

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»

ОТДЕЛЕНИЕ «ИНСТИТУТ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ – САМАРА»
КУРЧАТОВСКОГО КОМПЛЕКСА КРИСТАЛЛОГРАФИИ И ФОТониКИ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»

На правах рукописи

Зайцев Владислав Дмитриевич

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПОТОКА ЭНЕРГИИ
И СПИНОВОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА В ОСТРОМ ФОКУСЕ
ВЕКТОРНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ**

1.3.6. Оптика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Котляр Виктор Викторович,
доктор физико-математических наук,
профессор

Самара – 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. Формирование субволновых фокусных пятен	13
1.1 Минимальное субволновое фокусное пятно по потоку энергии	13
1.2 Минимальный размер фокусного пятна при фокусировке света круговой поляризации	26
1.3 Выводы к главе 1	39
Глава 2. Индексы поляризационной сингулярности	40
2.1 Индексы поляризационной сингулярности, аналогичные топологическому заряду, для световых полей с неоднородной поляризацией	40
2.2 Индекс поляризационной сингулярности пучков Пуанкаре	60
2.3 Выводы к главе 2	70
3. Оптический эффект Холла в остром фокусе лазерного излучения	72
3.1 Спиновый эффект Холла до и после фокусировки цилиндрического векторного пучка высокого порядка	72
3.2 Острая фокусировка осевой суперпозиции цилиндрического векторного пучка высокого порядка и пучка с линейной поляризацией.	84
3.3 Дифракция лазерного излучения на бинарной зонной пластинке дробного порядка	109
3.4 Выводы к главе 3	117
Заключение	119
Список литературы	122

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена расчету основных характеристик векторных вихревых лазерных пучков в остром фокусе (распределения интенсивности, плотности потока энергии, спинового углового момента), а также поиску начальных состояний поляризации таких векторных пучков, при которых в фокусе можно наблюдать спиновый эффект Холла.

Актуальность работы. Поиск новых закономерностей и новых оптических эффектов в остром фокусе когерентного лазерного света является актуальной задачей. В остром фокусе, который формируется сферическими линзами с высокой числовой апертурой ($NA > 0,8$), нельзя использовать параксиальное приближение, а требуется рассчитывать все проекции векторов напряженности электромагнитного поля. Это достаточно трудная задача. Например, E. Lommel в 1885 году описывал световое поле в фокусе с помощью рядов Бесселя. Разложение поля в фокусе по плоским волнам использовали P. Debye (1909) и В.С. Гнатовский (1919). В работе Ричардса-Вольфа (1959) был разработан подход, который позволяет получать все проекции векторов напряженности электрического и магнитного полей вблизи фокуса с помощью однократных интегралов по азимутальному углу. В плоскости фокуса теория Ричардса-Вольфа дает точные значения величины светового поля. Этот формализм будет использоваться в данной работе.

Еще в 1873 году Е. Аббе открыл дифракционный предел, который равен половине длине волны света. И только в 2003 году R. Dorn с соавторами с помощью использования радиальной поляризации и кольцевой апертуры экспериментально преодолел дифракционный предел и получил фокусное пятно диаметром $0,45 \lambda$ от длины волны (λ). В дальнейшем много авторов улучшали данный результат. Например, был получен экспериментально круглый фокус с диаметром $0,44 \lambda$ (Котляр В.В. с соавторами, 2013), $0,42\lambda$ (Prabakaran K. с соавторами, 2014), $0,40\lambda$ (С.Т. Chong, 2008). Известно также, что с помощью узкой кольцевой диафрагмы или аксикона можно сформировать фокус в виде

пучка Бесселя нулевого порядка, диаметр которого равен $0,36\lambda$. Но боковые лепестки такого фокуса могут достигать 20-30 % от максимума интенсивности. Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться фокусные пятна с низким уровнем боковых лепестков. Остается невыясненным вопрос: при каком состоянии поляризации начального поля диаметр фокусного пятна будет минимальным?

Известно, что в сечении векторных пучков имеют место поляризационные сингулярности. Например, в поле с неоднородной линейной поляризацией могут быть точки (V-точки), в которых направление вектора линейной поляризации не определено. В поле с неоднородной эллиптической поляризацией могут быть точки (C-точки), в которых не определено направление оси эллипса поляризации, то есть точки с круговой поляризацией. Такие особые точки описываются индексом поляризационной сингулярности (индексом Стокса или индексом Пуанкаре-Хопфа). Наиболее полно поляризационные сингулярности и их индексы изучал I. Freund (1996, 2002). Однако обычно индекс поляризационной сингулярности рассчитывают для отдельной особой точки. Но в сечении векторного пучка может быть много особых точек и линий. Нерешенным остается вопрос: как рассчитывать индекс поляризационной сингулярности всего пучка, вне зависимости от того, сколько и каких особых точек пучок имеет в своем сечении. В данной работе с помощью формулы М. Berry (2004), которая применяется для расчета топологического заряда скалярных параксиальных вихревых пучков, рассчитан индекс поляризационной сингулярности пучков Пуанкаре. Пучки Пуанкаре в оптике известны после работы Beckley A.M. с соавторами (2010). Их состояние поляризации описывается двумя углами, задающими точку на поляризационной сфере Пуанкаре, и может быть однородным (линейная, эллиптическая и круговая поляризации) и неоднородной (азимутальная или радиальная).

Среди векторных пучков наиболее распространенными являются цилиндрические векторные пучки высокого порядка (Q. Zhan, 2009). Пучки с азимутальной и радиальной поляризацией являются частным случаем таких пучков. У таких пучков в сечении в начальной плоскости и в плоскости фокуса

поляризация в каждой точке линейная. В работе Стафеева С.С. с соавторами (2020) показано, что у пучка с линейной поляризацией, хотя в фокусе также поляризация линейная, но вблизи фокуса (до и после) поляризация эллиптическая. В данной работе этот результат обобщен и показано, что у любого цилиндрического векторного поля до и после фокуса формируются области с эллиптической поляризацией. Причем, в соседних областях направление вращения вектора поляризации разное (по часовой или против часовой стрелки).

В последнее время, благодаря появлению оптических сканирующих ближнепольных микроскопов различных типов, в остром фокусе были открыты интересные оптические эффекты: узлы из особых точек (W.T. Irvine с соавторами, 2008), оптические колеса (A. Aiello с соавторами, 2015), поляризационная лента Мебиуса (T. Bauer с соавторами, 2015), полная магнетизация (Y. Jiang с соавторами, 2013), обратный поток энергии (Котляр В.В. с соавторами, 2018), спин-орбитальная конверсия (O.G. Rodriguez-Herrera с соавторами, 2010), спиновый и орбитальный эффекты Холла (K.Y. Vlokh с соавторами, 2011; H. Hehe с соавторами, 2021; С.С. Стафеев с соавторами, 2021). Интересным является поиск лазерных пучков с другими состояниями поляризации, у которых в фокусе имеет место спиновый эффект Холла. В данной работе теоретически показано, что в остром фокусе суперпозиции цилиндрического векторного пучка и пучка с линейной поляризацией также имеет место спиновый эффект Холла. Под спиновым эффектом Холла в фокусе в дальнейшем будем понимать формирования у пучка с начальной неоднородной линейной поляризацией в фокусе четного числа областей с эллиптической или круговой поляризацией с разными направлениями вращения (со спинами разных знаков).

Цель диссертационной работы: Аналитический и численный расчёт проекций вектора напряженности электрического поля, распределение интенсивности, продольных проекций потока энергии для сравнения размеров фокусного пятна и спинового углового момента в остром фокусе для обнаружения спинового эффекта Холла для некоторых векторных вихревых

лазерных пучков, в том числе для цилиндрических векторных пучков любого целого порядка и для их суперпозиции с пучком с линейной поляризацией.

Задачи диссертационной работы:

1. Сравнить диаметры фокусных пятен, рассчитанных по интенсивности и по потоку энергии, для пучков с линейной, круговой поляризацией, а также для пучков с радиальной и азимутальной поляризацией. Найти при какой поляризации формируется фокус с минимальным диаметром.
2. Рассчитать индекс поляризации и интенсивность в остром фокусе пучков Пуанкаре, поляризационное состояние которых определяют два угла, задающих точку на поляризационной сфере Пуанкаре.
3. Рассчитать продольную проекцию вектора спинового углового момента до и после фокуса цилиндрических векторных пучков высокого порядка и показать, что в самом фокусе нет спинового эффекта Холла, а вблизи фокуса есть спиновый эффект Холла.
4. Рассчитать продольную проекцию спинового углового момента в фокусе суперпозиции цилиндрического векторного пучка порядка m и пучка с линейной поляризацией и показать, что только при нечетном m в фокусе имеет место спиновый эффект Холла.

Научная новизна

1. Аналитически и численно показано, что распределение осевого потока энергии в остром фокусе света с круговой и линейной поляризацией одинаковые и обладают круговой симметрией. Также показано, что равны осевые потоки энергии для оптических вихрей с единичным топологическим зарядом и с радиальной или азимутальной поляризацией. Аналитически показано, что диаметр фокусного пятна, рассчитанного по потоку энергии, у света с круговой поляризацией меньше (при прочих равных условиях), чем у оптического вихря с азимутальной поляризацией.
2. С помощью параметров Стокса найден индекс поляризационной сингулярности пучков Пуанкаре, он оказался равен топологическому

заряду оптических вихрей, участвующих в формировании пучка Пуанкаре. С помощью формализма Ричардса-Вольфа найдены аналитические выражения для проекций вектора напряженности электрического поля вблизи острого фокуса данных пучков. Получено выражение для распределения интенсивности в плоскости фокуса. Число локальных максимумов (боковых лепестков) интенсивности в плоскости фокуса пропорционально величине индекса поляризационной сингулярности пучка.

3. Аналитически показано, что до и после фокальной плоскости цилиндрического векторного пучка высокого порядка формируется четное число локальных субволновых областей, где вектор поляризации в каждой точке вращается. В соседних областях векторы поляризации вращаются в разные стороны, так что продольная составляющая векторов спинового углового момента в этих соседних областях имеет противоположный знак. Такое пространственное разделение левого и правого вращения векторов поляризации демонстрирует наличие оптического спинового эффекта Холла.
4. Аналитически и численно показано, что в остром фокусе аксиальной суперпозиции цилиндрического векторного пучка порядка m и пучка с линейной поляризацией, при нечетном m имеет место спиновый эффект Холла. То есть, хотя такой пучок в начальной плоскости имеет неоднородную линейную поляризацию, в фокусе формируются области с эллиптической или круговой поляризацией с чередующимися направлениями вращения (по часовой стрелке и против часовой стрелки).

Защищаемые положения

1. Если с помощью идеальной сферической линзы с высокой числовой апертурой сфокусировать гауссов пучок с круговой поляризацией и гауссов оптический вихрь первого порядка с азимутальной поляризацией, то диаметр фокусного пятна (при прочих равных условиях), рассчитанного по полуспаду распределения интенсивности

будет меньше у оптического вихря с азимутальной поляризацией. А если рассчитать диаметр фокусного пятна по полуспаду продольной составляющей модуля вектора Умова-Пойнтинга (по потоку энергии), то меньший диаметр будет у гауссова пучка с круговой поляризацией.

2. Индекс поляризационной сингулярности векторных лазерных пучков Пуанкаре равен топологическому заряду оптических вихрей, участвующих в формировании таких пучков. При острой фокусировке векторных лазерных пучков Пуанкаре число локальных максимумов интенсивности (боковых лепестков) в плоскости фокуса пропорционально величине индекса поляризационной сингулярности пучка.
3. Хорошо известные цилиндрические векторные пучки высокого порядка имеют неоднородную линейную поляризацию в начальной плоскости и в плоскости фокуса. Вблизи фокальной плоскости, то есть до и после фокуса, эти пучки формируют в своем сечении четное число локальных субволновых областей, где вектор поляризации в каждой точке вращается. В соседних областях векторы поляризации вращаются в разные стороны, так что продольная составляющая векторов спинового углового момента (плотность спина) в этих соседних областях имеет противоположный знак. Такое пространственное разделение левого и правого вращения векторов поляризации демонстрирует наличие оптического спинового эффекта Холла.
4. При острой фокусировке аксиальной суперпозиции цилиндрического векторного пучка высокого порядка (порядка m) и пучка с линейной поляризацией в плоскости фокуса при нечетном номере m формируются субволновые локальные области с поперечным вихревым потоком энергии и с ненулевой третьей проекцией Стокса (с ненулевой плотностью спина). Это означает, что такой пучок с нечетным m имеет в фокусе области эллиптической или круговой поляризации с чередующимися направлениями вращения (по часовой стрелке и против

часовой стрелки). Такое разделение в пространстве областей с разным направлением поляризации является спиновым эффектом Холла.

Научная и практическая значимость полученных результатов. В диссертационной работе разработаны несколько новых подходов к изучению оптических закономерностей в остром фокусе лазерного излучения: 1) определение диаметра фокусного пятна по потоку энергии, а не по интенсивности, 2) определение индекса поляризационной сингулярности векторных пучков аналогично определению топологического заряда скалярных оптических вихрей, 3) определение характеристик спинового эффекта Холла в области фокуса цилиндрических векторных пучков высокого порядка.

Также значение полученных аналитических результатов в том, что они применимы для любой длины волны, любой числовой апертуры апланатической системы (идеальной сферической линзы) и для любого радиально-симметричного начального распределения амплитуды пучка.

Практическая ценность, полученных результатов, состоит в том, что 1) определение минимального фокусного пятна позволяет достигать предельного разрешения в оптической микроскопии, 2) от величины индекса поляризационной сингулярности векторных пучков зависит число боковых лепестков в фокусе, которые определяют структуру оптических ловушек для захвата и манипулирования микрочастицами, 3) спиновый эффект Холла в фокусе можно использовать в микромеханике в качестве оптического двигателя, когда в фокусе в двух соседних областях со спином разного знака вращаются две взаимодействующих микрочастицы в виде шестеренок. Параксиальные цилиндрические векторные пучки, у которых имеет место спиновый эффект Холла, можно использовать для передачи информации в беспроводных системах связи.

Достоверность полученных результатов подтверждается согласием теоретических выводов с результатами численного моделирования. А также совпадением результатов моделирования, полученных разными способами: с

помощью полученных аналитических выражений и с помощью прямого расчета интегралов Дебая.

Личный вклад автора состоит в получении теоретических результатов и проведении моделирования, а также в обсуждении полученных результатов. Автор лично запрограммировал расчет интегралов Дебая в формализме Ричардса-Вольфа и проводил с помощью этой программы расчет основных характеристик светового поля вблизи острого фокуса для различных начальных вихревых векторных лазерных пучков.

Апробация диссертационной работы. Основные результаты работы докладывались на международных и всероссийских конференциях, в том числе: на международной конференции «Оптические технологии в телекоммуникациях», г. Самара (2020, 2021); г. Уфа (2022); на международной конференции «Информационные технологии и нанотехнологии», г. Самара (2021, 2022, 2023); на международной конференции «Нолохро по голографии и прикладным оптическим технологиям» г. Сочи (2023); на всероссийской научной конференции с международным участием «Енисейская фотоника» г. Красноярск (2022); на международной конференции «Photonics and Electromagnetics Research Symposium» г. Ханчжоу, Китай (2021).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Текст изложен на 137 страницах машинописного текста, содержит 65 рисунков, 4 таблицы и список литературы из 132 наименований.

Краткое содержание диссертации.

Во введении обоснованы актуальность темы, новизна, теоретическая и практическая значимость и достоверность результатов работы. Проведён обзор научной литературы по теме диссертационного исследования и сформулирована новизна и основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе с помощью формул Ричардса-Вольфа производилось сравнение распределения интенсивности и продольной компоненты вектора Умова-Пойнтинга (осевого потока энергии) в плоскости острого фокуса. Для

этого были записаны аналитические выражения проекций вектора напряженности электрического поля, интенсивности и проекции на оптическую ось вектора Умова-Пойнтинга в фокусе при острой фокусировке апланатической системой света с линейной, круговой, радиальной и азимутальной поляризацией при прочих равных условиях. Для расчета проекций вектора напряженности электрического поля в фокусе была использована теория Ричардса-Вольфа.

Используя формулы Ричардса-Вольфа, было проведено моделирование фокусировки света с различной поляризацией апланатическим объективом с числовой апертурой $NA = 0,95$. Волновой фронт во всех случаях считался плоским или вихревым. Также была рассмотрена фокусировка света с круговой поляризацией плоскими дифракционными линзами. Было показано, что при увеличении числовой апертуры линзы, размер фокусного пятна сначала уменьшается, а потом начинает расти. Так как интенсивность и осевой поток энергии для света с левой и правой круговой поляризацией одинаковы, то была рассмотрена только правая поляризация. Фокусировка осуществлялась плоской дифракционной линзой, функция аподизации которой имеет вид $T(\theta) = \cos^{-3/2}\theta$. Считалось, что фокусируется плоская волна с длиной волны $\lambda = 532$ нм.

Во второй главе были рассчитаны индексы поляризационной сингулярности для векторных полей с цилиндрической поляризацией (радиальной и азимутальной) высших порядков, с гибридной радиально-циркулярной (и азимутально-циркулярной) поляризацией произвольных порядков, для полей с несколькими точками и с несколькими линиями поляризационной сингулярности, для пучков Пуанкаре, а также для полей с поляризацией, изменяющейся от центра к периферии. Проведено исследование широкого класса векторных лазерных пучков – пучков Пуанкаре, в которые, как частные случаи входят, как однородно поляризованные пучки с линейной и круговой поляризацией, так и цилиндрические векторные пучки с радиальной и азимутальной поляризацией, и пучки с неоднородной эллиптической поляризацией. По аналогии с ТЗ был рассчитан индекс поляризационной сингулярности пучков Пуанкаре. С помощью формализма Ричардса-Вольфа были получены аналитические выражения для

распределения проекций вектора напряженности электрического поля вблизи острого фокуса пучков Пуанкаре. И было получено выражение для распределения интенсивности в плоскости фокуса. Теоретические предсказания, следующие из полученных выражений, были подтверждены с помощью компьютерного моделирования. Получено выражение для распределения интенсивности в плоскости фокуса, и найдены параметры, при которых фокусное пятно имеет круглую форму.

В третьей главе используя интегралы Ричардса-Вольфа и численное моделирование, было показано, что вблизи острого фокуса (до фокуса и за фокусом) формируются локальные субволновые области с эллиптической и круговой поляризацией разного знака. Теоретически и численно, с помощью применения формул Ричардса-Вольфа, рассчитаны все шесть проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей в остром фокусе начального поля в виде суперпозиции цилиндрического векторного поля и однородного поля с линейной поляризацией. Были рассчитаны потоки энергии в фокусе (проекции вектора Пуанкаре), распределения интенсивности и компоненты Стокса.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

Глава 1. Формирование субволновых фокусных пятен

1.1 Минимальное субволновое фокусное пятно по потоку энергии

Острая фокусировка лазерного света с преодолением дифракционного предела постоянно находится в поле зрения ученых. Как известно, один из приемов уменьшения фокусного пятна является использование света с неоднородной поляризацией (радиальной или азимутальной). Первая работа, в которой экспериментально было получено субволновое фокусное пятно с помощью света с радиальной поляризацией, была выполнена в 2003 году. С помощью радиальной поляризации можно не только уменьшить фокусное пятно, но и увеличить глубину фокуса. Так в работах [2, 3] с помощью фокусировки света с радиальной поляризацией получено фокусное пятно с диаметром по полуспаду интенсивности (FWHM) $0,4\lambda$ и с глубиной фокуса (DOF) 4λ . В [4] получили большую глубину фокуса $DOF = 5\lambda$, но при этом и диаметр фокусного пятна увеличился ($FWHM = 0,45\lambda$). В работе [5] глубина фокуса была равна $DOF = 6,45\lambda$, а диаметр фокусного пятна был равен ($FWHM = 0,42\lambda$). Еще длиннее «световая игла» получилась в работе [6]: $DOF = 26\lambda$, $FWHM = 0,58\lambda$. В работе [7] сравнили диаметры фокусных пятен при фокусировке пучка Лагерра-Гаусса и Бесселя-Гаусса с радиальной поляризацией. Фокусные пятна получились соответственно $FWHM = 0,47\lambda$ и $FWHM = 0,44\lambda$. В этом разделе мы не будем рассматривать острую фокусировку плазмонов [8], так как теоретически плазмонные фокусные пятна могут быть сколь угодно малыми, хотя в работе [8] фокусное пятно имело размер $FWHM = 0,42\lambda$. Также мы не будем рассматривать фокусные пятна, которые получаются на основе эффекта супер-осцилляций [9], так как теоретически фокусные пятна такого рода могут иметь любой малый размер, но и световая энергия, идущая на формирование таких фокусных пятен составляет малые доли процента от энергии всего пучка. В работе [10] теоретически показано, что минимальное фокусное пятно для радиальной поляризации при числовой апертуре $NA = 1$ и при ограничении пучка узкой

кольцевой апертурой, равно диаметру квадрата функции Бесселя нулевого порядка ($\text{FWHM} = 0,36\lambda$). Известны также работы по получению субволнового фокусного пятна для света с линейной и азимутальной поляризацией. Так в работе [11] с помощью фазовой зонной пластинки для света с линейной поляризацией получено эллиптическое фокусное пятно с размером по малой оси эллипса равным $\text{FWHM} = 0,44\lambda$. А в работах [12, 13] с помощью металинзы для света с комбинированной линейно-азимутальной поляризацией получено эллиптическое фокусное пятно с размерами $\text{FWHM}_x = 0,37\lambda$ и $\text{FWHM}_y = 0,49\lambda$. Напомним, что дифракционный предел Аббе равен половине длины волны ($\text{FWHM} = 0,5\lambda$).

Заметим, что во всех перечисленных работах размер фокусного пятна рассчитывался по полуспаду интенсивности. Но интенсивность пропорциональна плотности световой энергии (или мощности) в данной точке пространства, и не показывает, как распространяется эта энергия после фокуса. Почти нет работ, в которых бы фокусное пятно оценивалось по потоку энергии. Также почти нет работ, в которых бы сравнивали между собой размеры фокусных пятен, рассчитанных и по интенсивности, и по потоку энергии. И нет работ, в которых бы было теоретически показано, какое фокусное пятно наименьшее (при прочих равных условиях) среди фокусных пятен, сформированных светом с разной поляризацией (линейной, круговой, радиальной и азимутальной).

В этом разделе сравниваются, полученные с помощью формализма Ричардса-Вольфа, распределения интенсивности и продольной компоненты вектора Умова-Пойнтинга (осевого потока энергии) в плоскости острого фокуса. Для этого найдены аналитические выражения проекций вектора напряженности электрического поля, интенсивности и проекции на оптическую ось вектора Умова-Пойнтинга в фокусе при острой фокусировке апланатической системой света с линейной, круговой, радиальной и азимутальной поляризацией при прочих равных условиях.

