:

$$BG_{n,w,\alpha}(r, \varphi, z) = \frac{1}{q(z)} J_n \left( \frac{\alpha r}{q(z)} \right) \exp \left( ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} + in\varphi \right), \quad (13)$$

где  $J_n(\cdot)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка,  $\alpha$  — масштабный коэффициент,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $w$  — радиус перетяжки гауссова пучка,  $n$  — топологический заряд оптического вихря,  $q(z) = 1 + iz/z_0$ ,  $z_0 = kw^2/2$  — длина Рэлея. Топологический заряд поля (13) так же был посчитан с помощью формулы М.В. Берри:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{nE_n(-i)^n}{\sqrt{\alpha}} \exp \left( in\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} \right) + \frac{mE_m(-i)^m}{\sqrt{\beta}} \exp \left( im\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} + \frac{\beta - \alpha}{|q(z)|^2} \left( i + \frac{z}{z_0} \right) r \right)}{\frac{E_n(-i)^n}{\sqrt{\alpha}} \exp \left( in\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} \right) + \frac{E_m(-i)^m}{\sqrt{\beta}} \exp \left( im\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} + \frac{\beta - \alpha}{|q(z)|^2} \left( i + \frac{z}{z_0} \right) r \right)} d\varphi \quad (14)$$

Если  $\alpha > \beta$ , то вторые слагаемые в числителе и знаменателе в (14) стремятся к нулю при  $r \rightarrow \infty$  и ТЗ равен  $TC = n$ . Если, наоборот,  $\alpha < \beta$ , то получим  $TC = m$ . Таким образом, суперпозиция (12) имеет ТЗ, который определяется отношением масштабных коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  функций Бесселя, а амплитуды составляющих пучков не влияют на ТЗ.

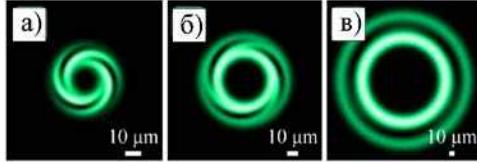


Рисунок 5 - Распределения интенсивности суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса с  $E_5 = E_2 = 1$  и  $\alpha = 1,5/\lambda$ ,  $\beta = 1/\lambda$  в трех различных плоскостях:  $z = z_0/2$  (а),  $z = z_0$  (б),  $z = 3z_0$  (в).

**Третья глава диссертации** посвящена исследованию спиральных зонных пластинок и оптических вихрей, которые могут быть получены с их помощью. Было проведено сравнение интенсивности в фокусе вихревого пучка, сфокусированного зонной пластинкой (ЗП) и интенсивности гауссова пучка, сфокусированного спиральной зонной пластинкой (СЗП) того же порядка. Были рассмотрены фазовая ЗП с 13 кольцами и СЗП, выполненные из кварцевого стекла на подложке. Радиусы зон библиографического рельефа ЗП были рассчитаны по следующему уравнению:

$$r_p = \sqrt{p\lambda f + p^2 \lambda^2 / 4} \quad (15)$$

где  $r_p$  — радиус зоны с номером  $p$ ,  $\lambda$  — длина волны падающего излучения,  $f$  — фокусное расстояние. Для проектирования ЗП использовались следующие параметры:  $\lambda = 0,532$  мкм,  $f = \lambda$  — фокусное расстояние ЗП равно длине волны света (числовая апертура  $NA=0,99$ ),  $M = 27$  (общее количество зон, что дает 13 колец). В качестве падающего света для ЗП предлагается линейно поляризованный гауссов вихревой пучок с длиной волны  $\lambda = 0,532$  мкм, радиусом перетяжки  $w = 8$  мкм и топологическим зарядом  $m = 3$ . Падающее поле рассчитывалось в MATLAB по следующей формуле:

$$\begin{cases} E_x(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \exp(im\varphi); \\ E_y(r, \varphi) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Функция пропускания для бинарной СЗП имеет следующий вид:

$$T(r, \varphi) = \text{sign}\left\{\exp\left[im\varphi + ik\left(\sqrt{f^2 + r^2} - f\right)\right]\right\}, \quad (17)$$

где  $r$  и  $\theta$  — полярные координаты,  $k$  — волновое число,  $f$  — фокусное расстояние. Для расчета СЗП использовались следующие параметры:  $m = 3$ ,  $\lambda = 0,532$  мкм,  $f = \lambda$ . Максимальный диаметр элемента ограничен 8 мкм. Моделирование проводилось частотно-зависимым методом FDTD в программном комплексе FullWAVE. В ходе исследования анализировались усредненные по времени компоненты вектора электрического поля, интенсивность и компоненты вектора Пойнтинга. Результаты моделирования показаны ниже. На рисунке 6 показано распределение интенсивности на расстоянии  $z = f = 0,532$  мкм от рельефа (плоскость теоретического фокуса). Результаты моделирования представлены на рисунках 6-7.

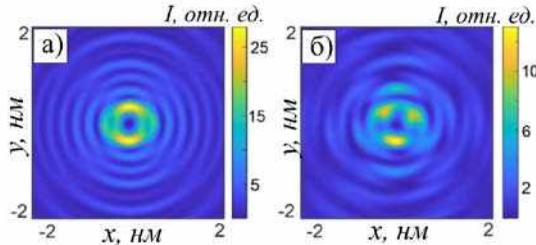


Рисунок 6 - Распределение интенсивности в фокальной плоскости на расстоянии 0,532 мкм от рельефа ЗП, освещенной гауссовым оптическим вихрем с топологическим зарядом  $m = 3$  (а) и СЗП с порядком тоже  $m = 3$ , освещенной гауссовым пучком (б).

Следующие выводы можно сделать по результатам моделирования. Поток энергии в фокусе светосильной ЗП, освещенной линейно поляризованным оптическим вихрем с топологическим зарядом  $m = 3$ , имеет кольцевую форму, как и при острой фокусировке линейно поляризованного оптического вихря идеальной сферической линзой. По-иную «ведет себя» СЗП порядка  $m = 3$  при фокусировке линейно поляризованного гауссова пучка. Ввиду многолучевой структуры СЗП вблизи центра (из центра СЗП выходят три ветки спирали) поток энергии в остром фокусе (у поверхности СЗП) также имеет три «лепестка». В фокусе СЗП распределение интенсивности также сохраняет трехлепестковую структуру. Для сравнения рассматривались СЗП с ТЗ  $m = 1, 2$  и 3. Бинарные шаблоны ЗП и СЗП представлены на рисунке 8.

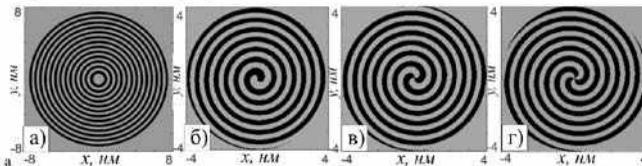


Рисунок 8 - Распределение фазы зонной пластинки (а) и СЗП с ТЗ:  $m = 1$  (б),  $m = 2$  (в),  $m = 3$  (г). Черный цвет – фаза ноль, серый цвет – фаза  $\pi$ .

В качестве падающего света для ЗП выбран линейно поляризованные гауссовы вихревые пучки с длиной волны  $\lambda = 532$  нм, перетяжкой  $w = 4$  мкм и ТЗ  $m = 1, 2$  и  $3$ . В качестве падающего света для всех СЗП был использован тот же гауссов пучок только без вихря ( $m=0$ ). Результаты моделирования показаны ниже.

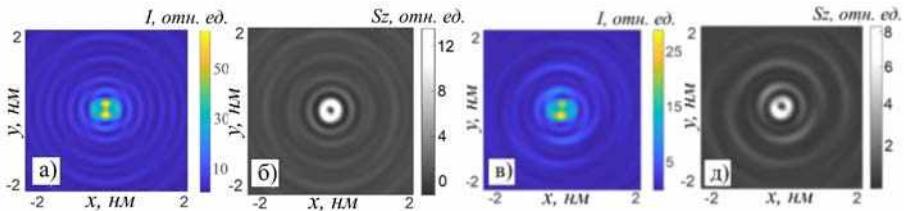


Рисунок 9 - Распределение интенсивности (а, в) и продольной составляющей вектора Пойнтинга (б, г) на расстоянии 532 нм после рельефа ЗП (а, б), освещенной вихрем с топологическим зарядом  $m = 1$  и СЗП с топологическим зарядом  $m = 1$ , освещенной гауссовым пучком (в, г).