Фокусировка света с линейной поляризацией

Вектор Джонса для начального поля с линейной поляризацией, направленной вдоль оси x , имеет вид:

$$\mathbf{E}_{lin} = A(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

а проекции вектора напряженности электрического поля вблизи фокуса для начального поля (1.1) имеют вид:

$$\begin{aligned} E_{x,lin} &= -i(I_{0,0} + I_{2,2} \cos 2\varphi), \\ E_{y,lin} &= -iI_{2,2} \sin 2\varphi, \\ E_z &= -2iI_{1,1} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$I_{\nu,\mu} = \left(\frac{4\pi f}{\lambda} \right) \int_0^{\theta_0} \sin^{\nu+1} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-\nu} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{1/2}(\theta) A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_\mu(x) d\theta, \quad (1.3)$$

где λ – длина волны света, f – фокусное расстояние апланатической системы, $x = kr \sin \theta$, $J_\mu(x)$ – функция Бесселя первого рода и $NA = \sin \theta_0$ – числовая апертура, (r, φ) – полярные координаты в плоскости фокуса. Начальная функция амплитуды $A(\theta)$ (предположим, что это действительная функция) может быть константой (плоская волна) или в виде гауссова пучка:

$$A(\theta) = \exp \left(\frac{-\gamma^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} \right), \quad (1.4)$$

где γ – постоянная. Из (1.3) следует выражение для интенсивности в фокусе ($z = 0$) для света с линейной поляризацией:

$$I_{lin}(r, \varphi, z = 0) = I_{0,0}^2 + I_{2,2}^2 + 2I_{0,0}I_{2,2} \cos 2\varphi + 4I_{1,1}^2 \sin^2 \varphi. \quad (1.5)$$

Вектор Умова-Пойнтинга рассчитывался по формуле [14] $\mathbf{P} = [c/(8\pi)] \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$, где c – скорость света в вакууме, Re – вещественная часть числа, $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ – векторное произведение, $*$ – комплексное сопряжение (далее опустим постоянную $c/(8\pi)$). Было получено выражение для осевой проекции вектора потока энергии в фокусе при фокусировке света с линейной поляризацией.

$$P_{z,lin}(r, z = 0) = I_{0,0}^2 - I_{2,2}^2. \quad (1.6)$$

Из сравнения (1.5) и (1.6) видно, что, хотя в фокусе у света с начальной линейной поляризацией распределение интенсивности (1.5) не имеет радиальной

симметрии (интенсивность в виде эллипса вытянута вдоль оси x), но поток энергии вдоль оптической оси (1.6) (то есть та энергия, которая попадает к наблюдателю в дальней зоне) обладает радиальной симметрией.

Далее поступим аналогично и рассчитаем интенсивность и поток энергии для света с начальной круговой поляризацией.

Фокусировка света с круговой поляризацией

Так как интенсивность и осевой поток энергии для света с левой и правой круговой поляризацией одинаковые, то будем рассматривать только одну правую поляризацию, вектор Джонса для которой имеет вид:

$$\mathbf{E}_R = \frac{A(\theta)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

Проекция электрического поля вблизи фокуса для начального поля (1.7) имеют вид:

$$\begin{aligned} E_{x,R} &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (I_{0,0} + e^{2i\varphi} I_{2,2}), \\ E_{y,R} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (I_{0,0} - e^{2i\varphi} I_{2,2}), \\ E_{z,R} &= -\sqrt{2} e^{i\varphi} I_{1,1}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из (1.8) можно получить распределение интенсивности в фокусе для начального поля (1.7):

$$I_R(r, z=0) = I_{0,0}^2 + I_{2,2}^2 + 2I_{1,1}^2. \quad (1.9)$$

Осевой поток энергии для круговой поляризации имеет вид:

$$P_{z,R}(r, z=0) = I_{0,0}^2 - I_{2,2}^2 \quad (1.10)$$

Сравнивая выражения (1.6) и (1.10) можно заключить, что осевые потоки равны и, значит, фокусные пятна в плоскости фокуса по осевому потоку энергии при фокусировке света с линейной и круговой поляризацией имеют одинаковые размеры и равны вблизи оптической оси выражению:

$$\begin{aligned}
P_{z,R} (r \rightarrow 0, z = 0) &= P_{z,lin} (r \rightarrow 0, z = 0) \simeq I_{0,0}^2 = \\
&= \left[\left(\frac{4\pi f}{\lambda} \right) \int_0^{\theta_0} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^3 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{1/2} (\theta) A(\theta) J_0 (kr \sin \theta) d\theta \right]^2. \quad (1.11)
\end{aligned}$$

Интересный вывод можно также сделать из сравнения интенсивностей (1.5) и (1.9). На оптической оси интенсивности в фокусе у света с линейной и круговой поляризации равны между собой и равны выражению (1.11):

$$I_R (r \rightarrow 0, z = 0) = I_{lin} (r \rightarrow 0, z = 0) \simeq I_{0,0}^2 \quad (1.12)$$

При увеличении радиальной переменной r (при отходе от оптической оси) интенсивность для линейной поляризации (1.5) по вертикальной оси ($\varphi = \pi/2$) будет убывать быстрее (так как третье слагаемое в (1.5) будет отрицательным), чем будет убывать интенсивность для круговой поляризации (1.9). То есть размер фокусного пятна (1.5) по вертикальной оси (вдоль малой оси эллипса) будет меньше, чем размер круглого фокусного пятна для круговой поляризации (1.9).

Итак, можно заключить, что размер фокусного пятна по потоку энергии у света с линейной и круговой поляризацией равны и меньше, чем размер фокусного пятна по интенсивности для света с круговой поляризацией, но немного больше, чем размер фокусного пятна по интенсивности для света с линейной поляризацией по направлению малого эллипса. Эти выводы подтверждены с помощью моделирования.

Фокусировка света с радиальной поляризацией

Далее получим выражения для интенсивности и осевого потока энергии для радиальной поляризации. Вектор Джонса начального поля имеет вид:

$$\mathbf{E}_{rad} = A(\theta) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Компоненты вектора напряженности электрического поля в фокусе для начальной радиальной поляризации (1.13) можно найти в [15, 17]:

$$\begin{aligned}
E_{x,rad} &= \cos \varphi (I_{0,1} - I_{2,1}), \\
E_{y,rad} &= \sin \varphi (I_{0,1} - I_{2,1}), \\
E_{z,rad} &= 2iI_{1,0}.
\end{aligned} \quad (1.14)$$

Из (1.14) следует выражение для распределения интенсивности в фокусе для начального света с радиальной поляризацией:

$$I_{rad}(r, z=0) = (I_{0,1} - I_{2,1})^2 + 4I_{1,0}^2. \quad (1.15)$$

Осевую проекцию вектора потока энергии в фокусе для начального поля с радиальной поляризацией (1.13) можно найти в [15]:

$$P_{z,rad}(r, z=0) = (I_{0,1} - I_{2,1})^2. \quad (1.16)$$

Из сравнения (1.15) и (1.16) видно, что интенсивность в фокусе на оптической оси отлична от нуля и зависит только от интенсивности продольной компоненты, и поэтому осевой поток энергии на оптической оси равен нулю:

$$\begin{aligned} I_{rad}(r \rightarrow 0, z=0) &\simeq 4I_{1,0}^2, \\ P_{z,rad}(r \rightarrow 0, z=0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Из (1.17) следует, что интенсивность (1.15) вблизи оптической оси имеет максимум (фокусное пятно), а осевой поток энергии имеет вид кольца и к наблюдателю в дальней зоне свет не доходит. Другими словами, фокусного пятна по потоку энергии в данном случае нет. Поэтому в следующем разделе рассмотрим фокусировку оптического вихря с радиальной поляризацией.

Фокусировка оптического вихря с радиальной поляризацией

Для получения круглого фокусного пятна рассмотрим в начальной плоскости оптический вихрь с единичным топологическим зарядом и радиальной поляризацией, имеющий матрицу Джонса в виде:

$$\mathbf{E}_{ra+v} = A(\theta) \exp(i\varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Проекции векторов напряженности электрического и магнитных полей в фокусе апланатической системы можно найти аналогично предыдущему с помощью формализма Ричардса-Вольфа [14]. Получим следующие выражения для электрического поля

$$\begin{aligned}
E_{x,ra+v} &= -\frac{i}{2} \left[(I_{0,0} - I_{2,0}) + e^{i2\varphi} (I_{2,2} - I_{0,2}) \right], \\
E_{y,ra+v} &= \frac{1}{2} \left[(I_{0,0} - I_{2,0}) - e^{i2\varphi} (I_{2,2} - I_{0,2}) \right], \\
E_{z,ra+v} &= -e^{i\varphi} I_{1,1},
\end{aligned} \tag{1.19}$$

и для магнитного поля

$$\begin{aligned}
H_{x,ra+v} &= -\frac{1}{2} \left[(I_{0,0} + I_{2,0}) + e^{i2\varphi} (I_{2,2} + I_{0,2}) \right], \\
H_{y,ra+v} &= -\frac{i}{2} \left[(I_{0,0} + I_{2,0}) - e^{i2\varphi} (I_{2,2} + I_{0,2}) \right], \\
H_{z,ra+v} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Из (1.19) следует выражение для интенсивности в фокусе:

$$I_{ra+v} = \frac{1}{2} (I_{0,0} - I_{2,0})^2 + \frac{1}{2} (I_{2,2} - I_{0,2})^2 + 2I_{1,1}^2. \tag{1.21}$$

А из (1.19) и (1.20) можно получить осевую проекцию потока энергии $\mathbf{P} = \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$ в фокусе оптического вихря с радиальной поляризацией:

$$P_{z,ra+v}(r, z=0) = I_{0,2}^2 + I_{0,0}^2 - I_{2,0}^2 - I_{2,2}^2. \tag{1.22}$$

Из (1.21) и (1.22) следует, что на оптической оси в фокусе в данном случае интенсивность и поток энергии будут меньше, чем интенсивность и поток энергии для круговой поляризации $I_R(r \rightarrow 0, z=0) = I_{0,0}^2$, и будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
I_{ra+v}(r \rightarrow 0) &= \frac{1}{2} (I_{0,0} - I_{2,0})^2, \\
P_{z,ra+v}(r \rightarrow 0, z=0) &= I_{0,0}^2 - I_{2,0}^2.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Уменьшенная интенсивность на оси, при одинаковой энергии в фокусе у всех рассматриваемых здесь оптических полей, означает, что диаметр фокусного пятна для оптического вихря с круговой поляризацией меньше, чем диаметр фокусного пятна для оптического вихря с радиальной поляризацией.

Фокусировка оптического вихря с азимутальной поляризацией

Известно, что для азимутальной поляризации интенсивность и осевой поток энергии в фокусе имеют вид светового кольца. То есть азимутальная поляризация

не формирует фокусное пятно. Действительно, для начального поля с азимутальной поляризацией:

$$\mathbf{E}_{az} = A(\theta) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

можно получить выражения для проекций электрического поля в фокусе с помощью замены φ на $\varphi + \pi/2$ в выражении (1.14):

$$\begin{aligned} E_{x,az} &= -\sin \varphi (I_{0,1} - I_{2,1}), \\ E_{y,az} &= \cos \varphi (I_{0,1} - I_{2,1}), \\ E_{z,az} &= 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Из (1.25) получим выражение для интенсивности в фокусе:

$$I_{az}(r, z=0) = (I_{0,1} - I_{2,1})^2. \quad (1.26)$$

А осевой поток энергии в фокусе для начального поля с азимутальной поляризацией (1.24) можно найти в [18]:

$$P_{z,az}(r, z=0) = I_{0,1}^2 - I_{2,1}^2. \quad (1.27)$$

Из (1.26) и (1.27) видно, что интенсивность и осевой поток энергии в фокусе для начального поля с азимутальной поляризацией имеют вид кольца и равны нулю на оптической оси. Поэтому для получения круглого фокусного пятна рассмотрим фокусировку оптического вихря с топологическим зарядом 1 и с азимутальной поляризацией. То есть начальное поле имеет вид:

$$\mathbf{E}_{az+v} = A(\theta) \exp(i\varphi) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Для начального поля (1.28) проекции электрического вектора в фокусе можно найти в [15]:

$$\begin{aligned} E_{x,az+v} &= -\frac{1}{2} \left[(I_{0,0} + I_{2,0}) + e^{i2\varphi} (I_{0,2} + I_{2,2}) \right], \\ E_{y,az+v} &= -\frac{i}{2} \left[(I_{0,0} + I_{2,0}) - e^{i2\varphi} (I_{0,2} + I_{2,2}) \right], \\ E_{z,az+v} &= 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Из (1.29) следует выражение для интенсивности в фокусе:

$$I_{az+v} = \frac{1}{2}(I_{0,0} + I_{2,0})^2 + \frac{1}{2}(I_{0,2} + I_{2,2})^2. \quad (1.30)$$

Выражение для осевого потока энергии в фокусе для начального поля (1.28) можно найти в [18]:

$$P_{z,az+v}(r, z=0) = I_{0,2}^2 + I_{0,0}^2 - I_{2,0}^2 - I_{2,2}^2. \quad (1.31)$$

Из выражений (1.30) и (1.31) видно, что в фокусе на оптической оси и интенсивность, и осевой поток энергии будут иметь максимальное значение и будут равны:

$$\begin{aligned} I_{az+v}(r=0, z=0) &= \frac{1}{2}(I_{0,0} + I_{2,0})^2, \\ P_{z,az+v}(r=0, z=0) &= I_{0,0}^2 - I_{2,0}^2. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Для более удобного сравнения все полученные выражения для интенсивности и осевого потока в фокусе сведены в Таблицу 1.1.

Таблица 1.1 - Формулы, описывающие распределение интенсивности и осевого потока энергии в остром фокусе света с разной начальной поляризацией

Тип поляризации	Интенсивность в фокусе	Осевой поток энергии в фокусе
Линейная поляризация	$I_{0,0}^2 + I_{2,2}^2 + 2I_{0,0}I_{2,2} \times \cos 2\varphi + 4I_{1,1}^2 \sin^2 \varphi$	$I_{0,0}^2 - I_{2,2}^2$
Круговая поляризация	$I_{0,0}^2 + I_{2,2}^2 + 2I_{1,1}^2$	$I_{0,0}^2 - I_{2,2}^2$
Радиальная поляризация	$(I_{0,1} - I_{2,1})^2 + 4I_{1,0}^2$	$(I_{0,1} - I_{2,1})^2$
Радиальная поляризация и оптический вихрь	$\frac{1}{2}(I_{0,0} - I_{2,0})^2 + \frac{1}{2}(I_{2,2} - I_{0,2})^2 + 2I_{1,1}^2$	$I_{0,2}^2 + I_{0,0}^2 - I_{2,0}^2 - I_{2,2}^2$
Азимутальная поляризация и оптический вихрь	$\frac{1}{2}(I_{0,0} + I_{2,0})^2 + \frac{1}{2}(I_{0,2} + I_{2,2})^2$	$I_{0,2}^2 + I_{0,0}^2 - I_{2,0}^2 - I_{2,2}^2$

Из Таблицы 1.1 видны два следующих результата. Распределение осевого потока энергии в фокусе для света с линейной и круговой поляризацией одинаковые. Это значит, что фокусное пятно, измеренное по потоку энергии для света с линейной и круговой поляризацией (при прочих равных условиях) будет круглым и одинаковым по диаметру. Также из Таблицы 1.1 видно, что у оптического вихря с единичным топологическим зарядом с радиальной и азимутальной поляризацией осевые потоки энергии в фокусе тоже одинаковые, а значит и размеры фокусных пятен у них будут одинаковые.

Из Таблицы 1.1 видно также, что все распределения интенсивности и потока энергии вблизи оптической оси пропорциональны квадрату функции Бесселя нулевого порядка, которая входит в интеграл $I_{0,0}^2$. Так как световая энергия у всех полей из Таблицы 1.1 одинаковая (так как в начальной плоскости у всех одинаковая амплитуда), то по величине интенсивности или потока энергии на оптической оси можно судить о величине диаметра фокусного пятна: чем больше интенсивность или поток энергии на оптической оси, тем меньше диаметр фокусного пятна. Из Таблицы 1.1 видно, что больше всех интенсивность на оптической оси у оптического вихря с азимутальной поляризацией: $(I_{0,0} + I_{2,0})^2 / 2$. Так как в интеграл $I_{0,0}$ входит множитель $1 + \cos\theta$, а в интеграл $I_{2,0}$ входит множитель $1 - \cos\theta$, то при сложении $I_{0,0} + I_{2,0}$ косинус пропадет и получается, что $(I_{0,0} + I_{2,0})^2 / 2 > I_{0,0}^2$. Поэтому диаметр фокуса у начального оптического вихря с азимутальной поляризацией, измеренного по интенсивности, будет меньше, чем диаметр фокуса у поля с круговой поляризацией, измеренного по потоку энергии. Поток энергии на оптической оси у оптического вихря с радиальной и азимутальной поляризацией меньше, чем поток энергии у света с круговой поляризацией: $I_{0,0}^2 - I_{2,0}^2 < I_{0,0}^2$. Поэтому диаметр фокуса оптического вихря с радиальной и азимутальной поляризацией, измеренный по потоку энергии, будет больше, чем диаметр фокуса по потоку энергии у поля с круговой поляризацией. Интересно, что фокусное пятно для линейной поляризации по интенсивности имеет вид эллипса, размер меньшего диаметра у которого, будет

меньше всех диаметров круглых пятен и по интенсивности, и по потоку энергии. Эти теоретические предсказания будут подтверждены с помощью моделирования в следующем разделе.

Поясним здесь, как измерять интенсивность и осевой поток энергии в остром фокусе. Интенсивность измеряется с помощью наночастиц, помещенных в фокус. Так как свет попадает на наночастицу (диаметром около 100 нм) со всех сторон в фокусе (то есть все фотоны, распространяющиеся под разными углами к оптической оси и проходящие через точку, в которой помещена наночастица, поглощаются или рассеиваются этой наночастицей), то и величина рассеяния света наночастицей пропорциональна именно интенсивности (плотности энергии) света в данной точке. А осевой поток энергии измеряется с помощью малого отверстия (диаметром около 100 нм) в кантилере оптического сканирующего ближнепольного микроскопа. В малое отверстие попадают и доходят до фотоприемника только те фотоны, которые распространяются почти параллельно оптической оси. Поэтому сигнал фотоприемника пропорционален осевому потоку световой энергии.

Моделирование

С помощью формул Ричардса-Вольфа моделировалась фокусировка света различной поляризации апланатическим объективом с числовой апертурой $NA = 0,95$. Волновой фронт во всех случаях считался плоским или вихревым. В Таблице 1.2 показаны размеры фокусных пятен по обеим декартовым координатам, рассчитанным по полуспаду распределения интенсивности и потока энергии в длинах волн ($\lambda = 532$ нм), полученные распределения интенсивности и продольной составляющей вектора Умова-Пойнтинга показаны на Рисунках 1.1 и 1.2, соответственно.

Таблица 1.2 - Величины диаметров фокусных пятен ($NA = 0,95$) в длинах волн, рассчитанные по полуспаду интенсивности и осевой проекции потока энергии для начальной плоской волны с линейной, круговой, радиальной поляризацией, и для начального оптического вихря первого порядка с радиальной и азимутальной поляризацией

Тип поляризации	Интенсивность I , отн. ед.		Продольный поток энергии S_z , отн. ед.	
	FWHM _x , λ	FWHM _y , λ	FWHM _x , λ	FWHM _y , λ
Круговая	0,5997	0,5997	0,5357	0,5357
Линейная	0,7305	0,5028	0,5357	0,5357
Радиальная	0,6327	0,6327	-	-
Радиальная плюс вихрь	1,0747	1,0747	0,5573	0,5573
Азимутальная плюс вихрь	0,5346	0,5346	0,5566	0,5566

Из Таблицы 1.2 видно, что для круглых фокусных пятен наименьший диаметр, как и предсказывает теория, у оптического вихря с азимутальной поляризацией, измеренного по интенсивности ($FWHM = 0,5350\lambda$). Почти такой же по величине (всего на 0,14% больше) диаметр фокусных пятен для света с линейной и круговой поляризацией, измеренный по потоку энергии ($FWHM = 0,5358\lambda$). Немного больше (на 4%) диаметр фокусного пятна для вихря с азимутальной поляризацией, но измеренного по потоку энергии ($FWHM = 0,5573\lambda$). Еще на 7% больше диаметр фокусного пятна для круговой поляризации, измеренный по интенсивности ($FWHM = 0,5998\lambda$). И еще больше на 5% диаметр фокусного пятна для радиальной поляризации, измеренный по интенсивности ($FWHM = 0,6333\lambda$). Таким образом, меньшее фокусное пятно меньше большего из фокусных пятен на 15%. Заметим, что эллиптическое фокусное пятно имеет размер меньшего диаметра по интенсивности на 6% меньше минимального круглого фокусного пятна ($FWHM = 0,5029\lambda$). С

увеличением числовой апертуры размеры фокусных пятен уменьшаются, но соотношение между ними остается почти таким же.

На Рисунках 1.1 показаны сечения интенсивности фокусного пятна, рассчитанного по формулам Ричардса-Вольфа для длины волны 532 нм и числовой апертуры 0,95. Освещающий пучок имел плоский фронт (или оптический вихрь с топологическим зарядом 1) и разное состояние поляризации. Соотношение размеров фокусных пятен по полуспаду интенсивности, которое следует из Рисунка 1.1, подтверждает сказанное ранее. Из Рисунка 1.1 видно, что в случае оптического вихря с азимутальной поляризацией фокусное пятно немного меньше, чем фокусное пятно для круговой поляризации, но боковой лепесток для круговой поляризации (около 4%) в 5 раз меньше, чем у азимутальной поляризации (около 20%).

На Рисунке 1.2 показаны сечения фокусного пятна, рассчитанного по потоку энергии. Видно, что в этом случае фокусное пятно оптического вихря с азимутальной (радиальной) поляризацией немного больше, чем фокусное пятно пучка с круговой (линейной) поляризацией. И боковой лепесток у фокуса на Рисунке 1.2 для азимутальной поляризации также в 5 раз больше, чем у фокуса для круговой поляризации.

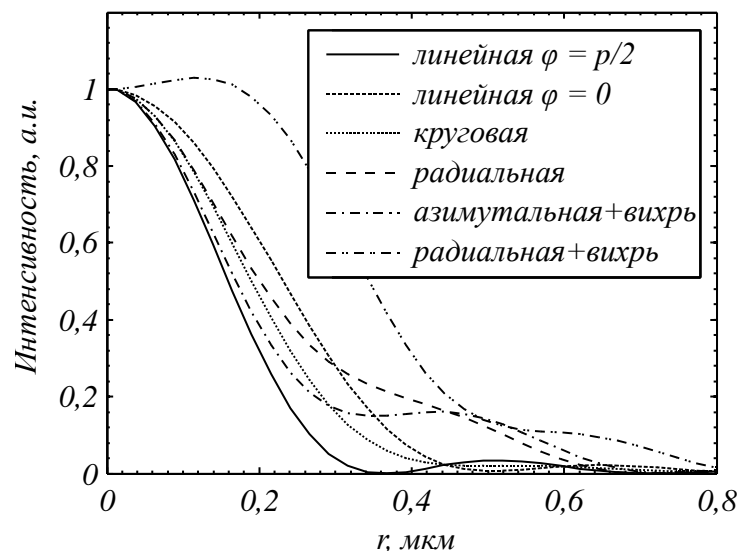


Рисунок 1.1 – Сечение интенсивности в фокусе при фокусировке света различной поляризации

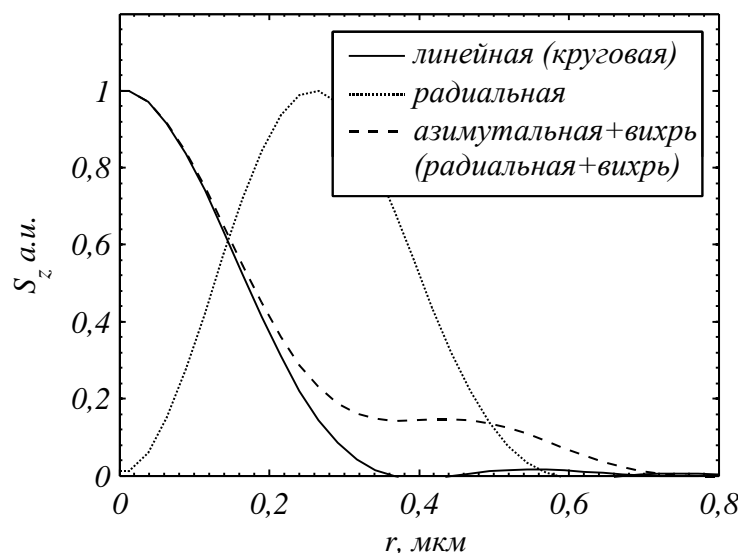


Рисунок 1.2 – Сечения продольной компоненты вектора Умова-Пойнтинга в фокусе

Исследования по сравнению диаметров фокусных пятен были проведены в [19*, 20*]. Здесь и в дальнейшем ссылки со звездочкой * показывают статьи автора.

1.2 Минимальный размер фокусного пятна при фокусировке света круговой поляризации

Острая фокусировка привлекает внимание исследователей благодаря различным эффектам, которые не проявляются (или же проявляются слабо) при фокусировке света линзами с малыми числовыми апертурами. Например, в фокусе можно наблюдать сложные картины поперечных потоков энергии [21, 22, 23, 24], конверсию поляризации [14, 25, 26, 27], а при рассмотрении интенсивности в фокусе можно наблюдать фокусные пятна различной формы [1, 2, 28.], в частности пятна с плоской вершиной (англ. flat-top focus) [29, 30, 31]. В таких фокусных пятнах форма пятна приближается к супер-гауссову распределению, которое характеризуется более резким спадом интенсивности на краях пучка [32, 33, 34, 35] по сравнению с гауссовым пучком. Пучки с плоской вершиной необходимы в литографии [36, 37] или оптической передаче данных через атмосферу [38], известны их исследования по распространению в плазме

[32] и по острой фокусировке кольцевыми решетками переменной высоты [33, 35]. В данном разделе с помощью формализма Ричардса-Вольфа рассмотрена фокусировка света с круговой поляризацией плоскими дифракционными линзами. Было показано, что при увеличении числовой апертуры линзы размер фокусного пятна сначала уменьшается, а потом начинает расти. Минимальное фокусное пятно наблюдается при $NA = 0,96$ ($FWHM = 0,55\lambda$). При дальнейшем увеличении числовой апертуры линзы рост продольной составляющей приводит к увеличению размера фокусного пятна. При замене плоской дифракционной линзы на апланатический объектив размер фокусного пятна монотонно уменьшается при увеличении числовой апертуры линзы вплоть до 1.

Теоретическое основание

Поле вблизи острого фокуса может быть описано с помощью интеграла Ричардса-Вольфа [14]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\rho, \psi, z) = & -\frac{if}{\lambda} \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} B(\theta, \varphi) T(\theta) \mathbf{P}(\theta, \varphi) \times \\ & \times \exp\{ik[\rho \sin \theta \cos(\varphi - \psi) + z \cos \theta]\} \sin \theta d\theta d\varphi, \end{aligned} \quad (1.33)$$

где $\mathbf{U}(\rho, \psi, z)$ - напряжённость электрического или магнитного поля, $B(\theta, \varphi)$ - амплитуда электрического или магнитного поля в выходном зрачке широкоапертурной оптической системы (θ - полярный угол, φ - азимутальный), $T(\theta)$ - функция аподизации линзы, f - фокусное расстояние, $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, λ - длина волны (в моделировании считалась равной 532 нм), θ_0 - максимальный полярный угол, определяемый числовой апертурой линзы ($NA = \sin \theta_0$), $\mathbf{P}(\theta, \varphi)$ - вектор поляризации, для напряжённости электрического и магнитного полей имеющий вид:

$$\mathbf{P}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 + \cos^2 \varphi (\cos \theta - 1) \\ \sin \varphi \cos \varphi (\cos \theta - 1) \\ -\sin \theta \cos \varphi \end{bmatrix} a(\theta, \varphi) + \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \varphi (\cos \theta - 1) \\ 1 + \sin^2 \varphi (\cos \theta - 1) \\ -\sin \theta \sin \varphi \end{bmatrix} b(\theta, \varphi), \quad (1.34)$$

где $a(\theta, \varphi)$ и $b(\theta, \varphi)$ — функции, описывающие состояние поляризации x - и y -компонент напряжённостей электрического или магнитного полей фокусируемого пучка.

Так как интенсивность и осевой поток энергии для света с левой и правой круговой поляризацией одинаковы, то будем рассматривать только одну правую поляризацию, вектор Джонса для которой имеет вид:

$$\mathbf{E}_R = \begin{pmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \frac{A(\theta)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

где $A(\theta)$ — начальная амплитуда поля, зависящая только от полярного угла.

Проекции вектора напряженности электрического поля вблизи фокуса для начального поля (1.35) имеют вид [16]:

$$\begin{aligned} E_{x,R} &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (I_{0,0} + e^{2i\varphi} I_{2,2}), \\ E_{y,R} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (I_{0,0} - e^{2i\varphi} I_{2,2}), \\ E_{z,R} &= -\sqrt{2} e^{i\varphi} I_{1,1}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

где

$$I_{\nu,\mu} = \left(\frac{4\pi f}{\lambda} \right) \int_0^{\theta_0} \sin^{\nu+1} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-\nu} \left(\frac{\theta}{2} \right) T(\theta) A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_\mu(x) d\theta, \quad (1.37)$$

где $x = krsin\theta$, $J_\mu(x)$ - функция Бесселя первого рода.

Из уравнений (1.36) видно, что отдельные поперечные составляющие интенсивности ненулевые на оси и несимметричны относительно азимутального

угла θ , в то время как продольная составляющая интенсивности имеет вид симметричного кольца с нулем при $r = 0$.

Начальная функция амплитуды $A(\theta)$ (предположим, что это действительная функция) может быть константой (плоская волна) или в виде гауссова пучка:

$$A(\theta) = \exp\left(\frac{-\gamma^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0}\right), \quad (1.38)$$

где γ - постоянная. Из (1.36) можно получить распределение интенсивности в фокусе для начального поля (1.35):

$$I_R(r, z=0) = I_{0,0}^2 + I_{2,2}^2 + 2I_{1,1}^2. \quad (1.39)$$

Из (1.39) видно, что фокусное пятно для света с круговой поляризацией (1.35) имеет круглую форму, так как распределение интенсивности (1.39) зависит только от радиальной переменной r . Ранее в работе [31] рассматривалась фокусировка света радиальной поляризации и демонстрировалось получение фокуса с плоской вершиной, за счет перераспределения энергии между поперечной и продольной компонентами. Из уравнения (1.39) видно, что такой же подход может быть применен и для круговой поляризации.

Рассмотрим также поведение поляризации в окрестности острого фокуса для этого случая. Ранее в работе [39] показали, что при острой фокусировке света линейной поляризации при отдалении от плоскости фокуса возникают области, в которых поляризация становится эллиптической. Непосредственно в плоскости фокуса при $z = 0$ поляризация остается линейной. Состояние поляризации можно охарактеризовать вектором Стокса или спиновым угловым моментом. Наличие круговой поляризации в поперечном сечении пучка показывает третья компонента вектора Стокса s_3 или продольная компонента SAM_z спинового углового момента (СУМ), они равны друг другу и равны:

$$SAM_z = s_3 = 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y). \quad (1.40)$$

С помощью формул (1.36) можно показать, что непосредственно в фокусе:

$$SAM_z = I_{0,0}^2 - I_{2,2}^2. \quad (1.41)$$

Из уравнения (1.41) видно, что есть области, где продольная компонента спинового углового момента меняет знак. Вблизи оптической оси SAM_z положительная, так как $I_{0,0}^2 > I_{2,2}^2$. А на окружности некоторого радиуса, когда выполняется условие $I_{0,0}^2 < I_{2,2}^2$ продольная компонента вектора плотности спина SAM_z становится отрицательной. Таким образом, в плоскости фокуса должна наблюдаться смена направления вращения круговой поляризации: вблизи оптической оси остается начальная правая круговая поляризация (1.35), а на некотором удалении от оптической оси появляется световое кольцо с левой круговой поляризацией. Этот эффект можно назвать радиальным спиновым эффектом Холла, так как свет с разным знаком спина в фокусе имеет место на разных световых кольцах с одним центром на оптической оси.

Отметим также, что на некотором расстоянии от плоскости фокуса можно считать, что $e^{ikz \cos \theta} \approx 1 + ikz \cos \theta$, тогда уравнение (1.37) можно представить в виде

$$I_{v,\mu} = Ir_{v,\mu} + ikz Ii_{v,\mu}, \quad (1.42)$$

где

$$Ir_{v,\mu} = \left(\frac{4\pi f}{\lambda} \right)^{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin^{v+1} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-v} \left(\frac{\theta}{2} \right) T(\theta) A(\theta) J_{\mu}(x) d\theta, \quad (1.43)$$

$$Ii_{v,\mu} = \left(\frac{4\pi f}{\lambda} \right)^{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin^{v+1} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-v} \left(\frac{\theta}{2} \right) T(\theta) A(\theta) \cos \theta J_{\mu}(x) d\theta. \quad (1.44)$$

Тогда, вместо (1.41) можно записать:

$$SAM_z = (Ir_{0,0}^2 - Ir_{2,2}^2) + (kz)^2 (Ii_{0,0}^2 - Ii_{2,2}^2). \quad (1.45)$$

Из уравнения (1.45) видно, что в отличие от [39] до фокуса и после фокуса картина СУМ одинаковая, и отличается от распределения в фокусе только тем, что первое световое кольцо с отрицательным СУМ ($SAM_z < 0$) будет иметь больший радиус, чем в фокусе.

Результаты численного моделирования фокусировки света плоской дифракционной линзой

Промоделируем с помощью формулы (1.33) фокусировку света с круговой поляризацией (1.35) плоской дифракционной линзой, функция аподизации которой имеет вид $T(\theta) = \cos^{-3/2}\theta$. Будем считать, что фокусируется плоская волна $A(\theta) = 1$, с длиной волны $\lambda = 532$ нм. Ранее исследователями острой фокусировки отмечалось, что именно с помощью плоских дифракционных линз удается получить фокусное пятно с меньшими размерами фокуса, чем при фокусировке апланатическим объективом [40].

На Рисунке 1.3 показано изменение диаметра фокусного пятна по полуспаду интенсивности при увеличении числовой апертуры линзы.

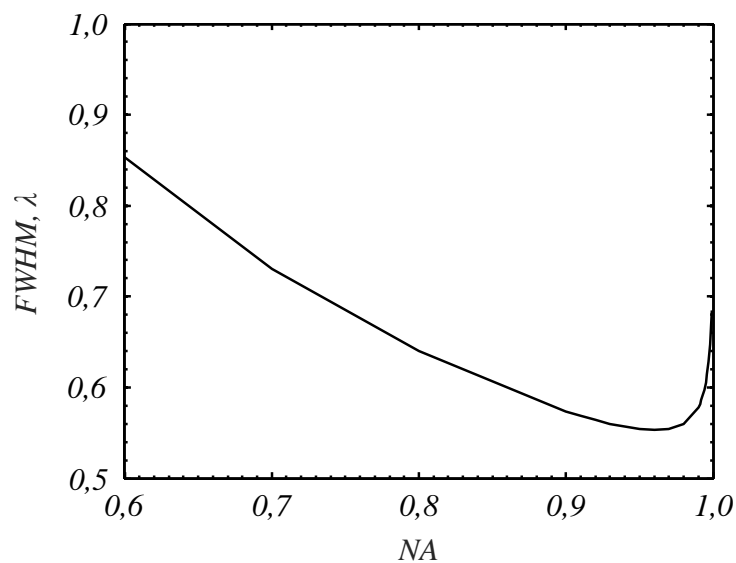


Рисунок 1.3 – Зависимость диаметра фокусного пятна по полуспаду интенсивности от числовой апертуры линзы при фокусировке плоской волны с круговой поляризацией

Из Рисунка 1.3 видно, что при увеличении числовой апертуры линзы размер фокусного пятна сначала уменьшается, а потом начинает расти. Минимальное фокусное пятно наблюдается при $NA = 0,96$, диаметр пятна по полуспаду интенсивности составил $FWHM = 0,55\lambda$. Рост размера фокусного пятна объясняется перераспределением энергии между поперечной и продольной составляющими интенсивности таким образом, что продольная составляющая, имеющая вид кольца, увеличивается, уширяя пятно. На Рисунках 1.4 - 1.6 для наглядности показано распределение интенсивности и отдельных ее

составляющих для числовых апертур равных 0,8 (Рисунок 1.4), 0,96 (минимальный размер пятна, Рисунок 1.5) и 0,999 (Рисунок 1.6).

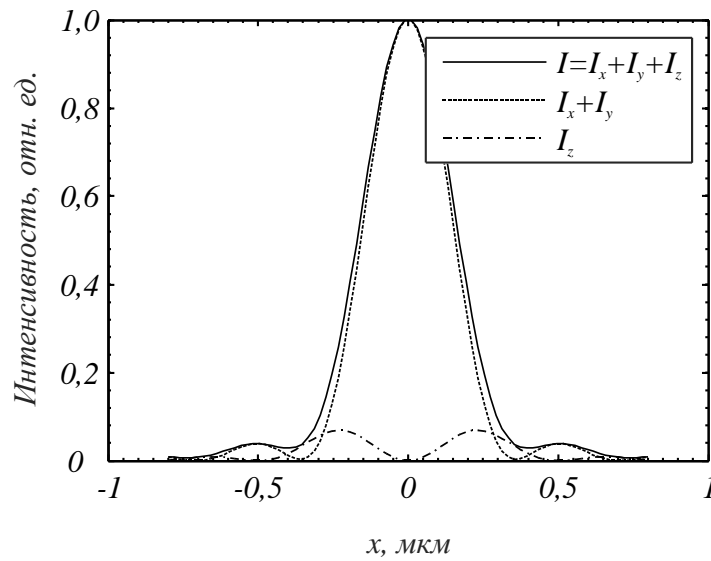


Рисунок 1.4 – Распределение в фокусе интенсивности и отдельных составляющих интенсивности при фокусировке плоской дифракционной линзой с $NA = 0,8$

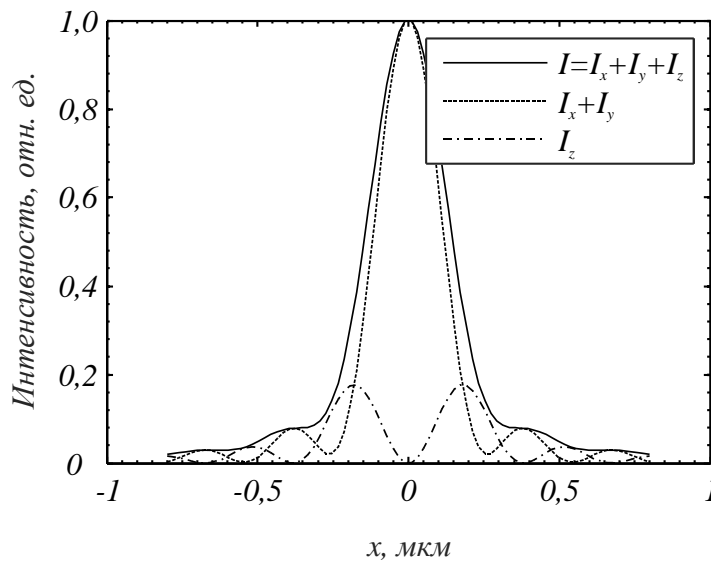


Рисунок 1.5 – Распределение в фокусе интенсивности и отдельных составляющих интенсивности при фокусировке плоской дифракционной линзой с $NA = 0,96$ (соответствует минимальному фокусному пятну с диаметром $FWHM = 0,55\lambda$)

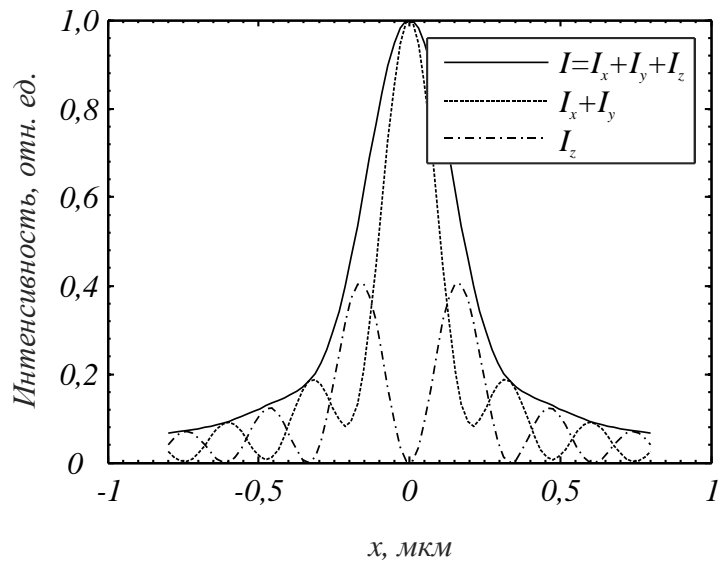


Рисунок 1.6 – Распределение в фокусе интенсивности и отдельных составляющих интенсивности при фокусировке плоской дифракционной линзой с $NA = 0,999$

Из Рисунка 1.6 видно, что уширение фокусного пятна происходит именно из-за увеличения вклада продольной составляющей интенсивности.

Результаты численного моделирования фокусировки света апланатическим объективом

Заменим далее плоскую дифракционную линзу апланатическим объективом (то есть идеальной сферической линзой), функция аподизации которого имеет вид $T(\theta) = \cos^{1/2}\theta$. На Рисунке 1.7 показано изменение диаметра фокусного пятна по полуспаду интенсивности при увеличении числовой апертуры объектива. Рисунок 1.7 показывает, что у апланатического объектива в отличие от плоской дифракционной линзы (Рисунок 1.3) не наблюдается увеличения фокусного пятна, а размер фокусного пятна монотонно уменьшается при увеличении числовой апертуры линзы.

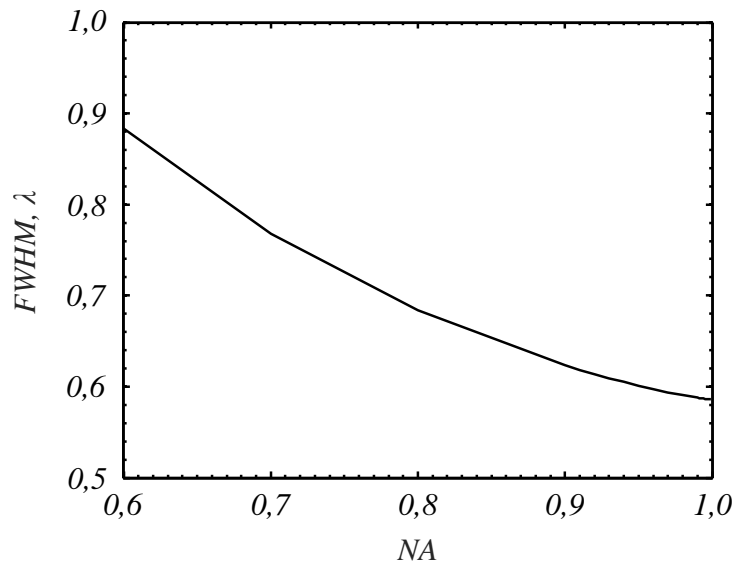


Рисунок 1.7 – Зависимость диаметра фокусного пятна по полуспаду интенсивности (в длинах волн) от числовой апертуры линзы при фокусировке плоской волны с круговой поляризацией

Для примера на Рисунке 1.8 показано распределение интенсивности и отдельных ее составляющих в фокусе при фокусировке апланатическим объективом с $NA = 0,95$. Размер фокусного пятна в этом случае составляет $FWHM = 0,60\lambda$, что согласуется, например, с [20]. Из Рисунка 1.8 видно, что продольная составляющая интенсивности в данном случае мала.

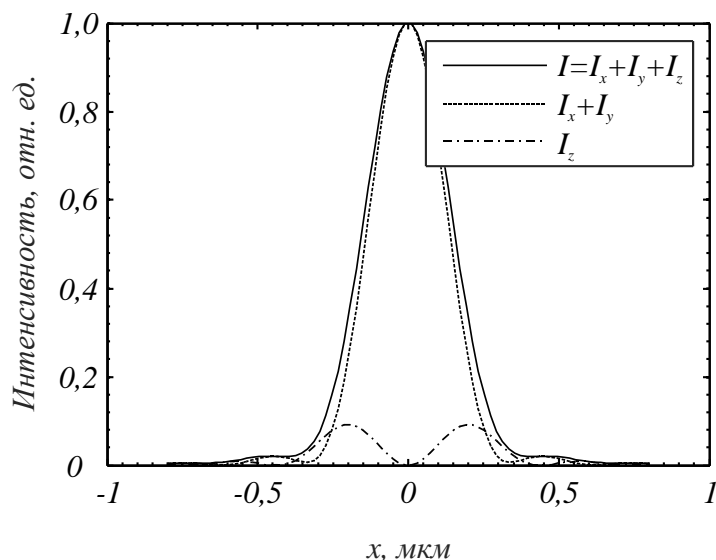


Рисунок 1.8 – Распределение в фокусе интенсивности и отдельных составляющих интенсивности при фокусировке апланатическим объективом с $NA = 0,95$

Поляризация в окрестности острого фокуса

Рассмотрим теперь изменение поляризации при острой фокусировке света изначально круговой поляризации. Состояние поляризации будем характеризовать третьей компонентой нормированного вектора Стокса:

$$S_3 = \frac{s_3}{s_0} = \frac{SAM_z}{s_0} = \frac{2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y)}{E_x E_x^* + E_y E_y^*}. \quad (1.46)$$

Напомним, что круговая поляризация соответствует случаю $S_3 = \pm 1$.

На Рисунке 1.9 показано распределение третьей компоненты нормированного вектора Стокса в плоскости фокуса.

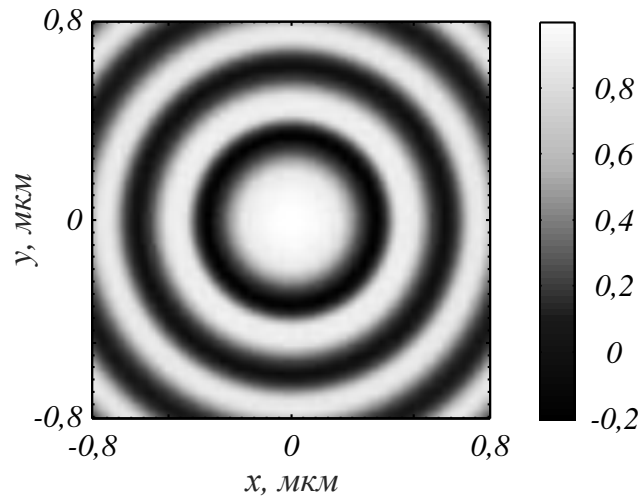


Рисунок 1.9 – Распределение третьей компоненты нормированного вектора Стокса в плоскости фокуса при фокусировке света апланатическим объективом с $NA = 0,95$

Из Рисунка 1.9 видно, что в плоскости фокуса возникают области в виде концентрических окружностей, где направление вращения вектора поляризации меняется на противоположное.

Рассмотрим теперь, как ведет себя поляризация при отдалении от плоскости фокуса. На Рисунке 1.10 показано распределение третьей компоненты нормированного вектора Стокса в плоскости, расположенной на расстоянии $z = \lambda$ от плоскости фокуса.

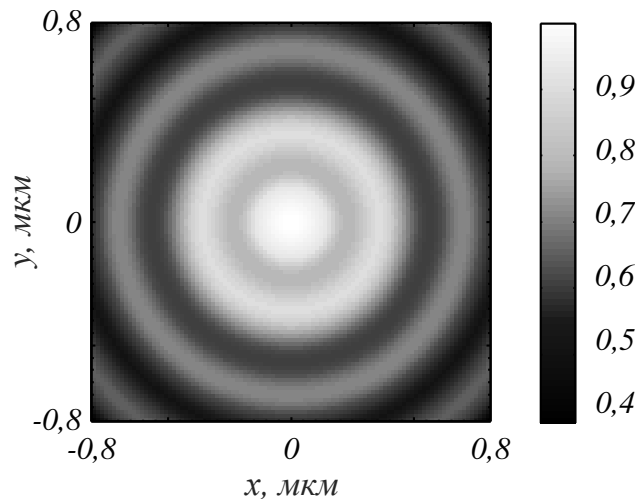


Рисунок 1.10 – Распределение третьей компоненты нормированного вектора Стокса в плоскости, расположенной на расстоянии $z = \lambda$ от фокуса при фокусировке света апланатическим объективом с $NA = 0,95$

Из Рисунка 1.10 видно, что на отдалении от плоскости фокуса все значения S_3 становятся положительными — смены направления вращения вектора поляризации не наблюдается.