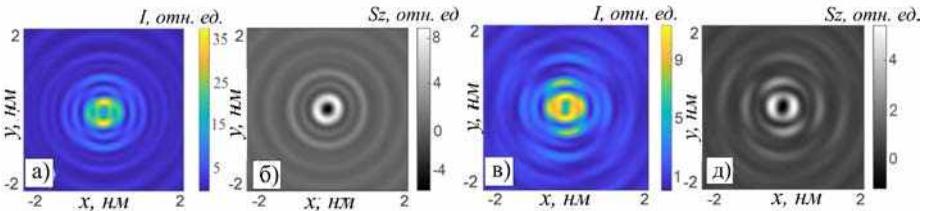


Рисунок 10 - Распределение интенсивности (а, в) и продольной составляющей вектора Пойнтинга (б, г) на расстоянии 532 нм после рельефа ЗП (а, б), освещенной вихрем с топологическим зарядом  $m = 2$  и СЗП с ТЗ  $m = 2$ , освещенной обычным гауссовым пучком (в, г).

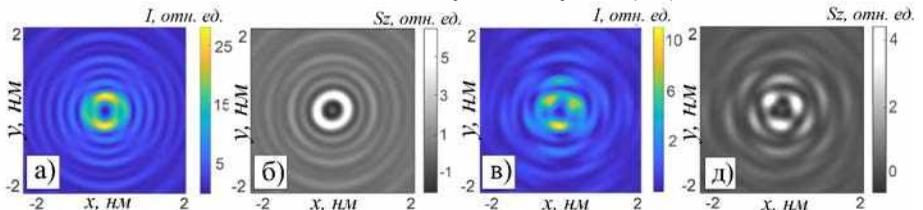


Рисунок 11 - Распределение интенсивности (а, в) и продольной составляющей вектора Пойнтинга (б, г) на расстоянии 532 нм после рельефа ЗП (а, б), освещенной вихрем с ТЗ  $m = 3$  и СЗП с ТЗ  $m = 3$ , освещенной гауссовым пучком с линейной поляризацией (в, г).

Из рисунков 9-11 видно, что для ЗП при всех освещающих вихрях с ТЗ  $m=1,2,3$  интенсивность и поток энергии в остром фокусе имеют одинаковый вид в виде неоднородного эллипса и кольца, соответственно. А при освещении гауссовым пучком СЗП разного порядка  $m=1,2,3$  интенсивность и поток энергии в фокусе отличаются для разных  $m$ . Для  $m=3$  и интенсивность и поток энергии имеют три лепестка. Эти три лепестка вращаются при распространении пучка и могут быть использованы для измерений продольных смещений.

## Заключение

В диссертационной работе получены следующие основные научные результаты.

1. Рассмотрена суперпозиция нескольких одинаковых параллельных однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса. Как для начальной плоскости, так и для дальней зоны аналитически показано и численно подтверждено, что в случае вещественных весовых коэффициентов суперпозиции (то есть все пучки имеют одинаковую фазу, но могут иметь разную амплитуду), общий топологический заряд суперпозиции равен топологическому заряду каждого отдельного пучка. Также показано, что наличие фазовой задержки между пучками позволяет менять общий топологический заряд суперпозиции. Полученный топологический заряд может использоваться для анализа принимаемого оптического сигнала при передаче информации вихревыми пучками с использованием одновременно и пространственного мультиплексирования, и мультиплексирования по орбитальному углу моменту.

2. Рассмотрены осевые суперпозиции Гауссовых оптических вихрей, которые описываются геометрической прогрессией. В начальной плоскости топологический заряд может быть целым или полужелым, а при распространении светового поля в свободном пространстве топологический заряд всегда остается целым. В общем случае геометрическая прогрессия оптических вихрей имеет три целочисленных параметра и один действительный параметр. От величины этих четырех параметров зависит топологический заряд всей суперпозиции оптических вихрей. При распространении в пространстве суперпозиция оптических вихрей, описываемая геометрической прогрессией, не сохраняет своей структуры интенсивности, но может иметь число лепестков интенсивности, равное одному из параметров семейства. Если действительный параметр геометрической прогрессии оптических вихрей равен единице, то все угловые гармоники в суперпозиции имеют одинаковый вес. В этом случае топологический заряд суперпозиции равен номеру средней угловой гармоники в прогрессии, то есть если первая угловая гармоника в прогрессии имеет топологический заряд  $k$ , а последняя –  $n$ , то топологический заряд всей суперпозиции в начальной плоскости будет равен  $(n + k)/2$ , а при распространении топологический заряд будет равен  $n$ .

3. Показано, что вихревой пучок Лагерра–Гаусса (ЛГ) «в квадрате» является Фурье-инвариантным и сохраняет свою структуру в фокусе сферической линзы. В зоне дифракции Френеля такой пучок преобразуется в суперпозиции обычных пучков ЛГ, число которых равно числу колец у пучка ЛГ «в квадрате». Если кольцо всего одно, то пучок является структурно-стабильным. Также рассмотрен более общий пучок, являющийся «произведением» двух пучков ЛГ. Такой пучок будет Фурье-инвариантным, если число колец у двух пучков ЛГ в «произведении» одинаковое. Рассмотренные пучки дополняют хорошо известный базис пучков ЛГ, которые интенсивно изучаются в связи с их устойчивостью при распространении в турбулентности.