Фокусировка оптического вихря с круговой поляризацией

Рассмотрим далее фокусировку оптического вихря с круговой поляризацией:

$$\mathbf{E}_R = \begin{pmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \frac{A(\theta) e^{im\varphi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

где m - топологический заряд вихря. При $m = -1$ в фокусе наблюдается пиковое распределение интенсивности [41]. В данном случае распределение поперечной составляющей интенсивности имеет вид кольца, а продольной составляющей - центрального максимума. Зависимость диаметра фокусного пятна от числовой апертуры плоской дифракционной линзы приведена на Рисунке 1.11.

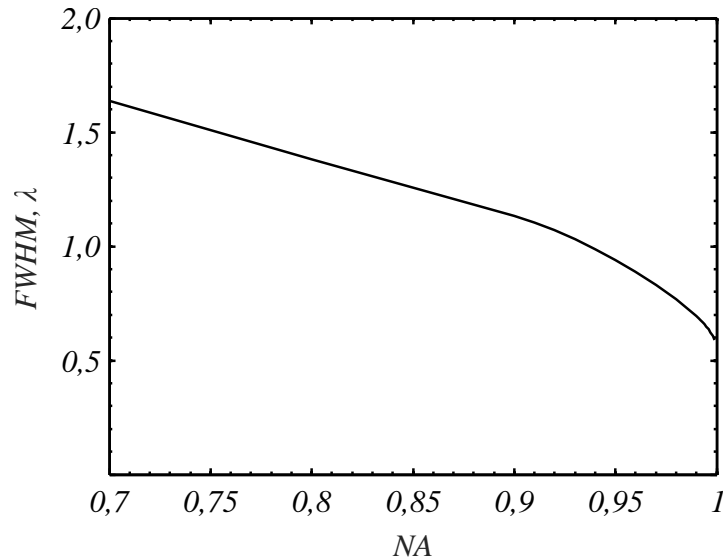


Рисунок 1.11 – Диаметр фокусного пятна по полуспаду интенсивности при фокусировке оптического вихря с круговой поляризацией при фокусировке плоской дифракционной линзой

Когда числовая апертура линзы примерно равна $NA = 0,93$ у формируемого фокуса наблюдается плоская вершина (Рисунок 1.12), диаметр фокусного пятна для этого случае равен $FWHM = 1,03\lambda$. При этом данное фокусное пятно имеет почти плоскую вершину, которую можно описать супергауссом.

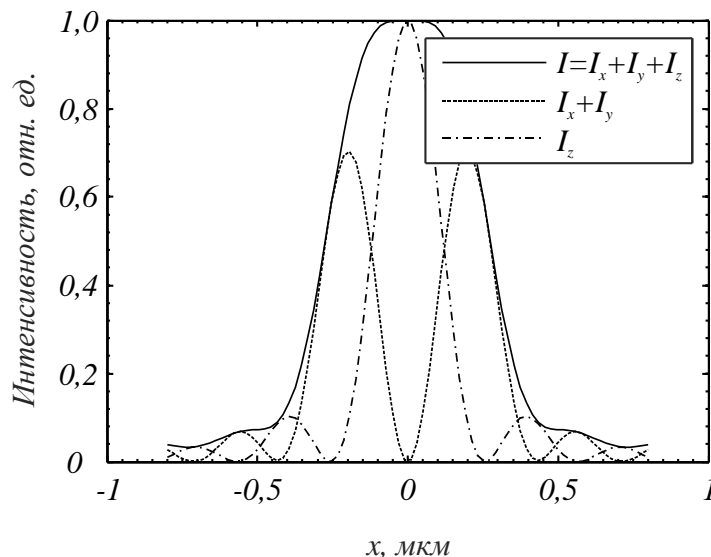


Рисунок 1.12 – Фокус с плоской вершиной при фокусировке оптического вихря с $m = 1$ и правой круговой поляризацией плоской дифракционной линзой с числовой апертурой $NA = 0,93$

Рассмотрим также поведение поляризации в фокусе оптического вихря с круговой поляризацией. На Рисунке 1.13 показано распределение третьей компоненты нормированного вектора Стокса в фокусе плоской дифракционной линзы с $NA = 0,95$.

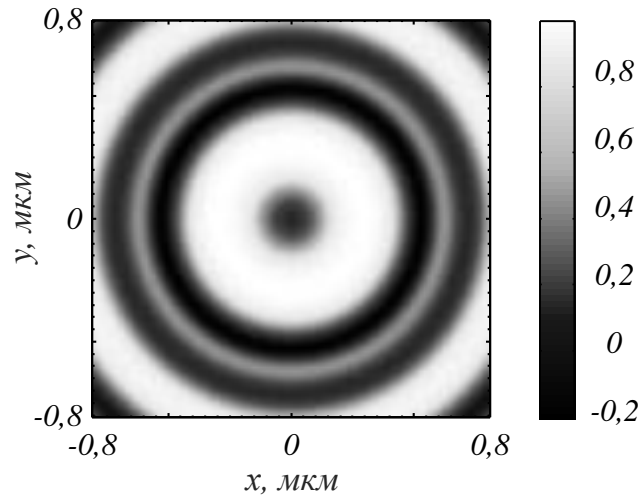


Рисунок 1.13 – Распределение третьей компоненты нормированного вектора Стокса в плоскости фокуса при фокусировке света плоской дифракционной линзой с $NA = 0,95$

Из Рисунка 1.13 видно, что также, как и при фокусировке света с круговой поляризацией, в фокусе наблюдаются области, в которых направление вращения поляризации меняется на противоположное [42*].

1.3 Выводы к главе 1

1. Распределение осевого потока энергии в остром фокусе света с круговой и линейной поляризацией одинаковые и обладают круговой симметрией. Также равны осевые потоки энергии для оптических вихрей с единичным топологическим зарядом и с радиальной или азимутальной поляризацией. Минимальный диаметр (при прочих равных условиях) имеет фокусное пятно, измеренное по интенсивности для оптического вихря с азимутальной поляризацией. Немного больше (на доли процента) диаметр фокусного пятна, рассчитанного по потоку энергии для света с круговой или линейной поляризацией. Величина диаметра по интенсивности играет роль при взаимодействии света с веществом, а величина диаметра по потоку энергии влияет на разрешение в оптической микроскопии.
2. С помощью формализма Ричардса-Вольфа рассмотрена фокусировка света с круговой поляризацией плоскими дифракционными линзами. Было показано, что при увеличении числовой апертуры линзы размер фокусного пятна сначала уменьшается, а потом начинает расти. Минимальное фокусное пятно наблюдается при $NA = 0,96$ ($FWHM = 0,55\lambda$). При дальнейшем увеличении числовой апертуры дифракционной линзы рост продольной составляющей приводит к увеличению размера фокусного пятна. При замене плоской дифракционной линзы на апланатический объектив размер фокусного пятна монотонно уменьшается при увеличении числовой апертуры. Но при максимальной числовой апертуре ($NA = 1$) диаметр фокусного пятна больше, чем $0,55\lambda$.

Глава 2. Индексы поляризационной сингулярности

2.1 Индексы поляризационной сингулярности, аналогичные топологическому заряду, для световых полей с неоднородной поляризацией

Детальный анализ структуры векторных полей и имеющихся в них поляризационных сингулярностей был впервые представлен ещё в 1999 году [43]. Позже, в начале нулевых годов, I. Freund дал уточнение некоторых типов сингулярностей [44, 45]. Индексы сингулярности рассчитывались локально для V- и C-точек. V-точки – это точки сингулярности в векторных полях с локально линейной поляризацией. В этих точках не определено направление вектора линейной поляризации. C-точки – это точки неопределенности направления большой оси эллипса локальных векторов эллиптической поляризации. Индексы сингулярности для V- и C-точек, а также для L- и S-линий определяются с помощью параметров Стокса и комплексных полей Стокса [46]. В более поздних работах, например, в [47], индексы поляризационной сингулярности (ИПС) рассчитывались для световых полей с несколькими особыми точками. В [47] их рассчитывали специальным способом, который не является универсальным. В последние годы появляются много работ по световым пучкам с неоднородной поляризацией, которые имеют в своем сечении много сингулярных точек [48] или линий [49]. В этом случае векторное поле может характеризоваться не локальным, а глобальным ИПС, который учитывает все сингулярности в поперечном сечении. Так, если имеется карта такого векторного поля, то можно, не определяя поведение амплитуды во всём сечении и не определяя положения отдельных сингулярностей, установить значение ИПС путём обхода поля по замкнутому контуру и подсчётом числа оборотов вектора линейной поляризации или большей оси эллиптической поляризации. Если аналитический вид поля не известен, то с помощью четырех измерений интенсивности при разных наклонах осей поляризаторов ($P = I(0^\circ, 0) + I(90^\circ, 0)$, $Q = I(0^\circ, 0) - I(90^\circ, 0)$, $U = I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0)$, $V = I(45^\circ, \pi/2) - I(135^\circ, \pi/2)$) можно экспериментально все

четыре проекции вектора Стокса, на основе которых получить комплексное поле Стокса и применить далее формулу М. Берри. Экспериментально ИПС можно определять с помощью наклона сферической линзы [50]. Возникает вопрос, существует ли универсальный подход, чтобы рассчитывать ИПС для таких векторных полей?

В этом разделе предлагается рассчитывать индекс поляризации сингулярности любых векторных световых полей [45] аналогично расчету топологического заряда (ТЗ) скалярных оптических вихрей по формуле Берри [51]:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (2.1)$$

Световых полей с неоднородной поляризацией, которые описываются в начальной плоскости с помощью векторов Джонса, известно целое множество. Далее рассчитываются ИПС для некоторых таких полей и проанализируем их особенности.

В частности, рассчитываются ИПС для векторных полей с цилиндрической поляризацией (радиальной и азимутальной) высших порядков, с гибридной радиально-циркулярной (и азимутально-циркулярной) поляризацией произвольных порядков, для полей с несколькими точками и с несколькими линиями поляризационной сингулярности, для пучков Пуанкаре, а также для полей с поляризацией, изменяющейся от центра к периферии.

ИПС для цилиндрических векторных полей высокого порядка

Рассмотрим начальное поле с радиальной и аналогично с азимутальной поляризацией n -го порядка, вектора Джонса которых имеют вид [52]:

$$E_R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix}, \quad E_A(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где (r, φ) – полярные координаты в начальной плоскости. В центре такого поля (при $r=0$) находится точка сингулярности (V-точка), в которой направление вектора линейной поляризации не определено.

ИПС находится с помощью параметров Стокса [53] $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$, где

$$S_1 = \frac{|E_x|^2 - |E_y|^2}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, S_2 = \frac{2 \operatorname{Re}(E_x^* E_y)}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, S_3 = \frac{2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y)}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, \quad (2.3)$$

где Re и Im – знаки реальной и мнимой части числа. Вектор Стокса, как видно из (2.3), имеет единичную длину $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$. Для левого поля (2.2) параметры Стокса из (2.3) будут иметь вид:

$$S_1 = \cos(2n\varphi), S_2 = \sin(2n\varphi), S_3 = 0. \quad (2.4)$$

Так как в (2.4) $S_3 = 0$, то это означает, что в любой точке поля (2.2) поляризация линейная, кроме V-точки, в которой поляризация не определена. Комплексное поле Стокса для вектора (2.4) будет иметь вид:

$$S_c = S_1 + iS_2 = -\cos(2n\varphi) - i \sin(2n\varphi) = -\exp(i2n\varphi) \quad (2.5)$$

Когда поляризация поля во всех точках линейная (то есть $S_3 = 0$), поперечные компоненты поля можно представить в виде $E_x = |E| \cos \psi$, $E_y = |E| \sin \psi$, где ψ – угол наклона вектора напряжённости к горизонтальной оси. Тогда параметры Стокса S_1 и S_2 соответственно равны $S_1 = \cos 2\psi$ и $S_2 = \sin 2\psi$, и потому угол наклона вектора напряжённости можно определить через параметры Стокса как $\psi = (1/2)\arg(S_1 + iS_2) = (1/2)\arg S_c$. То есть угол наклона вектора напряжённости в любой точке равен половине фазы поля (2.5) и потому расчёт ИПС векторных полей можно свести к расчёту ТЗ скалярного поля (2.5).

Так, индекс Стокса σ для поля (2.2) равен ТЗ поля (2.5), который рассчитывается аналогично (2.1) и равен:

$$\sigma = 2\eta = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial S_c(\varphi) / \partial \varphi}{S_c(\varphi)}. \quad (2.6)$$

В (2.6) η называется индексом Пуанкаре-Хопфа [45]. Подставляя (2.5) в (2.6) получим: $\sigma = 2\eta = 2n$.

Для правого поля в (2.2) параметры Стокса будут похожие:

$$S_1 = -\cos(2n\varphi), S_2 = -\sin(2n\varphi), S_3 = 0. \quad (2.7)$$

И ИПС азимутального поля высокого порядка будет равен порядку этого поля: $\sigma = 2\eta = 2n$.

На Рисунке 2.1 показаны карты векторных полей (распределения векторов линейной поляризации) для поля (2.2) с радиальной и с азимутальной поляризацией первого и третьего порядков.

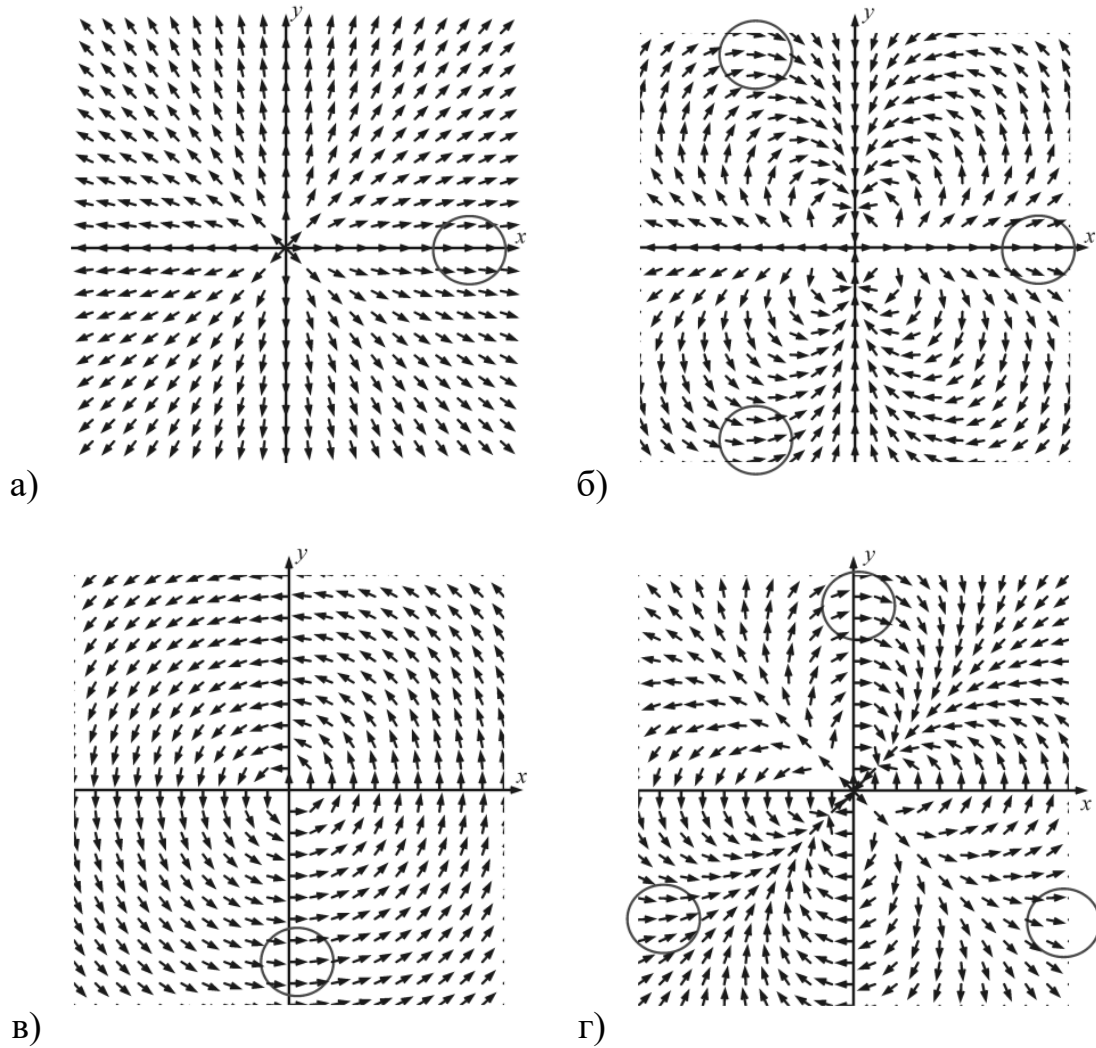


Рисунок 2.1 – Карты векторных полей с радиальной поляризацией первого ($n = 1$) (а) и третьего ($n = 3$) порядков (б) и с азимутальной поляризацией первого ($n = 1$) (в) и третьего ($n = 3$) порядков (г) (кругами показаны области, где вектор поляризации направлен вправо)

Подсчёт областей с определённым направлением поляризации (например, правым) на Рисунке 2.1 подтверждает, что индекс Пуанкаре-Хопфа поля (2.2) равен n .

Заметим, что при распространении в волноводе поле с радиальной (левое поле (2.2)), и с азимутальной (правое поле (2.2)) поляризацией можно рассматривать как соответственно ТЕ- и ТМ-моду. При этом, так как ИПС обеих мод равен порядку поля (то есть $\eta = n$), то ТЕ- и ТМ-моды нельзя различить с помощью определения индекса Стокса или Пуанкаре-Хопфа. Эти моды можно отличить друг от друга путём определения локальной поляризации в какой-то определённой точке. Например, можно пропустить поле через поляризатор, пропускающий только горизонтальную поляризацию (из Рисунка 2.1а пройдёт только левая и отмеченная кругом правая область, а из Рисунка 2.1в пройдёт только верхняя и отмеченная кругом нижняя область), и потом, повернув его на 90 градусов, измерить вертикальную поляризацию.

ИПС обобщенного векторного поля разного порядка

В [54] рассмотрено обобщенное цилиндрическое векторное поле разных порядков, вектор Джонса которого равен:

$$E_{Rm,n}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Если проекции векторного поля на поперечные декартовы оси действительные, то ИПС можно находить проще, сразу образуя скалярное комплексное поле вида:

$$E_{c,n}(\varphi) = E_x + iE_y = \cos n\varphi + i \sin m\varphi. \quad (2.9)$$

Согласно (2.1) индекс Пуанкаре-Хопфа для векторного поля (2.8) будет равен:

$$\begin{aligned} \eta_{n,m} &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{-n \sin n\varphi + im \cos m\varphi}{\cos n\varphi + i \sin m\varphi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{n \sin n\varphi \sin m\varphi + m \cos m\varphi \cos n\varphi}{\cos^2 n\varphi + \sin^2 m\varphi}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Можно показать [54], что имеют место некоторые соотношения для ИПС (2.10):

$$\eta_{-n,m} = \eta_{n,m}, \quad \eta_{n,-m} = -\eta_{n,m}, \quad \eta_{pn,pm} = p\eta_{n,m}, \quad \eta_{n,3n} = -n. \quad (2.11)$$

Кроме того, в [54] доказано, что при нечётном $n + m$ ИПС равен нулю, а если один из порядков равен единице, то ИПС по модулю тоже равен единице ($\eta_{nl} = 1, \eta_{lm} = (-1)^{(2m-1)/2}$).

На Рисунке 2.2 показано распределение векторов линейной поляризации в сечении пучка (2.8) с порядками одной или разной чётности.

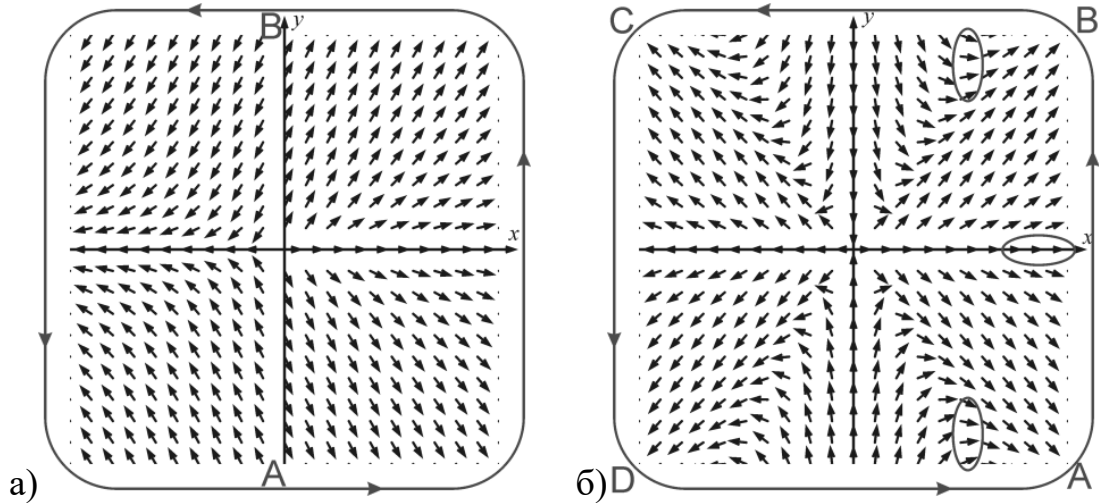


Рисунок 2.2 – Карты обобщённых векторных полей порядков $(n, m) = (1, 2)$ (а) и $(n, m) = (1, 3)$ (б). Буквы А, В, С, D обозначают границы участков контура, при обходе вдоль которого угол вектора напряжённости к оси x возрастает или убывает

При обходе вокруг поля на Рисунке 2.2а против часовой стрелки угол наклона вектора напряжённости к оси x сначала возрастает на π (участок АВ), и затем убывает на π (участок ВА). Это подтверждает, что индекс Пуанкаре-Хопфа поля на Рисунке 2.2а равен нулю. На Рисунке 2.2б есть три периферийные области, где вектор поляризации направлен вправо. Однако, в отличие от Рисунка 2.1б,г, индекс Пуанкаре-Хопфа уже не равен трём, поскольку при обходе вокруг центра поля против часовой стрелки угол наклона вектора напряжённости к оси x возрастает на $\pi/2$ на участках АВ и CD, и убывает на $3\pi/2$ на участках ВС и DA. Поэтому индекс Пуанкаре-Хопфа поля на Рисунке 2.2б равен -1 ($(\pi/2 - 3\pi/2 + \pi/2 - 3\pi/2) / (2\pi) = -1$), что согласуется с [53].

ИПС гибридного радиально-циркулярного и азимутально-циркулярного поля высокого порядка

Гибридные световые поля – радиально-циркулярное и азимутально-циркулярное были введены в рассмотрение в [27] и описываются векторами Джонса вида:

$$E_{RC}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ i \sin n\varphi \end{pmatrix}, \quad E_{AC}(\varphi) = \begin{pmatrix} -i \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Вектор Стокса для правого поля в (2.12) будет иметь вид:

$$S_1 = \cos(2n\varphi), \quad S_2 = 0, \quad S_3 = \sin(2n\varphi). \quad (2.13)$$

У поля (2.12) при определенных углах $2n\varphi = \pi/2 + \pi m$ будет круговая поляризация, а при других углах $2n\varphi = \pi m$, будет линейная поляризация. Параметры Стокса (2.13) не позволяют определить индекс сингулярности полей (2.12). Отсюда заключаем, что поля (2.12) не имеют точек сингулярности.

Когда поле E_{RC} из (2.12) колеблется во времени, в каждой точке напряжённость описывает эллипс поляризации, полуоси которого равны [55, 56] $\mathbf{E}_1 = (\cos n\varphi, 0)^T$ и $\mathbf{E}_2 = (0, \sin n\varphi)^T$.

Аналогично для поля E_{AC} из (2.12), в каждой точке напряжённость описывает эллипс поляризации, полуоси которого равны $\mathbf{E}_1 = (0, \cos n\varphi)^T$ и $\mathbf{E}_2 = (-\sin n\varphi, 0)^T$.

Отсюда следует, что при углах $\varphi = \pi m/n$ (m – произвольное целое число) вектор напряжённости поля E_{RC} направлен горизонтально, а у поля E_{AC} – вертикально. Это подтверждает и Рисунок 2.3, на котором показаны карты векторных полей для гибридного радиально-циркулярного и азимутально-циркулярного поля третьего порядка.

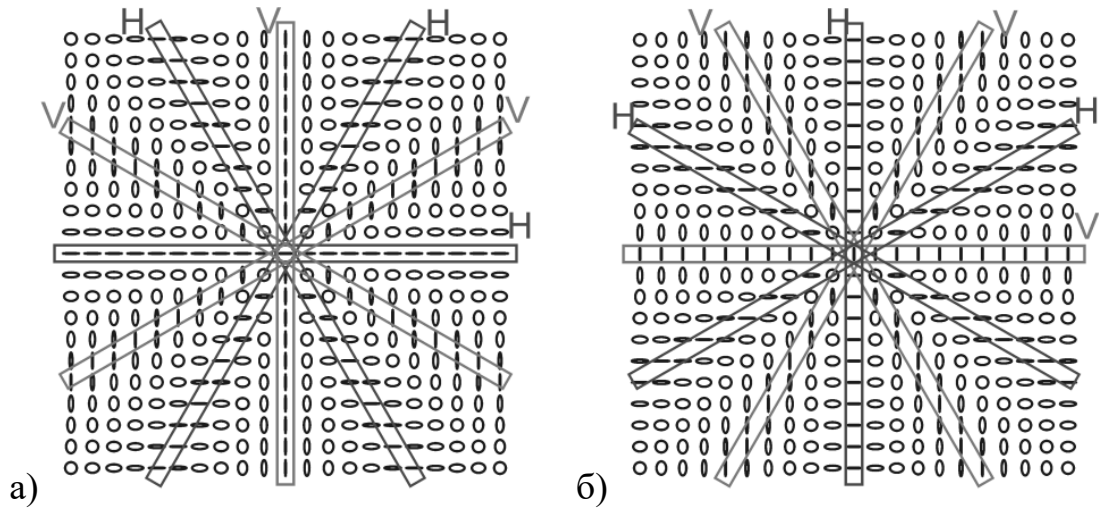


Рисунок 2.3 – Карты векторных полей для гибридного радиально-циркулярного (а) и азимутально-циркулярного поля (б) третьего порядка ($n = 3$).

Прямоугольниками обведены области линейной поляризации. Буквы Н и V обозначают соответственно области горизонтальной и вертикальной линейной поляризации

ИПС гибридного векторного поля с параметром

Гибридное векторное поле высокого порядка с параметром a введено в рассмотрение в [57] и описывается вектором Джонса вида:

$$E_H(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ ia + \sin n\varphi \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

У поля (2.14) одна точка сингулярности (но не V- и не C-типа) в начале координат. Параметры Стокса будут иметь вид:

$$S_1 = \frac{\cos 2n\varphi - a^2}{1 + a^2}, S_2 = \frac{\sin 2n\varphi}{1 + a^2}, S_3 = \frac{2a \cos n\varphi}{1 + a^2}. \quad (2.15)$$

При определенных углах, когда $\cos(n\varphi) = \pm 1$ и $a = 1$, у поля (2.14) имеются C-линии, то есть линии, на которых поляризация круговая. Комплексное поле Стокса для вектора (2.15) будет иметь вид:

$$S_c = \frac{\exp(2in\varphi) - a^2}{1 + a^2} \quad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в (2.6), получим индекс Стокса для гибридного поля (2.14):

$$\sigma = \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(1 - a^2 \cos 2n\varphi)}{(1 + a^4) - 2a^2 \cos 2n\varphi}. \quad (2.17)$$

Из (2.17) следует, что

$$\sigma = 2\eta = \begin{cases} n, & a = \pm 1, \\ 2n, & |a| < 1, \\ 0, & |a| > 1. \end{cases} \quad (2.18)$$

Из (2.18) видно, что при $a = 1$ у векторного поля может быть полуцелый ИПС.

На Рисунке 2.4 показано распределение векторов поляризации для гибридного векторного поля (2.14) при $a = 1$ для чётного ($n = 2$) и нечётного ($n = 3$) порядка.

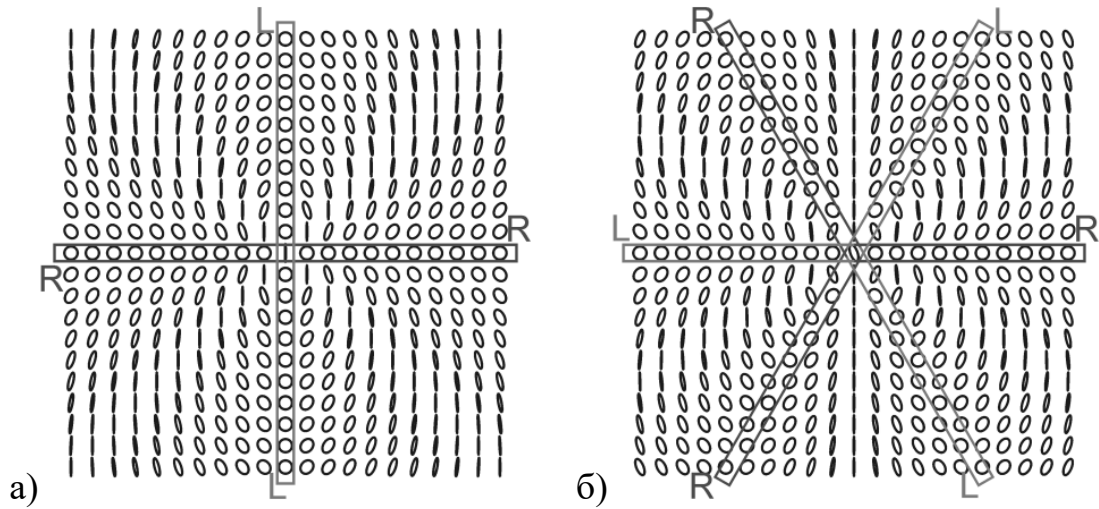


Рисунок 2.4 – Карты гибридного векторного поля с параметром $a = 1$ при $n = 2$ (а) и $n = 3$ (б). Прямоугольниками обведены области круговой поляризации (С-линии). Буквами R и L обозначены соответственно области с правой и левой круговой поляризацией

Из Рисунка 2.4а видно, что большая ось эллипса с правой поляризацией при обходе вокруг центра поля сделала оборот на 2π , то есть $\eta = 2\pi/(2\pi) = 1$. А на Рисунке 2.4б видно, что большая ось эллипса с правой поляризацией за полный угол 2π обернулась три раза. То есть $\eta = 3\pi/(2\pi) = 3/2$. Это согласуется с (2.18).

Поле с несколькими точками поляризационной сингулярности

В [48] рассмотрено векторное поле с n сингулярными точками, лежащими на окружности радиуса a , вектор Джонса которого можно записать в виде:

$$E_{nS}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r^n \cos n\varphi - a^n \\ r^n \sin n\varphi \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Векторное поле с несколькими сингулярностями уже не может зависеть только от полярного угла φ , но должно также зависеть от радиальной переменной r (2.19). Так как проекции поля (2.19) действительные, то его ИПС можно найти с помощью скалярного комплексного поля:

$$E_{c,n}(r, \varphi) = E_x + iE_y = r^n \exp(in\varphi) - a^n. \quad (2.20)$$

Топологический заряд скалярного поля (2.20) находится по формуле Берри (2.1) и равен:

$$\begin{aligned} TC = \eta &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{inr^n \exp(in\varphi)}{r^n \exp(in\varphi) - a^n} = n \end{aligned} \quad (2.21)$$

Для сравнения найдем ИПС поля (2.19) с помощью параметров Стокса. Параметры Стокса для поля (2.19) имеют вид:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{r^{2n} \cos(2n\varphi) - 2r^n a^n \cos(n\varphi) + a^{2n}}{r^{2n} + a^{2n} - 2r^n a^n \cos(n\varphi)}, \\ S_2 &= \frac{r^{2n} \sin(2n\varphi) - 2r^n a^n \sin(n\varphi)}{r^{2n} + a^{2n} - 2r^n a^n \cos(n\varphi)}, \\ S_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из (2.22) видно, что поле (2.19) локально линейно поляризовано, так как $S_3 = 0$. Комплексное поле Стокса имеет вид:

$$S_c = S_1 + iS_2 = \frac{r^{2n} \exp(i2n\varphi) - 2r^n a^n \exp(in\varphi) + a^{2n}}{r^{2n} + a^{2n} - 2r^n a^n \cos(n\varphi)}. \quad (2.23)$$

На основе (2.23) и (2.6) найдем индекс Стокса для поля (2.19):

$$\begin{aligned}
\sigma = 2\eta &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial S_c(r, \varphi) / \partial \varphi}{S_c(r, \varphi)} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{i2nr^{2n} e^{i2n\varphi} - 2inr^n a^n e^{in\varphi}}{r^{2n} e^{i2n\varphi} - 2inr^n a^n e^{in\varphi} + a^{2n}} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{2nr^{2n} e^{i2n\varphi}}{r^{2n} e^{i2n\varphi}} = 2n.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Видно, что уравнения (2.21) и (2.24) дают одинаковый результат: $\eta = n$.

На Рисунке 2.5 показаны распределения векторов линейной поляризации в сечении пучка (2.19) с тремя ($n=3$) и четырьмя ($n=4$) точками поляризационной сингулярности при $a=R/2$ (R – полуразмер расчётной области). Также видно, что в случае четырёх сингулярностей имеется две точки с радиальной поляризацией, и две – с азимутальной [48].

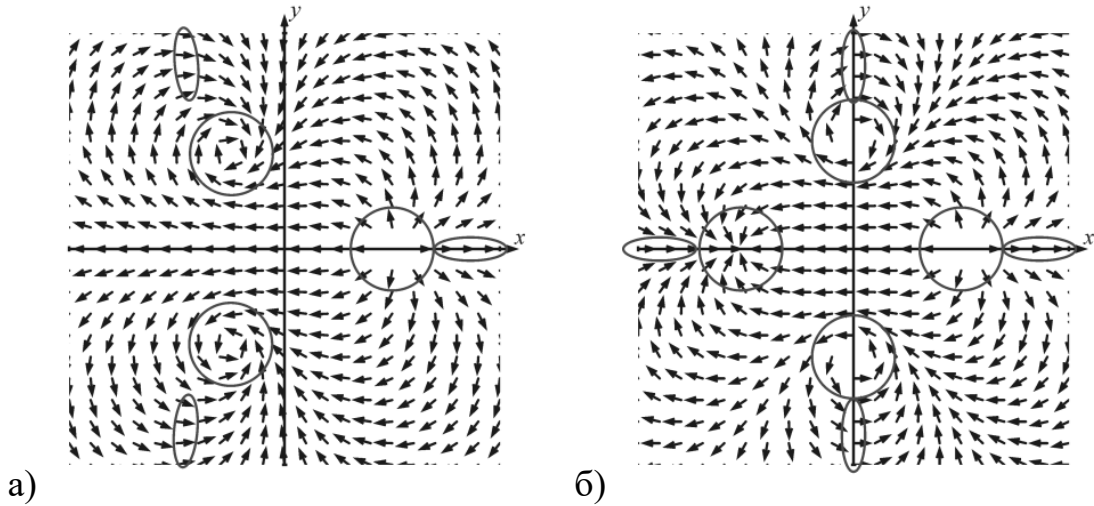


Рисунок 2.5 – Карты векторных полей (2.19) с тремя ($n=3$) (а) и с четырьмя ($n=4$) (2.б) точками поляризационной сингулярности, расположенными на расстоянии $a=R/2$ (R – полуразмер расчётной области) от оптической оси.

Окружностями обведены точки поляризационной сингулярности, а эллипсами показаны области, где вектор напряжённости направлен вправо

На Рисунке 2.5а,б видно, что количество периферийных областей с определённым направлением поляризации (например, правым) равно числу поляризационных сингулярностей. Кроме того, угол наклона вектора

напряжённости к оси x при переходе от одной такой области к другой возрастает. Поэтому Рисунок 2.5 подтверждает, что $\eta = n$.

Векторное поле с несколькими линиями сингулярности

Если в поле (2.19) убрать радиальную переменную, то вместо n точек поляризационной сингулярности появятся n сингулярных линий (V-линий, такие линии также обозначают как L -линии), и поле, по-прежнему, будет в каждой точке линейно поляризованным. Рассмотрим вектор Джонса вида:

$$E_R(r) = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) - a \\ \sin(n\varphi) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Найдем ИПС поля (2.25) простым способом с помощью скалярного комплексного поля:

$$E_c(\varphi) = E_x + iE_y = \exp(in\varphi) - a. \quad (2.26)$$

Применяя формулу (2.1) к полю (2.26), получим:

$$\begin{aligned} TC = \eta &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} = \\ &= \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1 - a \cos(n\varphi)}{(1 + a^2) - 2a \cos(n\varphi)} = \begin{cases} n/2, & a = \pm 1, \\ n, & |a| < 1, \\ 0, & |a| > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Из (2.27) видно, что в отличие от (2.24) поле (2.25) может иметь полуцелый ИПС, а не только целый, как поле (2.19). Это происходит потому, что у поля (2.25) при $a=1$ есть n V-линий, исходящих из центра под углами $n\varphi = 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. Наличие V-линий в поле (2.25) приводит к разделению начальной плоскости на n секторов, и при переходе через V-линию вектор линейной поляризации скачком меняет направление на π . Поэтому, сколько V-линий, столько раз вектор поляризации меняется на π при обходе по замкнутому контуру вокруг центра координат. Вот и получается, что $\eta = n\pi/(2\pi) = n/2$. При $a=-1$ V-линии поля (2.25) будут исходить из центра под углами $n\varphi = \pi + 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. Если $a=0$, то поле (2.25) совпадает с

обычным радиальным полем высокого порядка (2.2), и имеет одну V-точку в центре.

На Рисунке 2.6 показаны распределения векторов линейной поляризации в сечении пучка (2.25) второго ($n=2$) и третьего ($n=3$) порядка при $a=1/2$, $a=3/2$, и $a=1$.

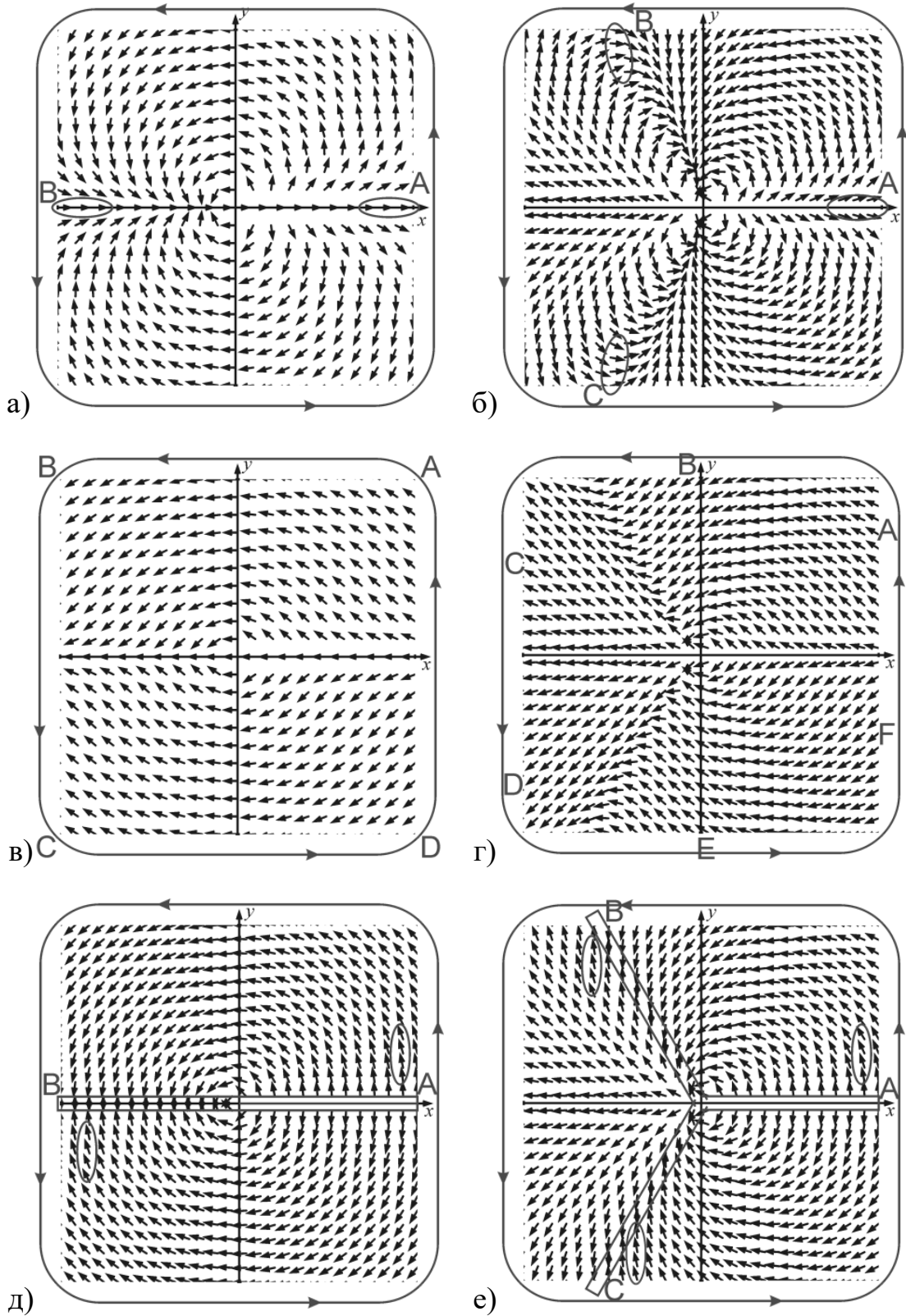


Рисунок 2.6 – Карты векторных полей (2.25) второго ($n = 2$) (а,в,д) и третьего ($n = 3$) (б,г,е) порядка при $a = 1/2$ (а,б), $a = 3/2$ (в,г), $a = 1$ (д,е). Эллипсами показаны области, где вектор напряжённости направлен вправо (а,б) или вверх (д,е). Буквы А, В, С, D, Е, F обозначают границы участков контура, при обходе вдоль которого угол вектора напряжённости к оси x возрастает или убывает.

Прямоугольниками (д,е) показаны V -линии

Из Рисунка 2.6а,б видно, что количество периферийных областей с определённым направлением поляризации (например, правым) равно порядку n . Кроме того, угол наклона вектора напряжённости к оси x при переходе от одной такой области к другой возрастает на 2π (от А к В и от В к А на Рисунке 2.6а, от А к В, от В к С и от С к А на Рисунок 2.6б). Поэтому Рисунок 2.6а,б подтверждают, что $\eta = n$ при $|a| < 1$. Из Рисунка 2.6в,г видно, что, в отличие от Рисунка 2.6а,б, угол наклона вектора напряжённости к оси x при обходе по контуру вокруг поля то возрастает, то убывает. Так, на Рисунке 2.6в этот угол возрастает примерно $\pi/2$ на участках АВ и CD, и настолько же убывает на участках ВС и DA. Аналогичная смена участков происходит на Рисунке 2.6г – угол наклона возрастает на участках АВ, CD, EF, и убывает на участках ВС, DE, FA. Поэтому Рисунок 2.6в,г подтверждают, что $\eta = 0$ при $|a| > 1$. Из Рисунка 2.6д,е видно, что при обходе по контуру вокруг поля угол наклона вектора напряжённости к оси x возрастает, но при пересечении n V -линий скачкообразно меняется на π . Так, на Рисунке 2.6д, этот угол возрастает на π на участках АВ и ВА, а на Рисунке 2.6е он возрастает на π на участках АВ, ВС и СА. Поэтому Рисунок 2.6д,е подтверждают, что $\eta = n/2$ при $|a| = 1$.

Оптический вихрь с поляризационной сингулярностью

Рассмотрим вихревое световое поле с топологическим зарядом m и цилиндрической поляризацией n -го порядка. Вектор Джонса такого поля имеет вид:

$$E_{RV}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \exp(im\varphi) \cos(n\varphi + \delta) \\ \exp(im\varphi) \sin(n\varphi + \delta) \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

где δ – константа. Если из двух проекций векторного поля (2.28) сформировать скалярное комплексное поле вида:

$$E_c(\varphi) = E_x + iE_y = \exp(im\varphi + in\varphi + i\delta), \quad (2.29)$$

то топологический заряд такого поля (2.29) будет равен $TC = m + n$. В (2.29) оба типа сингулярности (фазовая и поляризационная) дают вклад в ТЗ всего поля, как равноправные слагаемые. Но, если рассчитывать ИПС поля (2.28) с помощью параметров Стокса:

$$S_1 = \cos(2n\varphi + 2\delta), S_2 = \cos(2n\varphi + 2\delta), S_3 = 0, \quad (2.30)$$

и комплексного поля Стокса:

$$S_c = S_1 + iS_2 = \exp(2in\varphi + 2i\delta), \quad (2.31)$$

то получим, что ИПС равен: $\sigma = 2\eta = 2n$ и не зависит от номера m . Поэтому поляризационные сингулярности можно рассматривать двояким образом. Либо с помощью параметров Стокса, и тогда их ИПС будет равен n , либо с помощью комплексного поля (2.29), и тогда ТЗ такого поля будет равен $m + n$.

На Рисунке 2.7 показаны карты вихревого векторного поля (2.28) с фазовой сингулярностью первого порядка ($m=1$) и с поляризационной сингулярностью третьего порядка ($n=3$) при $\delta=0$. Заметим, что поле (2.28) нельзя показать при любом φ , поскольку в векторе Джонса (2.28) присутствует фаза. Поэтому, так как $m=1$, в верхней полуплоскости ($y>0$) показано поле (2.28) в предположении $\exp(i\varphi) = 1$, а в нижней полуплоскости ($y<0$) – в предположении $\exp(i\varphi) = -1$.

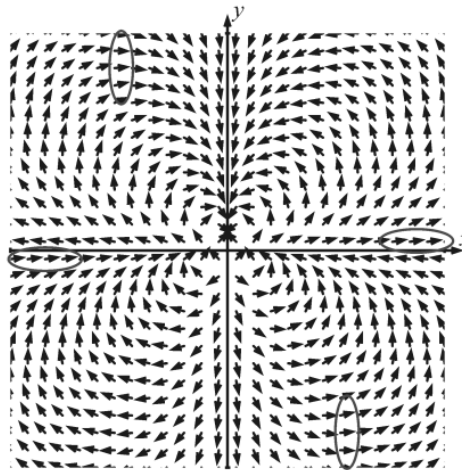


Рисунок 2.7 – Карты векторного поля оптического вихря первого порядка ($m = 1$) с поляризационной сингулярностью третьего порядка ($n = 3$)

Из Рисунка 2.7 видно, что количество периферийных областей с определённым направлением поляризации (например, правым) равно четырём, то есть как раз $m + n$.