4. Рассмотрен новый пучок Лагерра–Гаусса (ЛГ), который отличается от обычных модовых пучков ЛГ, сохраняющих с точностью до масштаба структуру распределения интенсивности. Этот пучок не сохраняет свою структуру при распространении в свободном пространстве, но обладает интересными свойствами. Этот пучок Фурье-инвариантный, имеет в начальной плоскости (в плоскости перетяжки) и в дальней зоне дифракции увеличенную область темного. То есть при сохранении топологического заряда пучка, меняя радиальный индекс многочлена ЛГ, можно увеличивать эффективный диаметр центрального темного пятна интенсивности, или уменьшать. Кроме того, данный пучок обладает свойством автофокусировки, то есть на расстоянии Рэлея от перетяжки распределение интенсивности имеет вид светового кольца (при любом значении радиального индекса) с минимальным диаметром и макси-

мальной интенсивностью на кольце. Данный пучок можно применять для манипулирования микрочастицами без использования дополнительной сферической линзы для его фокусировки.

**Результаты диссертационной работы опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК России и цитируемых в международной базе Scopus**

1. Савельева, А.А. Сравнение формы фокусных пятен по интенсивности и потоку энергии для высокоапертурных зонной пластинки и спиральной зонной пластинки / А. А. Савельева, Е. С. Козлова // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 4. – С. 531-536. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-934.
2. Kotlyar, V.V. New type of vortex laser beams: Squared Laguerre-Gaussian beam / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, E.S. Kozlova, A.A. Savelyeva, S.S. Stafeev // Optik. – 2022. – V. 270. – 169916. DOI: 10.1016/j.ijleo.2022.169916
3. Котляр, В.В. Топологический заряд суперпозиции одинаковых параллельных однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.А. Савельева // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 2. – С. 184-188. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1086.
4. Kozlova, E.S. Measuring of Transverse Energy Flows in a Focus of an Aluminum Lens / E.S. Kozlova, S.S. Stafeev, S.A. Fomchenkov, V.V. Podlipnov, A.A. Savelyeva, V.V. Kotlyar // Photonics. – 2022. – V. 9. – P. 592. DOI: 10.3390/photonics9080592.
5. Kotlyar, V.V. Product of Two Laguerre–Gaussian Beams / V.V. Kotlyar, E.G. Abramochkin, A.A. Kovalev, A.A. Savelyeva // Photonics. – 2022. – V. 9. – P. 496. DOI: 10.3390/photonics9070496.
6. Kotlyar, V.V. Geometric Progression of Optical Vortices / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, E.S. Kozlova, A.A. Savelyeva, S.S. Stafeev // Photonics. – 2022. – V.9. – P.407. DOI: 10.3390/photonics9060407.
7. Котляр, В.В. Когерентная суперпозиция пучков Лагерра–Гаусса с разными длинами волн: цветные оптические вихри / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.А. Савельева // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 5. – С. 692-700. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1106.
8. Kotlyar, V.V. Laguerre-Gaussian Beams with an Increased Dark Area and Autofocusing / V.V. Kotlyar, E.G. Abramochkin, A.A. Kovalev, A.A. Savelyeva // Photonics. – 2022. – V. 9. – Issue 10. – P. 708. DOI: 10.3390/photonics9100708.
9. Котляр, В.В. Двойные пучки Лагерра–Гаусса / В.В. Котляр, Е.Г. Абрамочкин, А.А. Ковалёв, А.А. Савельева // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 6. – С. 872-876. – DOI: 18287/2412-6179-CO-1177.
10. Козлова, Е.С. Вихревой Фурье-инвариантный пучок Лагерра–Гаусса в квадрате / Е.С. Козлова, А.А. Савельева, А.А. Ковалев, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2023. – Т. 47, № 3. – С. 367-373. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1228.
11. Котляр, В.В. Фурье - инвариантный пучок Лагерра - Гаусса с автофокусировкой / В.В. Котляр, Е.Г. Абрамочкин, А.А. Ковалев, Е.С. Козлова, А.А. Савельева // Компьютерная оптика. – 2024. – Т. 48, № 2. – С. 180-185. – DOI: 10.18287/2412-6179 CO-1374.