ИПС пучков Пуанкаре

Световые пучки, состояние поляризации которых описывается единичными векторами на сфере Пуанкаре имеют вектор Джонса вида [58, 59]:

$$E_P(\varphi) = \begin{pmatrix} ae^{-in\varphi} + be^{in\varphi} \\ ia e^{-in\varphi} - ib e^{in\varphi} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

где $a = \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2}$, $b = \sin(\theta/2)e^{i\varphi/2}$, а θ и φ – полярный и азимутальные углы на сфере. Вектор Стокса будет иметь координаты:

$$\begin{aligned} S_1 &= 4|ab| \cos(2n\varphi - \arg a + \arg b), \\ S_2 &= 4|ab| \sin(2n\varphi - \arg a + \arg b), \\ S_3 &= |a|^2 - |b|^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Из (2.33) следует, что круговая поляризация у пучков Пуанкаре будет, если

$$S_3 = \begin{cases} 1, & |a| = 1, |b| = 0, \\ -1, & |a| = 0, |b| = 1. \end{cases} \quad (2.34)$$

Комплексное поле Стокса, с учетом (2.33), будет иметь вид:

$$S_c = S_1 + iS_2 = 4|ab| \exp(2in\varphi - i \arg a + i \arg b). \quad (2.35)$$

Из (2.35) следует, что ИПС поля (2.32) равен:

$$\eta = \begin{cases} n, & |a| > 0, |b| > 0, \\ 0, & |a| = 0, \text{ или } |b| = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Из (2.36) следует, что ИПС поля равен n , а само поле имеет неоднородную линейную поляризацию, если модули a и b оба отличны от нуля. И поле имеет круговую поляризацию и нет сингулярности ($\eta = 0$), если либо a , либо b равны нулю.

Векторное поле в одноосном кристалле

В работе [60] рассмотрены оптические вихри в одноосных кристаллах. Вектор Джонса световых полей внутри кристалла имеет вид:

$$E_C(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma/2) + i \sin(\gamma/2) e^{i2\varphi} \\ i \cos(\gamma/2) + \sin(\gamma/2) e^{i2\varphi} \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

где γ – разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами в параксиальном случае, φ – полярный угол в сечении пучков. Параметры Стокса имеют вид:

$$S_1 = 2 \sin \gamma \sin 2\varphi, S_2 = 2 \sin \gamma \cos 2\varphi, S_3 = 2 \cos \gamma. \quad (2.38)$$

Комплексное поле Стокса, с учетом (2.38), будет иметь вид:

$$S_c = S_1 + iS_2 = 2i \sin \gamma \exp(-2i\varphi). \quad (2.39)$$

Из (2.39) видно, что ИПС поля (2.37) равен:

$$\eta = \begin{cases} -1, & \sin \gamma \neq 0, \\ 0, & \sin \gamma = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Интересно, что, если задержка фазы равна $\gamma = \pi$, то $\eta = 0$ и световое поле в кристалле представляет оптический вихрь с ТЗ 2 и круговой поляризацией. А если задержка фазы равна $\gamma = 0$, то оптического вихря нет в кристалле, и пучок имеет только круговую поляризацию.

Световое поле с неоднородной поляризацией, изменяющейся по радиусу

В предыдущих разделах рассматривались световые поля, состояние поляризации которых изменялось только по полярному (азимутальному) углу φ (кроме поля (2.19)). В этом разделе рассмотрим световое поле, введенное в работе [61], состояние поляризации которого изменяется только по радиусу. Вектор Джонса такого поля имеет вид:

$$E_{RR}(r) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi nr / R) \\ i \sin(2\pi nr / R) \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

где R – это масштабный параметр. Компоненты вектора Стокса для поля (2.41) имеют вид:

$$S_1 = \cos(4\pi nr / R), S_2 = 0, S_3 = \sin(4\pi nr / R). \quad (2.42)$$

Из (2.42) следует, что у поля (2.41) будет правая круговая поляризация на радиусах, удовлетворяющих условию $r = (m + 1/2)R / (4n)$, левая круговая поляризация будет на радиусах $r = (m - 1/2)R / (4n)$ и линейная поляризация будет на радиусах $r = mR / (4n)$. Для поля (2.41), и для любого другого поля, состояние поляризации которого зависит только от радиальной переменной, при обходе по замкнутому контуру (по окружности любого радиуса) вокруг центра пучка направление векторов линейной поляризации и направления большой оси векторов эллиптической поляризации не будет меняться. То есть у полей, состояние поляризации которых зависит только от радиальной переменной, нет особых точек, и индекс поляризационной сингулярности равен нулю.

На Рисунке 2.8 показано распределение линейной (отрезки) и круговой поляризации (круги) в сечении пучка (2.41) для $n = 2$ (а) и $n = 3$ (б).

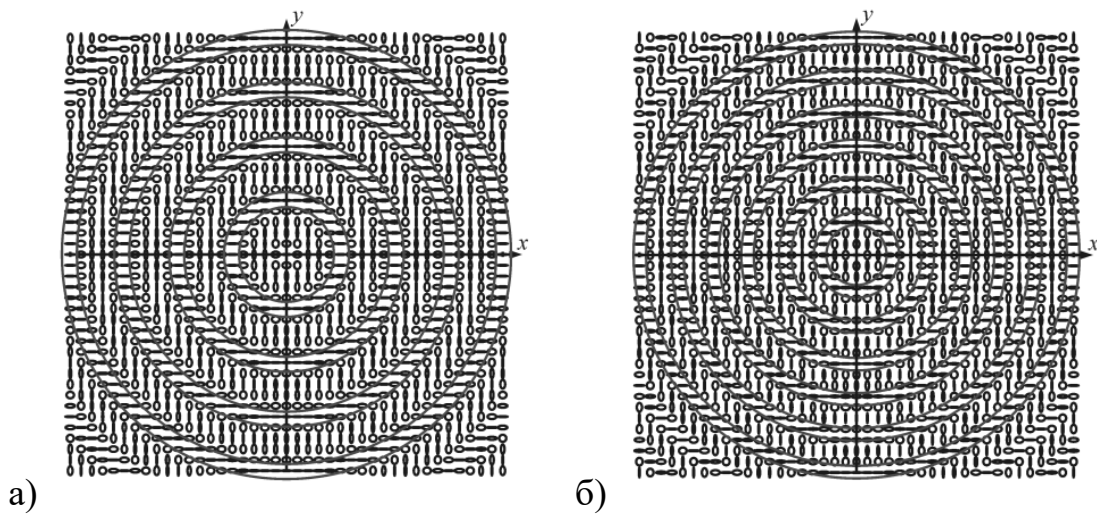


Рисунок 2.8 – Карты векторных полей (2.41) с радиально-неоднородной поляризацией при $n = 2$ (а) и при $n = 3$ (б). Окружностями показаны области с горизонтальной линейной поляризацией

Из Рисунка 2.8 видно, что внутри круга $r \leq R$ поле (2.41) имеет $4n$ колец радиуса $r = mR / (4n)$ с линейной поляризацией (на Рисунке 2.8 показаны кольца с горизонтальной поляризацией с радиусами $r = mR / (2n)$), между которыми располагаются области с круговой поляризацией (С-линии или С-кольца).

Обсуждение результатов

В этом подразделе сведем полученные ИПС разных световых полей в одной Таблице 2.1 и сравним их.

Таблица 2.1 – Сравнение векторных световых полей высокого порядка и их ИПС

Обозначение векторного поля	Вектор Джонса	Параметр Стокса S_3	Индекс поляризации и сингулярности	Источник
\mathbf{E}_R	$\begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix}$	$S_3 = 0$	$\eta = n$	[62]
\mathbf{E}_{RC}	$\begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ i \sin n\varphi \end{pmatrix}$	$S_3 = \sin 2n\varphi$	$\eta = 0$	[27]
\mathbf{E}_H	$\begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ ia + \sin n\varphi \end{pmatrix}$	$S_3 = a \cos n\varphi$	$\eta = \begin{cases} n/2, & a = 1, \\ n, & a \neq 1. \end{cases}$	[57]
\mathbf{E}_{nS}	$\begin{pmatrix} r^n \cos n\varphi - a^n \\ r^n \sin n\varphi \end{pmatrix}$	$S_3 = 0$	$\eta = n$	[48]
\mathbf{E}_{nV}	$\begin{pmatrix} \cos n\varphi - a \\ \sin n\varphi \end{pmatrix}$	$S_3 = 0$	$\eta = \begin{cases} n/2, & a = 1, \\ n, & a < 1, \\ 0, & a > 1. \end{cases}$	[63*]
\mathbf{E}_{RV}	$e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix}$	$S_3 = 0$	$\eta = n,$ $TC = m + n$	[75*]
\mathbf{E}_P	$\begin{pmatrix} ae^{-in\varphi} + be^{in\varphi} \\ iae^{-in\varphi} - ibe^{in\varphi} \end{pmatrix}$	$S_3 = a ^2 - b ^2$	$\eta = \begin{cases} n, & a \neq 0, b \neq 0 \\ 0, & a = 0 \vee b = 0. \end{cases}$	[58], [63*]

Из Таблицы 2.1 видно, что у гибридных световых полей \mathbf{E}_{RC} , \mathbf{E}_H и \mathbf{E}_P третья компонента вектора Стокса может быть отлична от нуля при некоторых полярных углах φ и при некоторых значениях параметров a и b . При этом ИПС η может быть любым: нулевым (\mathbf{E}_{RC}), полуцелым (\mathbf{E}_H) или целым (\mathbf{E}_P). У только векторных световых полей \mathbf{E}_R , \mathbf{E}_{nS} и \mathbf{E}_{nV} третья компонента вектора Стокса равен нулю ($S_3 = 0$), а ИПС может как целым (\mathbf{E}_R , \mathbf{E}_{nS}), так и полуцелым, и нулевым (\mathbf{E}_{nV}). Заметим, что третья компонента ненормированного вектора Стокса S_3 (2.3) совпадает с продольной проекцией спинового углового момента S_y :

$$S_3 = S_z = 2 \operatorname{Im} \left[\mathbf{E}^* \times \mathbf{E} \right]_z \quad (2.43)$$

Среди всех полей из Таблицы 2.1, только векторное поле \mathbf{E}_{ns} зависит от обеих полярных координат и имеет n точек поляризационной сингулярности, лежащих равномерно на окружности некоторого радиуса. Для всех остальных полей точка поляризационной сингулярности целого или полуцелого порядка лежит в начале координат (на оптической оси) [63*]. Нет совсем точек поляризационной сингулярности только у поля \mathbf{E}_{RC} .

2.2 Индекс поляризационной сингулярности пучков Пуанкаре

Вихревые лазерные пучки [64] активно исследуются в настоящее время, что связано с их широким применением в оптических телекоммуникациях [65], манипуляции частицами [66, 67], квантовой информатике [68, 69], сенсорике [70] и медицине [71]. Вихревые пучки или оптические вихри характеризуются двумя основными величинами: орбитальным угловым моментом (ОУМ) [72] и топологическим зарядом (ТЗ) [51]. Вихревые пучки, как правило, являются параксиальными лазерными пучками с линейной поляризацией, амплитуда которых описывается скалярной функцией. В настоящее время также активно изучаются лазерные пучки с неоднородной поляризацией, например, с радиальной или азимутальной [52]. Такие пучки называются цилиндрическими векторными пучками. В сечении таких пучков потоки локальных векторов поляризации (линейных или эллиптических) имеют точки поляризационной сингулярности: V-точки и C-точки. В этих точках не определено направление вектора линейной поляризации или направления осей эллипса поляризации. Такие точки поляризационной сингулярности описываются индексами сингулярности Стокса или Пуанкаре-Хопфа [44, 45, 46]. Оказывается, что ТЗ скалярных оптических вихрей и индексы поляризационной сингулярности можно рассчитывать одинаковым образом с помощью определения топологического заряда, данного М. Берри [51].

В данном разделе исследуется широкий класс векторных лазерных пучков – пучков Пуанкаре [58, 59], в которые как частные случаи входят как однородно поляризованные пучки с линейной и круговой поляризацией, так и цилиндрические векторные пучки с радиальной и азимутальной поляризацией, и пучки с неоднородной эллиптической поляризацией. По аналогии с ТЗ будет рассчитан индекс поляризационной сингулярности пучков Пуанкаре. С помощью формализма Ричардса-Вольфа [14] будут получены аналитические выражения для распределения проекций вектора напряженности электрического поля вблизи острого фокуса пучков Пуанкаре. И будет приведено выражение для распределения интенсивности в плоскости фокуса. Теоретические предсказания, следующие из полученных выражений, будут подтверждены с помощью компьютерного моделирования.

Вектор Стокса и поляризационная сфера Пуанкаре

Световые пучки, состояние поляризации которых описывается единичными векторами на сфере Пуанкаре имеют вектор Джонса вида [58, 59]:

$$E_p(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ae^{-i\varphi} + be^{i\varphi} \\ iae^{-i\varphi} - ibe^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

где $a = \cos(\theta/2)e^{-i\psi/2}$, $b = \sin(\theta/2)e^{i\psi/2}$, $a^2 + b^2 = 1$, а θ и φ – полярный и азимутальные углы на сфере. Параметры Стокса [53]:

$$S_1 = \frac{|E_x|^2 - |E_y|^2}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, S_2 = \frac{2 \operatorname{Re}(E_x^* E_y)}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, S_3 = \frac{2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y)}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, \quad (2.45)$$

где Re и Im – знаки реальной и мнимой части числа. Вектор Стокса, как видно из (2.45), имеет единичную длину $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$. Для пучка Пуанкаре (2.44) в начальной плоскости вектор Стокса будет иметь координаты:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2|ab| \cos(2n\varphi - \arg a + \arg b), \\ S_2 &= 2|ab| \sin(2n\varphi - \arg a + \arg b), \\ S_3 &= |a|^2 - |b|^2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Из (2.46) следует, что круговая поляризация у пучков Пуанкаре будет, если $S_3 = |a|^2 - |b|^2 = \cos \theta = \pm 1$ или

$$S_3 = \begin{cases} 1, & |a| = 1, |b| = 0, \\ -1, & |a| = 0, |b| = 1. \end{cases} \quad (2.47)$$

То есть круговая поляризация у пучков Пуанкаре (2.44) будет только при двух углах при $\theta = 0$, $\theta = \pi$ или в двух точках на сфере Пуанкаре (на «северном и южном» полюсах»). Угол θ отсчитывается от вертикальной оси сверху вниз. Линейная поляризация у пучка (2.44) будет при $S_3 = |a|^2 - |b|^2 = \cos \theta = 0$, то есть при $\theta = \pi/2$ или на «экваторе» сферы Пуанкаре. Угол наклона вектора линейной поляризации в разных точках «экватора» будет определяться углом ψ . Азимутальный угол ψ откладывается в плоскости (x, y) и увеличивается от положительного направления оси x к оси y . Поэтому вектор Джонса для линейной поляризации ($n = 0$) будет иметь вид $(\cos \psi, \sin \psi)$. Пучки с разным направлением вектора линейной поляризации будут располагаться в горизонтальной плоскости сферы Пуанкаре (в плоскости «экватора», $\theta = \pi/2$). В частности, горизонтальная линейная поляризация будет при $\psi = 0$, а вертикальная линейная поляризация при $\psi = \pi/2$. Таким образом, каждой точке сферы Пуанкаре можно сопоставить определенное поляризационное состояние пучков Пуанкаре (2.44).

Топологический заряд оптических вихрей

В современной оптике широкое применение нашли вихревые лазерные пучки [64], которые имеют точки фазовых сингулярностей, и у которых поток энергии распространяется по спирали. Такие вихревые пучки характеризуются двумя основными параметрами: орбитальным угловым моментом (ОУМ) и топологическим зарядом (ТЗ). Топологический заряд обычно определяется как целое число скачков фазы на 2π скалярного светового поля при обходе по замкнутому контуру вокруг точки фазовой сингулярности (точки изолированного нуля интенсивности). Если таких точек сингулярности в сечении лазерного пучка несколько, то ТЗ равен алгебраической сумме ТЗ для каждой точки

сингулярности. Недостатком такого определения ТЗ является то, что на практике затруднительно найти все точки фазовой сингулярности в сечении пучка, так как некоторые из них могут располагаться в области малых значений интенсивности (на периферии пучка). В данном разделе мы будем пользоваться более конструктивным определением ТЗ, которое выражается формулой М. Берри [51]:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (2.48)$$

В (2.48) $E(r, \varphi)$ – комплексная амплитуда светового поля, (r, φ) – полярные координаты в сечении пучка, \lim – знак предела при стремлении радиальной координаты к бесконечности, Im – мнимая часть пучка. Формула (2.48) вычисляет ТЗ по окружности бесконечного радиуса в одном из сечений пучка. Поэтому формула (2.48) автоматически учитывает все точки фазовых дислокаций, которые есть в пучке. Топологический заряд [73], как и ОУМ, сохраняются при распространении пучка в свободном пространстве. Правда ТЗ в начальной плоскости может отличаться от ТЗ при распространении пучка, так как в поле ТЗ должен быть всегда целым, а в начальной плоскости ТЗ может быть и дробным.

В данном разделе мы применим формулу Берри (2.48) для вычисления индекса поляризационной сингулярности пучков Пуанкаре.

Индекс поляризационной сингулярности

Для характеристики векторных световых полей с поляризационной сингулярностью вместо топологического заряда используют индексы поляризационной сингулярности. Это связанные между собой индекс Стокса и индекс Пуанкаре-Хопфа. Наиболее подробно исследовал оба эти индекса I. Freund в работах [44, 45, 46]. Точки поляризационной сингулярности неоднородно поляризованных световых полей имеются такие: V-точки и C-точки. Они определяют топологию потоков локальных векторов поляризации в сечении пучка. V-точки – это точки сингулярности (неопределенности) направления вектора локальной линейной поляризации. В этой точке у светового поля интенсивность равна нулю. C-точки – это точки, в которых не определено направление большей оси локального эллипса поляризации. То есть это точки, в

которых поляризация круговая. Если в поле есть линии неопределенности направления линейной поляризации – это V-линии (или L-линии). А линии круговой поляризации называются C-линиями. Индексы сингулярности для V- и C-точек, а также для L- и C-линий определяются с помощью параметров Стокса и комплексных полей Стокса [44, 45, 46]. С помощью (2.46) можно сформировать комплексное поле Стокса, которое будет иметь вид:

$$S_c = S_1 + iS_2 = 2|ab| \exp(2in\varphi - i \arg a + i \arg b). \quad (2.49)$$

Подставим комплексную амплитуду (2.49) в формулу Берри (2.48) и получим, что индекс Стокса σ равен удвоенному индексу Пуанкаре-Хопфа η и для поля (2.44) равен:

$$\sigma = 2\eta = \begin{cases} 2n, & |a| > 0, |b| > 0, \\ 0, & |a| = 0, \text{ или } |b| = 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

Из (2.50) следует, что индекс Пуанкаре-Хопфа поля (2.44) равен топологическому заряду n , а само поле имеет неоднородную линейную поляризацию, если модули a и b оба отличны от нуля. И поле имеет круговую поляризацию и нет сингулярности ($\eta = 0$), если либо a , либо b равны нулю. Из (2.50) следует, что в сечении пучков Пуанкаре в центре на оптической оси имеется точка поляризационной сингулярности с индексом равным n . Это означает, что поток локальных векторов с линейной поляризации при обходе по замкнутому контуру вокруг оптической оси меняет совершает n полных оборотов на угол 2π . В разделе моделирования будут приведены распределения векторов поляризации в сечении пучков Пуанкаре при разных значениях параметров a, b, n .

Острая фокусировка пучков Пуанкаре

Все 6 проекций электромагнитного поля (2.44) вблизи острого фокуса можно найти с помощью формализма Ричардса-Вольфа [14]. В этом разделе мы приведем результаты расчета распределения интенсивности и проекций векторов Стокса в фокусе для начального светового поля (2.44). Расчет производился с помощью общих формул Ричардса-Вольфа [14], которые описывают свет в области фокуса:

$$\mathbf{U}(\rho, \psi, z) = -\frac{if}{\lambda} \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} B(\theta, \varphi) T(\theta) \mathbf{P}(\theta, \varphi) \times \\ \times \exp\{ik[\rho \sin \theta \cos(\varphi - \psi) + z \cos \theta]\} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.51)$$

где $\mathbf{U}(\rho, \psi, z)$ – напряжённость электрического или магнитного поля, $B(\theta, \varphi)$ – электрическое или магнитное поле на входе широкоапертурной оптической системы в координатах выходного зрачка (θ – полярный угол, φ – азимутальный), $T(\theta) = (\cos \theta)^{1/2}$ – функция аподизации линзы, f – фокусное расстояние, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны, α – максимальный полярный угол, определяемый числовой апертурой линзы ($NA = \sin \alpha$), $\mathbf{P}(\theta, \varphi)$ – матрица поляризации. Интеграл (8) позволяет вычислять распределение компонент электромагнитного поля в координатах выходного зрачка. Матрица поляризации $\mathbf{P}(\theta, \varphi)$ для напряжённости электрического и магнитного полей имеет вид:

$$\mathbf{P}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 + \cos^2 \varphi (\cos \theta - 1) \\ \sin \varphi \cos \varphi (\cos \theta - 1) \\ -\sin \theta \cos \varphi \end{bmatrix} a(\theta, \varphi) + \\ + \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \varphi (\cos \theta - 1) \\ 1 + \sin^2 \varphi (\cos \theta - 1) \\ -\sin \theta \sin \varphi \end{bmatrix} b(\theta, \varphi), \quad (2.52)$$

где $a(\theta, \varphi)$, $b(\theta, \varphi)$ – функции поляризации для x -, y - и z -компонент падающего поля. Для начального поля (2.44) функции поляризации будут иметь вид:

$$E(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ae^{-i\varphi} + be^{i\varphi} \\ ia e^{-i\varphi} - ib e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

для напряжённости электрического поля. Подставляя (2.53) в (2.51) и (2.52), получим распределения проекций вектора напряженности электрического поля вблизи острого фокуса ($B(\theta, \varphi) = A(\theta)$ – амплитуда в выходном зрачке, например, гауссова функция от угла θ):

$$\begin{aligned}
E_x(r, \varphi, z) &= \frac{i^{n-1}}{\sqrt{2}} \left[(ae^{-in\varphi} + be^{in\varphi}) I_{0,n} + (ae^{-i(n-2)\varphi} + be^{i(n-2)\varphi}) I_{2,n-2} \right], \\
E_y(r, \varphi, z) &= \frac{i^n}{\sqrt{2}} \left[(ae^{-in\varphi} - be^{in\varphi}) I_{0,n} - (ae^{-i(n-2)\varphi} - be^{i(n-2)\varphi}) I_{2,n-2} \right], \\
E_z(r, \varphi, z) &= \sqrt{2} i^n (ae^{-i(n-1)\varphi} + be^{i(n-1)\varphi}) I_{1,n-1}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

В (2.54) функции $I_{\nu,\mu}$ зависят только от радиальной переменной r и расстояния z от фокуса и равны выражению:

$$I_{\nu,\mu} = \left(\frac{4\pi f}{\lambda} \right) \int_0^{\theta_0} \sin^{\nu+1} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-\nu} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{1/2}(\theta) A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_\mu(x) d\theta, \tag{2.55}$$

где k – волновое число света, λ – длина волны света, f – фокусное расстояние идеальной сферической линзы, формирующей фокус, z – оптическая ось, при $z=0$ – плоскость фокуса, $x = krsin\theta$, $J_\mu(x)$ – функция Бесселя первого рода μ -го порядка, $NA = \sin\theta_0$ – числовая апертура апланатической оптической системы, $A(\theta)$ – любая действительная функция, описывающая амплитуду входного поля, обладающего осевой симметрией (плоская волна, гауссов пучок, пучок Бесселя-Гаусса). У интегралов $I_{\nu,\mu}$ (2.56) первый индекс $\nu=0,1,2$ описывает тип интеграла, а второй индекс $\mu = 0, 1, 2, \dots, m$ равен порядку функции Бесселя.

Чтобы проверить правильность полученных выражений для проекций вектора напряженности электрического поля вблизи фокуса (2.54) для пучков Пуанкаре (2.44) положим в (2.54) $n = 0$, $\theta = \pi/2$ и $\psi = 0$. Тогда в начальной плоскости получим линейную поляризацию вдоль горизонтальной оси x , а вблизи фокуса получим выражения для проекций электрического поля, точно совпадающие с аналогичными выражениями, полученными в [14]. Из (2.54) при $a = b = (2)^{-1/2}$ можно получить компоненты электрического вектора в фокусе для цилиндрического векторного поля целого порядка n , которые точно совпадают с полученными ранее в [52, 54].

Найдем распределение интенсивности в остром фокусе ($z = 0$) для пучков Пуанкаре:

$$\begin{aligned}
I(r, \varphi) &= I_x + I_y + I_z = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2 = \\
&= I_{0,n}^2 + I_{2,n-2}^2 + 2I_{1,n-1}^2 + 2 \sin \theta \cos(2(n-1)\varphi + \psi) (I_{0,n} I_{2,n-2} + 2I_{1,n-1}^2). \quad (2.56)
\end{aligned}$$

В (2.56) входят все три параметра, которые характеризуют поляризационное состояние пучка Пуанкаре (1): n , θ , ψ . Варьируя эти параметры можно управлять формой фокусного пятна. Из (2.56) видно, что в общем случае распределение интенсивности в фокусе (фокусное пятно) для пучков Пуанкаре (2.44) имеет осевую симметрию, так как при смене угла φ на $\varphi + \pi$ интенсивность (2.56) не меняется. В (2.56) косинус будет достигать максимума на углах, удовлетворяющих уравнению:

$$2(n-1)\varphi + \psi = 2\pi p, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (2.57)$$

то есть при обходе вокруг оптической оси в плоскости фокуса по окружности некоторого радиуса интенсивность будет иметь $2(n-1)$ локальных максимумов. Из (2.56) видно, что фокусное пятно будет иметь круглую форму при $\theta = 0, \pi$.

Результаты моделирования

На Рисунке 2.9 показаны распределения потоков локальных векторов линейной поляризации при $\theta = \pi/2$. В этом случае пучки Пуанкаре сводятся к цилиндрическим пучкам порядка n . На Рисунке 2.9 показаны поля векторов поляризации для пучков второго, $n = 2$ (а,в) и третьего, $n = 3$ (б,г) порядков. В центре пучка находится точка поляризационной сингулярности (V-точка), в которой не определено направление вектора линейной поляризации. Индекс сингулярности Пуанкаре-Хопфа для этих полей равен их номеру (2.50). В этом можно убедиться, определив сколько полных оборотов делают вектора линейной поляризации при обходе по замкнутому контуру вокруг центра пучка. На Рисунке 2.9а,в вектора линейной поляризации делают 2 полных оборота, а на Рисунке 2.9б,г – три полных оборота (четыре оборота на угол $3\pi/2$ каждый). Также из Рисунка 2.9 видно, что при $\psi = \pi/2$ поле векторов поляризации поворачивается на $\pi/2$ при $n = 2$ (Рисунок 2.9а,в) или на $\pi/4$ при $n = 3$ (Рисунок 2.9 б,г).

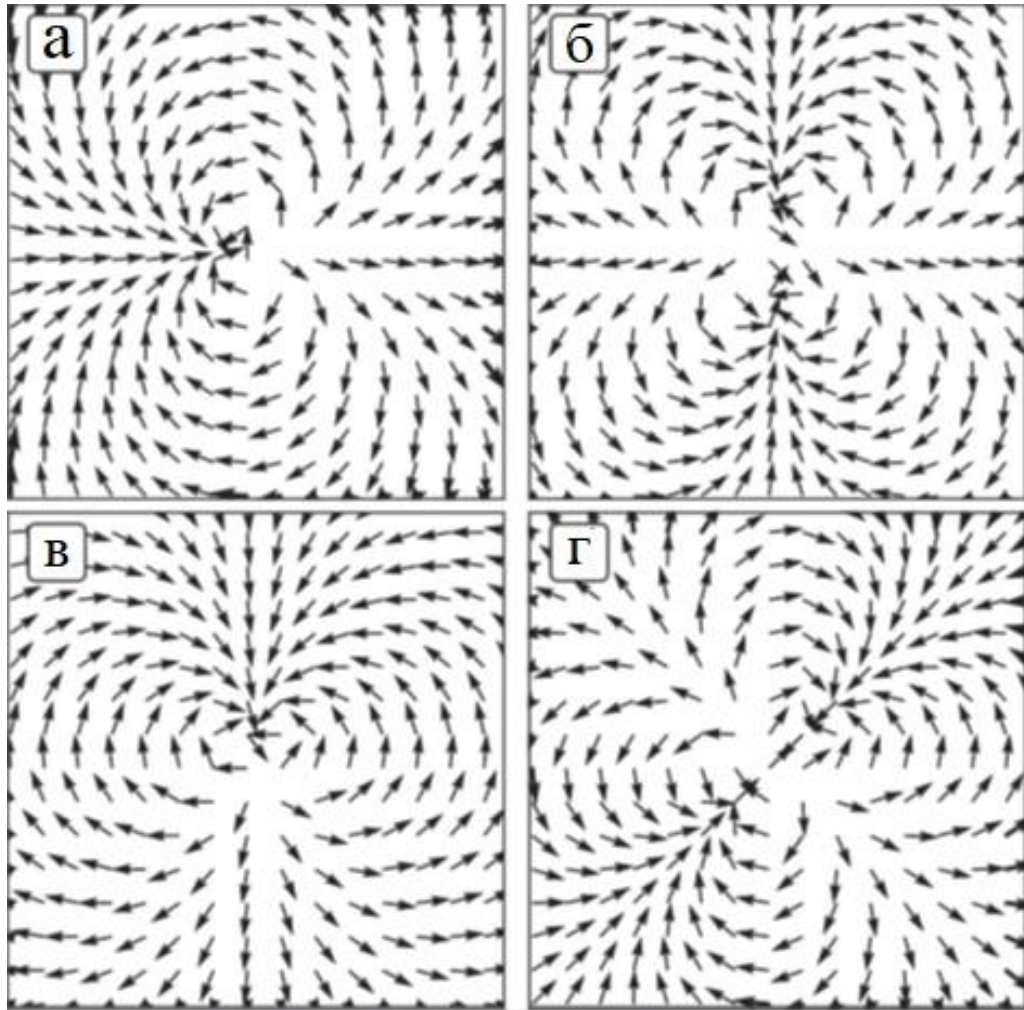


Рисунок 2.9 – Распределение локальных векторов поляризации в сечении пучков Пуанкаре в начальной плоскости ($\theta = \pi/2$): $n = 2$, $\psi = 0$ (а); $n = 3$, $\psi = 0$ (б); $n = 2$, $\psi = \pi/2$ (в); $n = 3$, $\psi = \pi/2$ (г)

На Рисунке 2.10 показаны распределения суммарной интенсивности $I(r, \varphi) = I_x + I_y + I_z$ (2.56) в плоскости фокуса для начального поля (2.44) при следующих параметрах: длина волны 633 нм, числовая апертура идеальной сферической линзы $NA = 0,95$. Параметры пучка: $\theta = \pi/2$, $\psi = 0$, $n = 2$ (Рисунок 2.10а), $n = 3$ (Рисунок 2.10б). Из Рисунка 2.10 видно, что и полная интенсивность имеет $2(n-1)$ локальных максимумов: $2(2 - 1) = 2$ (Рисунок 2.10а) и $2(3 - 1) = 4$ (Рисунок 2.10б). Это подтверждает правильность полученного выражения (2.56).

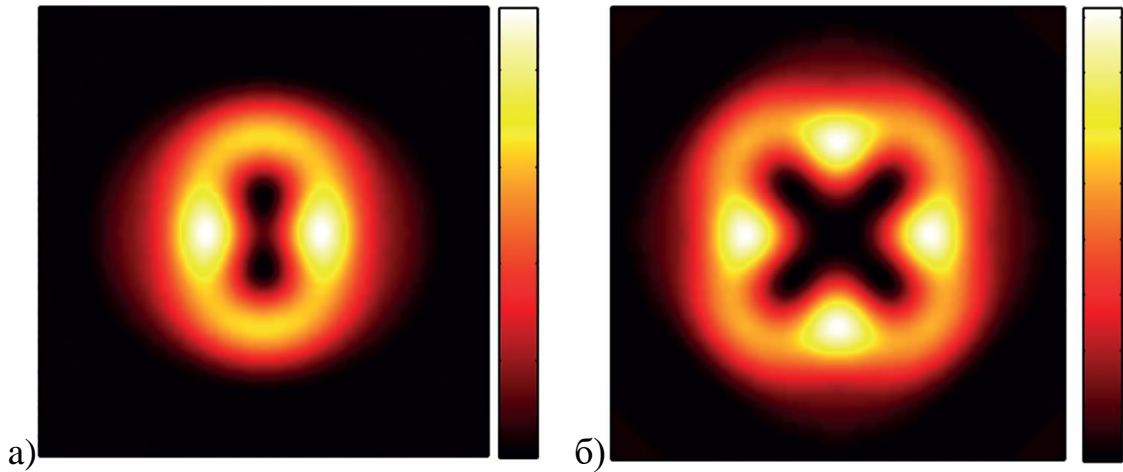


Рисунок 2.10 – Распределение суммарной интенсивности в фокусе для пучка (2.44) с параметрами $\theta = \pi/2$, $\psi = 0$ и $n = 2$ (а), 3 (б)

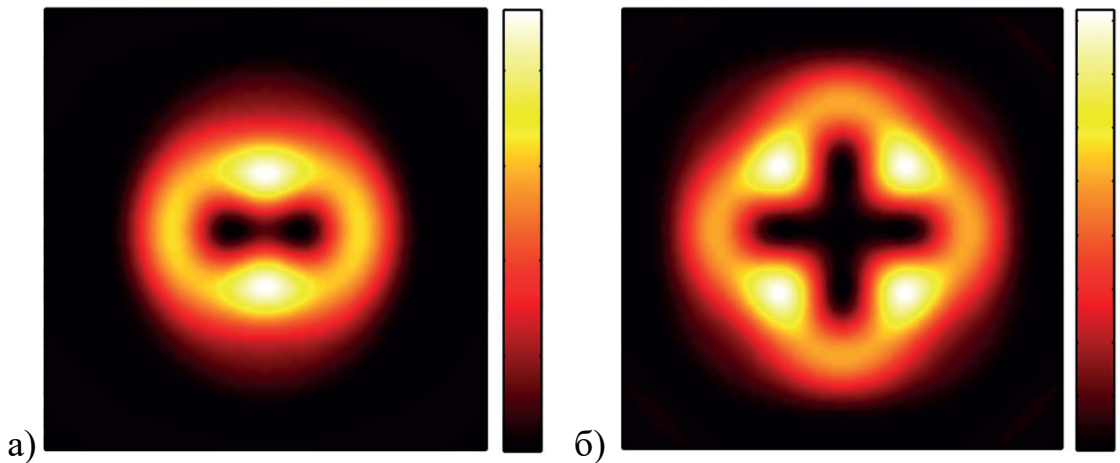


Рисунок 2.11 – Распределение суммарной интенсивности в фокусе для пучка (2.44) с параметрами $\theta = \pi/2$, $\psi = \pi/2$ и $n = 2$ (а), 3 (б)

На Рисунке 2.11 показаны распределение суммарной интенсивности для пучка (2.1) с параметрами $\theta = \pi/2$, $\psi = \pi/2$ и $n = 2$ (а), $n = 3$ (б). Из сравнения Рисунка 2.10 и Рисунка 2.11 видно, что форма фокусных пятен сохранилась (два и четыре локальных максимума интенсивности), но картина повернулась на $\pi/2$ (а) и $\pi/4$ (б). В центре (на оптической оси) интенсивность равна нулю. Таким образом можно утверждать, что номер n (топологический заряд) пучка Пуанкаре равен индексу поляризационной сингулярности Пуакаре-Хопфа и определяет число локальных максимумов в остром фокусе пучка Пуанкаре, число которых равно $2(n - 1)$. Выбор параметра $\psi = \pi/2$ вместо $\psi = 0$ приводит к повороту фокусного пятна на угол $\pi/(2(n - 1))$ [75*].

2.3 Выводы к главе 2

1. Для разных векторных и гибридных световых полей, в том числе для полей со многими точками поляризационной сингулярности, найдены индексы поляризационной сингулярности по известной формуле М. Берри, которая применяется обычно для нахождения топологического заряда скалярных вихревых световых полей. Показано, что у полей, состояние поляризации которых зависит только от полярного угла в сечении пучка, могут быть либо линии поляризационной сингулярности, исходящие из центра, либо одна точка поляризационной сингулярности, находящаяся в центре сечения пучка. Если состояние поляризации поля зависит только от радиальной переменной, то такие поля не имеют точек поляризационной сингулярности и их индекс равен нулю. Если поляризационное состояние векторного поля зависит от обеих полярных координат, то такое поле может иметь несколько точек поляризационной сингулярности, расположенных в разных местах в сечении пучка. Также рассмотрено новое векторное поле с радиальной поляризацией высокого порядка и с действительным параметром. Такое поле при разных значениях параметра имеет либо несколько линий поляризационной сингулярности, исходящих из центра, либо особую точку в центре. При этом индекс поляризационной сингулярности такого поля при разных параметрах может быть либо полуцелым, либо целым, либо нулевым
2. Теоретически и численно исследуются лазерные пучки Пуанкаре и их острая фокусировка. С помощью параметров Стокса найден индекс поляризационной сингулярности таких пучков, он оказался равен топологическому заряду оптических вихрей, участвующих в формировании пучка Пуанкаре. С помощью формализма Ричардса-Вольфа найдены аналитические выражения для проекций вектора напряженности электрического поля вблизи острого фокуса данных

пучков. Получено выражение для распределения интенсивности в плоскости фокуса, и найдены параметры, при которых фокусное пятно имеет круглую форму. Число локальных максимумов интенсивности в плоскости фокуса пропорционально величине индекса поляризационной сингулярности пучка. Результаты моделирования подтверждают теоретические предсказания.

3. Оптический эффект Холла в остром фокусе лазерного излучения

3.1 Спиновый эффект Холла до и после фокусировки цилиндрического векторного пучка высокого порядка

В оптике хорошо известны цилиндрические векторные пучки (ЦВП) [76, 52], в том числе пучки высоких порядков. При порядке $n = 1$ эти пучки имеют конкретные названия — радиально поляризованный пучок [77] и азимутально поляризованный пучок [78]. Кроме того, во многих работах изучалась острая фокусировка ЦВП первого порядка [17, 40], высокого порядка [62, 79], дробного порядка [80], а также фокусировка вихревых пучков с азимутальной поляризацией высокого порядка [18]. Существует множество различных способов получения цилиндрических векторных пучков с использованием, например, интерферометра Тваймана-Грина [81], решеток Даммана [82], метаповерхностей [83, 84], пространственных модуляторов света [85] или элементов, изготовленных цифровыми методами и лазерной печатью [86, 87].

Известно, что как в начальной плоскости, так и в фокусе ЦВП произвольного порядка поляризация неоднородна и линейна в каждой точке поперечного сечения пучка. Порядок пучка n равен числу полных оборотов вектора поляризации при прохождении по замкнутому контуру вокруг оптической оси. На оптической оси в начальной плоскости такие пучки имеют точку поляризационной сингулярности (V -точка), где направление вектора линейной поляризации не определено [54]. Индекс поляризации этой V -точки равен порядку пучка n . Также известно, что в остром фокусе ЦВП n -го порядка распределение интенсивности имеет $2(n-1)$ локальных максимумов [54], т. е. третья компонента вектора Стокса равна нулю: спиновый угловой момент (СУМ) ЦВП в начальной плоскости равен нулю. Равным нулю также является орбитальный угловой момент (ОУМ) ЦВП в начальной плоскости и в фокусе.

В данном разделе теоретически и с помощью интегралов Дебая и численного моделирования показано, что вблизи острого фокуса (до фокуса и за

фокусом) генерируются локальные субволновые области с эллиптической и круговой поляризацией разного знака (разного спина).

СУМ до и после фокуса

Если начальное световое поле представляет собой цилиндрический векторный пучок n -го порядка, векторы Джонса электрического и магнитного полей задаются формулой:

$$E_n(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix}, \quad H_n(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где (r, φ) полярные координаты в поперечной начальной плоскости пучка. На Рисунке 3.1 показано распределение интенсивности гауссова пучка и векторов напряженности электрического поля, когда пучок имеет цилиндрическую поляризацию (3.1) с $n = 1$ и $n = 3$.

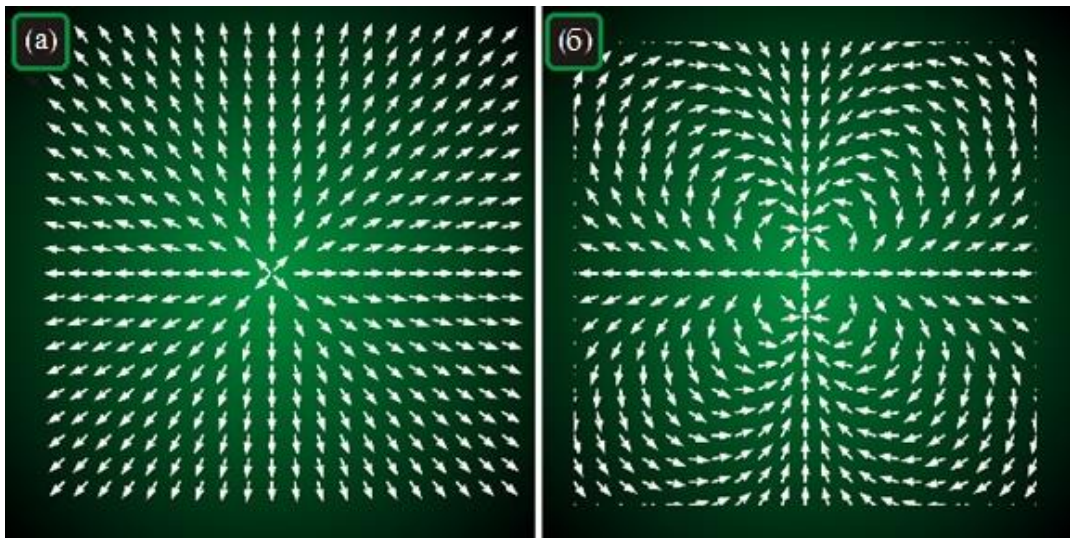


Рисунок 3.1 – Распределения интенсивности гауссова пучка и векторов напряженности электрического поля при цилиндрической поляризации пучка (3.1) с $n = 1$ (а) и $n = 3$ (б)

На Рисунке 3.1 видно, что на замкнутом контуре вокруг поля вектор поляризации делает один полный оборот на Рисунке 3.1а и три полных оборота на Рисунке 3.1б. Таким образом, при распространении пучка и в плоскости фокуса поле на Рисунке 3.1а ($n = 1$) должно сохранять свою вращательную симметрию,

тогда как цилиндрическая поляризация 3-го порядка ($n = 3$, Рисунок 3.1б) нарушает эту вращательную симметрию.

Используя интегралы Дебая [14], получаем все декартовы компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей в остром фокусе светового поля с поляризацией (3.1):

$$\begin{aligned}
 E_x(r, \varphi) &= i^{n-1} \left[\cos(n\varphi) I_{0,n} + \cos((n-2)\varphi) I_{2,n-2} \right], \\
 E_y(r, \varphi) &= i^{n-1} \left[\sin(n\varphi) I_{0,n} - \sin((n-2)\varphi) I_{2,n-2} \right], \\
 E_z(r, \varphi) &= 2i^n \cos((n-1)\varphi) I_{1,n-1}, \\
 H_x(r, \varphi) &= -i^{n-1} \left[\sin(n\varphi) I_{0,n} + \sin((n-2)\varphi) I_{2,n-2} \right], \\
 H_y(r, \varphi) &= -i^{n-1} \left[-\cos(n\varphi) I_{0,n} + \cos((n-2)\varphi) I_{2,n-2} \right], \\
 H_z(r, \varphi) &= -2i^n \sin((n-1)\varphi) I_{1,n-1}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

В уравнении (3.2) функции $I_{v,\mu}$ зависят только от радиальной и продольной координат r и z и равны:

$$\begin{aligned}
 I_{v,\mu} &= \left(\frac{4\pi f}{\lambda} \right)^{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin^{v+1} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-v} \left(\frac{\theta}{2} \right) \times \\
 &\times \cos^{1/2}(\theta) A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_\mu(\xi) d\theta,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число монохроматического света с длиной волны λ , f - фокусное расстояние безабберационной сферической линзы, фокусирующей пучок, z - ось распространения ($z = 0$ - фокальная плоскость), $\xi = kr \sin \theta$ описывает амплитуду входного поля с цилиндрической симметрией (плоская волна, гауссов пучок, пучок Бесселя–Гаусса). В функциях $I_{v,\mu}$ в уравнении (3.3) первый индекс $v = 0, 1, 2$ описывает первую часть подынтегральной функции, а второй индекс $\mu = 0, 1, 2, \dots, n$ определяет порядок функции Бесселя.

Для получения фокального распределения плотности спина или спинового углового момента (СУМ) для пучка с поляризацией (3.1) воспользуемся общим выражением для вектора спинового углового момента, приведенным в [88]:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{16\pi\omega} \operatorname{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}), \tag{3.4}$$

где ω - угловая частота света. С этого момента постоянный множитель $1/(16\pi\omega)$ будет опущен. Продольная компонента СУМ (без постоянного множителя) совпадает с ненормированным третьим параметром Стокса S_3 :

$$S_3 = S_z = 2 \operatorname{Im} \left(E_x^* E_y \right). \quad (3.5)$$

Известно, что третья компонента Стокса указывает на круговую или эллиптическую поляризацию светового поля [53]. Если $S_3 = 0$, то поле имеет только линейную поляризацию. Если мы подставим компоненты электрического поля из уравнения (3.2) в уравнение (3.5) и учитывая комплексность интегралов (3.3) вблизи фокуса (но не в самом фокусе), получим продольную составляющую вектора СУМ:

$$S_z = \operatorname{Im} \left[I_{0,n} I_{2,n-2}^* \sin(n\varphi) \cos((n-2)\varphi) - I_{0,n}^* I_{2,n-2} \sin((n-2)\varphi) \cos(n\varphi) \right], \quad (3.6)$$

где звездочки «*» означают комплексное сопряжение. Разделив действительную и мнимую части в интегралах (3.3) и используя линейное приближение $\exp(ikz \cos \theta) \approx 1 + ikz \cos \theta$ вблизи фокуса ($kz \ll 1$), вместо уравнения (3.6) получаем:

$$S_z \approx 2kz \sin(2(n-1)\varphi) (I_0 R_2 - I_2 R_0), \quad (3.7)$$

где мы используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} R_0 &= I_{0,n}(z=0), \quad I_0 = \bar{I}_{0,n}, \\ R_2 &= I_{2,n-2}(z=0), \quad I_2 = \bar{I}_{2,n-2}, \\ \bar{I}_{\nu,\mu} &= \left(\frac{4\pi f}{\lambda} \right)^{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin^{\nu+1} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-\nu} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3/2}(\theta) A(\theta) J_\mu(\xi) d\theta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Как видно из уравнения (3.7), в самом фокусе ($z=0$), $S_3=0$ и, следовательно, в каждой точке фокальной плоскости поляризация линейна. Однако при малых расфокусировках ($kz \ll 1$), $S_3 \neq 0$ и появляются области с эллиптической и круговой поляризацией, если $n \neq 1$. Условие $n \neq 1$ согласуется с Рисунком 3.1, демонстрируя, что порядок $n=1$ не нарушает вращательную симметрию пучка, и области с ненулевым СУМ не могут появиться. Таким

образом, такие области могут появиться только из-за нарушения симметрии при $n \neq 1$. В областях, где до очага ($z < 0$) СУМ была отрицательной ($S_3 < 0$), после очага ($z > 0$), она становится положительной ($S_3 > 0$), и наоборот. Согласно уравнению (3.7), вблизи фокальной плоскости на окружности определенного радиуса с центром на оси распространения располагаются центры $4(n-1)$ локальных субволновых областей с эллиптической и круговой поляризацией. В таких соседних областях вектор поляризации вращается в противоположных направлениях (по часовой или против часовой стрелки). Аналогичный результат получен в [25], но при $n = 0$. Поскольку при $n \neq 1$ вблизи фокуса светового поля (3.1) появляются области с левой и правой круговой поляризацией (области с разным «спином»), которые пространственно разнесены, можно заключить, что вблизи фокуса (до и после него) возникает спиновый эффект Холла, хотя в самой фокальной плоскости этот эффект исчезает.

Этот эффект можно приближенно объяснить, разложив цилиндрический векторный пучок (3.1) на суперпозицию двух оптических вихрей с круговой поляризацией:

$$E_n(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e^{in\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{-in\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Оба оптических вихря имеют СУМ и ОУМ. Если $n = 1$, СУМ и ОУМ аннигилируют друг друга, а угловой момент каждого вихря равен нулю. Таким образом, оба вихря не вращаются при распространении и фокусировке, а области с положительной и с отрицательной СУМ не разделены в пространстве. Если же $n \neq 1$, то угловой момент каждого вихря отличен от нуля и, следовательно, при распространении вращаются оба пучка (Рисунок 3.2, повороты пучка), т. е. в каждом вихре имеется поперечный (азимутальный) поток энергии. Так как вихри имеют противоположные порядки n и $-n$ и их круговые поляризации также противоположны, то азимутальные потоки энергии обоих вихрей также противоположны и в поперечной плоскости они интерферируют друг с другом, порождая области с противоположным СУМ. (Рисунок 3.2, ближнее поле). Однако в самой фокальной плоскости эти поперечные потоки энергии

аннигилируют друг с другом, и СУМ в каждой точке равен нулю (Рисунок 3.2, фокальная плоскость).

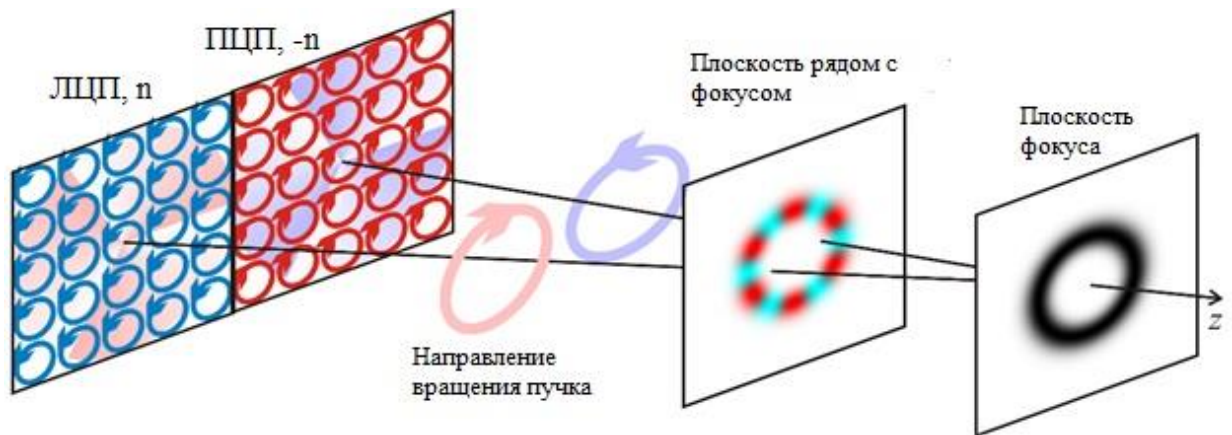


Рисунок 3.2 – Генерация оптического спинового эффекта Холла вблизи фокуса двух оптических вихрей: одного с положительным топологическим зарядом n и левой круговой поляризацией, а другого с отрицательным топологическим зарядом $-n$ и правой круговой поляризацией. За счет противоположных угловых моментов вихрей они вращаются при распространении в противоположных направлениях и их интерференция порождает вблизи фокуса световое поле с чередующимися участками положительного и отрицательного СУМ

Поперечный поток энергии до и после фокуса

Далее выведем поперечные компоненты вектора потока энергии. Вектор Умова-Пойнтинга [14]:

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}). \quad (3.10)$$

В уравнении (3.10) векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} обозначают соответственно электрическое и магнитное поля, звездочка $*$ означает комплексное сопряжение, \times - векторное произведение, c - скорость света в свободном пространстве. С этого момента постоянный множитель $c/(4\pi)$ будет опущен. Подставляя выражения (3.2) для компонент электромагнитного поля в фокусе в уравнение (3.10) получаем поперечные компоненты вектора Умова-Пойнтинга вблизи фокуса:

$$\begin{aligned}
P_x &= 2 \operatorname{Im} \left\{ -I_{0,n}^* I_{1,n-1} \sin(n\varphi) \sin((n-1)\varphi) + \right. \\
&+ I_{2,n-2}^* I_{1,n-1} \sin((n-2)\varphi) \sin((n-1)\varphi) + \\
&+ I_{1,n-1}^* I_{0,n} \cos(n\varphi) \cos((n-1)\varphi) - \\
&\left. - I_{1,n-1}^* I_{2,n-2} \cos((n-2)\varphi) \cos((n-1)\varphi) \right\}, \\
P_y &= 2 \operatorname{Im} \left\{ I_{1,n-1}^* I_{0,n} \sin(n\varphi) \cos((n-1)\varphi) + \right. \\
&+ I_{1,n-1}^* I_{2,n-2} \sin((n-2)\varphi) \cos((n-1)\varphi) + \\
&+ I_{0,n}^* I_{1,n-1} \cos(n\varphi) \sin((n-1)\varphi) + \\
&\left. + I_{2,n-2}^* I_{1,n-1} \cos((n-2)\varphi) \sin((n-1)\varphi) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Разделив действительную и мнимую части в интегралах (3.3) и используя приближение вблизи фокуса $\exp(ikz \cos \theta) \approx 1 + ikz \cos \theta$ вблизи фокуса ($kz \ll 1$), вместо уравнения (3.11) получаем:

$$\begin{aligned}
P_x &= 2kz \cos \varphi \left[R_1 (I_0 - I_2) + I_1 (R_2 - R_0) \right], \\
P_y &= 2kz \sin \varphi \left[R_1 (I_0 - I_2) + I_1 (R_2 - R_0) \right].
\end{aligned} \tag{3.12}$$

В уравнении (3.12) для вещественной и мнимой частей интегралов (3.3) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
R_0 &= I_{0,n}(z=0), \quad I_0 = \bar{I}_{0,n}, \quad R_1 = I_{1,n-1}(z=0), \\
I_1 &= \bar{I}_{1,n-1}, \quad R_2 = I_{2,n-2}(z=0), \quad I_2 = \bar{I}_{2,n-2}, \\
\bar{I}_{\nu,\mu} &= \left(\frac{4\pi f}{\lambda} \right)^{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin^{\nu+1} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-\nu} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3/2}(\theta) A(\theta) J_\mu(\xi) d\theta.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Для наглядности перейдем теперь к полярным координатам. Тогда вместо уравнения (3.12) получаем радиальную и азимутальную составляющие поперечного вектора Умова-Пойнтинга вблизи фокуса:

$$\begin{aligned}
P_r &= 2kzQ, \\
P_\varphi &= 0, \\
Q(r) &= R_1 (\bar{I}_0 - \bar{I}_2) + \bar{I}_1 (R_2 - R_0).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Радиальная и азимутальная составляющие поперечного вектора Умова-Пойнтинга описывают соответственно схождение/расхождение светового поля.

Выражение (3.14) иллюстрирует, что независимо от порядка пучка n поток энергии вблизи фокуса пучка (3.1) расходится или сходится от оптической оси по радиусу. При $z = 0$ (в фокусе) поток энергии параллелен оптической оси. До фокуса ($z < 0$) поперечный поток энергии сходится по радиусу к оптической оси, а после фокуса ($z > 0$) — расходится. Поскольку знак функции $Q(r)$ в уравнении (3.14) может изменяться на некоторых расстояниях от оптической оси, тогда на определенных окружностях с центром на оси распространения поперечный поток энергии перед фокусом расходится, а после фокуса сходится.

Покажем теперь для поля с поляризацией (3.1), что его продольная компонента вектора углового момента равна нулю вблизи фокуса, как и в исходной плоскости. Действительно, вектор углового момента света определяется выражением [89]:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2c} \operatorname{Re} \left(\mathbf{r} \times (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \right) = \frac{2\pi}{c^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{P}), \quad (3.15)$$

а его продольная составляющая (без учета несущественного постоянного множителя) равна:

$$J_z = rP_\varphi = 0. \quad (3.16)$$

Выражение (3.16) следует из уравнения (3.14), так как $P_\varphi = 0$. Момент количества движения (3.15) можно представить [90] как сумму спинового момента \mathbf{S} и орбитального момента \mathbf{L} :

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L} = \frac{1}{8\pi\omega} \operatorname{Im} (\mathbf{E}^* \times \nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{8\pi\omega} \sum_{p=x,y,z} \operatorname{Im} (E_p^* (\mathbf{r} \times \nabla) E_p). \quad (3.17)$$

Без постоянного множителя $1/(8\pi\omega)$ продольная составляющая СУМ, как следует из (3.7), равно $S_z \approx 2kz \sin(2(n-1)\varphi)(I_0 R_2 - I_2 R_0)$. Продольный компонент ОУМ из уравнения (3.17) определяется как:

$$L_z = \operatorname{Im} \left[E_x^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_x + E_y^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_y + E_z^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z \right]. \quad (3.18)$$

Подставляя выражения (3.2) для компонент электрического поля в уравнение (3.18), имеем вблизи фокуса:

$$L_z \approx -2kz \sin(2(n-1)\varphi)(I_0 R_2 - I_2 R_0). \quad (3.19)$$

Суммирование уравнений (3.19) и (3.7) доказывает справедливость выражения (3.16). Таким образом, вблизи фокуса продольная компонента СУМ и ОУМ равны по величине и направлены в противоположные стороны ($S_z = -L_z$), а значит, продольная составляющая момента импульса равна нулю. Интересно, что при прохождении через фокус продольная компонента ОУМ (3.19) меняет знак, как и продольная компонента СУМ (3.7).

Таким образом, поскольку поперечный поток энергии вблизи фокуса не вращается ($P_\varphi = 0$), то продольная составляющая момента импульса равна нулю, но это не означает, что вблизи фокуса поля (3.1) продольная составляющая ОУМ также равен нулю. Поле с поляризацией (3.1) в фокусе имеет продольную составляющую ОУМ, по абсолютной величине равную продольной составляющей СУМ, но противоположного знака. Отметим также, что полные (усредненные по всему сечению луча) СУМ и ОУМ являются величинами, сохраняющимися по отдельности при распространении света в свободном пространстве [91], так что вблизи фокуса поля (3.1) два интеграла должны быть равны нулю:

$$\int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\varphi S_z(r, \varphi, z) = 0, \quad \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\varphi L_z(r, \varphi, z) = 0. \quad (3.20)$$

Это означает, что локальное вращение вектора поляризации вблизи фокуса (3.7) должно менять знаки в разных участках поперечного сечения так, чтобы оно компенсировало это вращение и чтобы полный СУМ и ОУМ пучка (3.1) был равен нулю (3.20), так как он в начальной плоскости был равен нулю.

Численное моделирование

Для подтверждения теоретических выводов мы провели численное моделирование. Для этого мы рассчитали электрическое и магнитное поля вблизи острого фокуса с помощью выражений (3.2) и проверили их, вычислив поле непосредственно с помощью двойных интегралов Дебая.

На Рисунке 3.3 представлены распределения интенсивности (столбец 1), радиальной компоненты вектора Умова-Пойнтинга (столбец 2), продольных

компонент векторов СУМ (столбец 3) и ОУМ (столбец 4) острогофокусированного гауссова пучка 3-го порядка ($n = 3$) с цилиндрической поляризацией (3.1) в двух поперечных плоскостях, одна перед фокусом (ряд 1) и одна за фокусом (ряд 2). Для расчета использовались следующие параметры: длина волны $\lambda = 532$ нм, фокусное расстояние $f = 10$ мкм, числовая апертура $\theta_0 = 0.49\pi$ ($NA = 0,999$), площадь расчета 4×4 мкм, продольная координата (относительно фокальной плоскости) $z = -\lambda$ (строка 1) и $z = +\lambda$ (строка 2). Для задания входного поля в форме гауссова пучка радиальное распределение комплексной амплитуды было равно $A(\theta) = \exp[-(\sin \theta / \sin \alpha_0)^2]$ при $\alpha_0 = \pi/3$. На Рисунке 3.4 показаны те же распределения и те же параметры, что и на Рисунке 3.3, но для другого порядка поляризации $n = 4$.

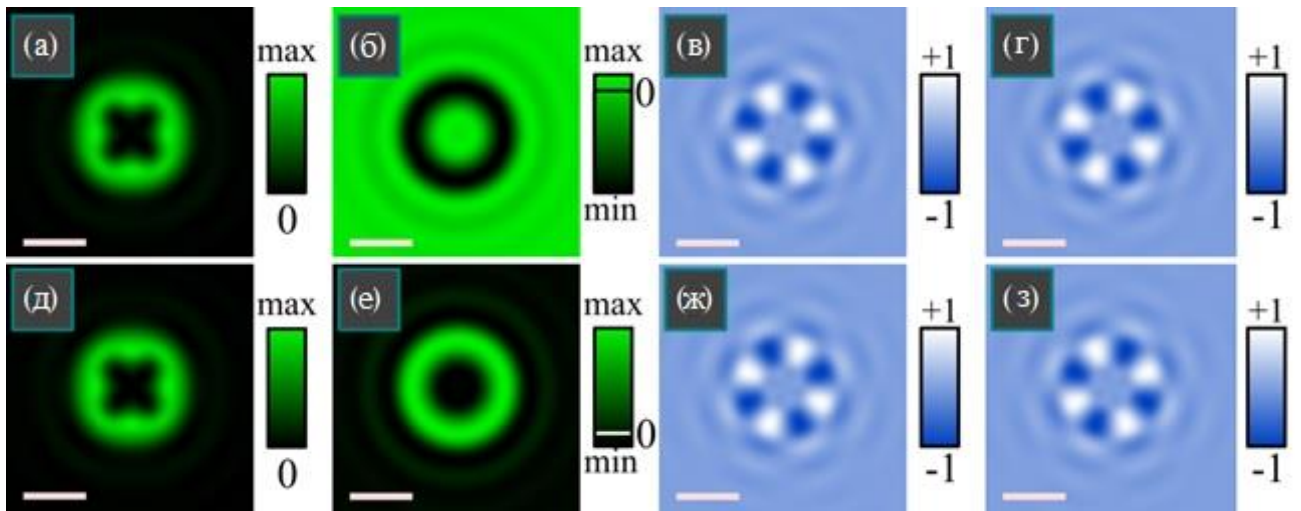


Рисунок 3.3 – Распределения интенсивности (столбец 1), радиальной составляющей вектора Умова-Пойнтинга (столбец 2), нормированной на максимум продольной составляющей вектора СУМ (столбец 3) и нормированной на максимум продольной составляющей вектора ОУМ (столбец 4) острогофокусированного гауссова пучка с цилиндрической поляризацией 3-го порядка до фокуса (строка 1) и после фокуса (строка 2). На всех рисунках светлый и черный цвета означают соответственно максимум и минимум. Метки шкалы (в нижнем левом углу) обозначают 1 мкм

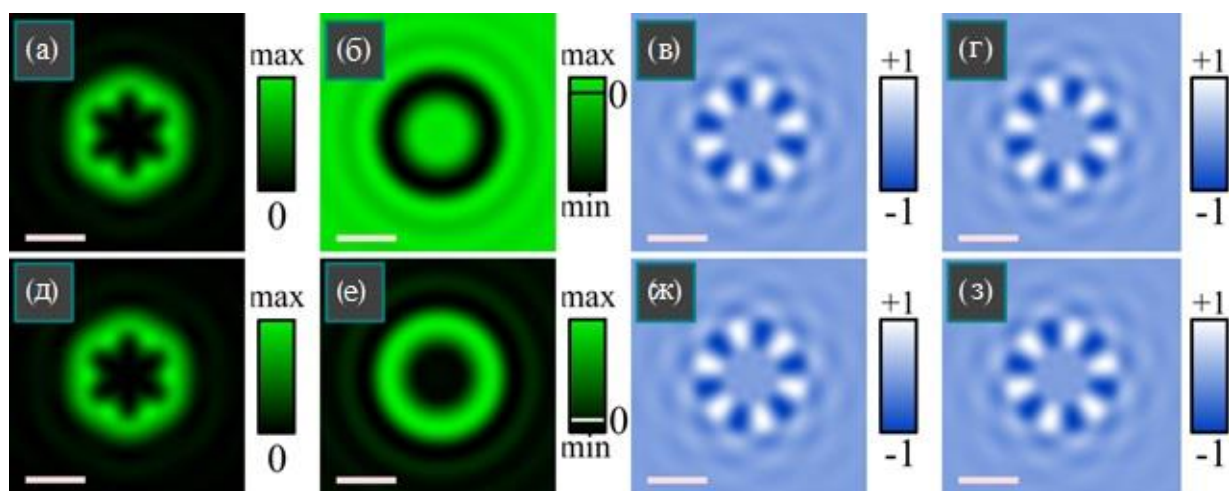


Рисунок 3.4 – Распределения интенсивности (столбец 1), радиальной составляющей вектора Умова-Пойнтинга (столбец 2), нормированной на максимум продольной составляющей вектора СУМ (столбец 3) и нормированной на максимум продольной составляющей вектора ОУМ (столбец 4) остро сфокусированного гауссова пучка с цилиндрической поляризацией 4-го порядка до фокуса (строка 1) и после фокуса (строка 2). На всех рисунках светлый и черный цвета означают соответственно максимум и минимум. Метки шкалы (в нижнем левом углу) обозначают 1 мкм

Несмотря на визуальное сходство распределений СУМ и ОУМ (столбцы 3 и 4 на Рисунке 3.3 и 3.4), они вычислялись совершенно по-разному: распределения СУМ вычислялись по уравнению (3.5), тогда как распределения ОУМ были рассчитаны по уравнению (3.18) с численным дифференцированием по угловой координате φ . Тем не менее, полученные картины подтверждают, что ОУМ L_z и СУМ S_z компенсируют друг друга, и что после прохождения фокальной плоскости вращение вектора поляризации меняет свое направление (т.е. продольная компонента СУМ меняет знак).

Рисунки 3.3 и 3.4 также подтверждают наличие вблизи фокуса $4(n-1)$ областей с разным направлением вращения вектора поляризации. Рисунок 3.3 содержит $4(n-1) = 8$ локальных субволновых областей с эллиптической поляризацией (столбец 3), в том числе 4 темных области с левой эллиптической поляризацией и 4 светлых области с правой эллиптической поляризацией. На Рисунке 3.4 имеется $4(n-1) = 12$ таких субволновых областей. Таким образом,

моделирование подтверждает, что вблизи фокуса области с разным «спином» пространственно разделены, а значит, имеет место эффект Холла [92, 93, 94].

3.2 Острая фокусировка осевой суперпозиции цилиндрического векторного пучка высокого порядка и пучка с линейной поляризацией.

Цилиндрические векторные пучки, в том числе высоких порядков хорошо известны [95, 76]. Они представляют собой пример неоднородно поляризованных пучков света, в сечении которых локальный вектор линейной поляризации меняет свое направление от точки к точке. Цилиндрические пучки первого порядка называют пучками с радиальной и азимутальной поляризациями [95]. Такие пучки можно, например, формировать с помощью двух повернутых относительно друг друга полуволновых пластин [95], многосекторного поляризатора [52], метаповерхности [96], четверть-волновых пластинок [97] и модулятора света [79]. Цилиндрические векторные пучки применяются в микроманипулировании частицами [98], микроскопии [99], квантовой информатике [100, 101].

У цилиндрических векторных пучков любого порядка нет спинового углового момента и третья компонента вектора Стокса равна нулю. Это означает, что и в начальной плоскости, и в плоскости фокуса поляризация локально линейная. Недавно было показано, что если рассмотреть в начальной плоскости цилиндрические векторные пучки дробного порядка, то в фокусе возникают локальные субволновые области с круговой и эллиптической поляризацией [80]. В лазерных пучках известен оптический эффект спин-орбитальной конверсии, когда при острой фокусировке обычного гауссова пучка с круговой поляризацией формируется поперечный вихревой поток энергии. То есть у такого пучка в фокусе появляется орбитальный угловой момент [16]. Но объяснить возникновения локального углового спинового момента в фокусе цилиндрических векторных пучков дробного порядка [80] не получается, так как в начальной плоскости у такого пучка нет углового спинового момента. Еще один недостаток работы [80] в том, что затруднительно применить аналитическую теорию Ричардса-Вольфа [14] для описания электромагнитного поля в остром фокусе из-за дробного порядка пучка. В [74] рассмотрена модификация цилиндрического векторного поля с помощью формирования суперпозиции такого поля с полем с

однородной линейной поляризацией. Но в [74] не рассмотрена острая фокусировка такой суперпозиции.

В данном разделе теоретически и численно, с помощью применения подхода Ричардса-Вольфа [14], рассчитаны все шесть проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей в остром фокусе начального поля в виде суперпозиции цилиндрического векторного поля и однородного поля с линейной поляризацией. Рассчитаны в фокусе потоки энергии (проекции вектора Пуанкаре), распределения интенсивности и компоненты Стокса. Показано, что в фокусе такого пучка при нечетном целом порядке формируются локальные поперечные вихревые потоки энергии и субволновые области с эллиптической и круговой поляризацией.

Проекции векторов напряженности электрического и магнитного полей в фокусе

Рассмотрим начальное световое поле с неоднородной поляризацией, вектора Джонса электрического и магнитного полей которого имеют вид:

$$\begin{aligned} E_m(\varphi, a) &= \begin{pmatrix} \cos m\varphi - a \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ H_m(\varphi, a) &= \begin{pmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi - a \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где (r, φ) полярные координаты в сечении пучка в начальной плоскости, a – действительное число. Световое поле (3.21) было рассмотрено в [74]. Было показано, что поле (3.21) имеет индекс поляризационной сингулярности η Пуанкаре-Хопфа [45], равный $\eta = m$, при $|a| < 1$, $\eta = m/2$, при $|a| = 1$, и равный 0, при $|a| > 1$. Световое поле (3.21) является осевой суперпозицией двух хорошо известных световых полей: цилиндрического векторного поля m -го порядка и светового поля с линейной поляризацией, направленной вдоль горизонтальной оси. Действительное число a выступает в роли параметра, от которого зависит не только величина индекса поляризационной сингулярности поля (3.21), но и распределение интенсивности, потока энергии и плотности спин углового момента (СУМ) в остром фокусе поля (3.21).

При $a = 0$ поле (3.21) является хорошо известным цилиндрическим векторным пучком (ЦВП) высокого порядка [2, 16]. Пучок (3.21) при $a = 0$ имеет неоднородную поляризацию и в каждой точке в сечении пучка поляризация локально линейная. У ЦВП в фокусе при любом m поляризация в каждой точке также линейная. Цель данного раздела показать, что при $a \neq 0$ в фокусе поля (3.21) формируются локальные области, в которых имеет место поперечный поток энергии (энергия циркулирует по замкнутому контуру) и продольная проекция вектора СУМ отлична от нуля, то есть имеет место эллиптическая и круговая поляризации.

Используя формализм Ричардса-Вольфа [14], можно получить явные выражения для всех проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей в плоскости острого фокуса светового поля (3.21):

$$\begin{aligned}
 E_x(r, \varphi) &= i^{m-1} \left(\cos(m\varphi) I_{0,m} + \cos((m-2)\varphi) I_{2,m-2} \right) + \\
 &\quad + ia \left(I_{0,0} + \cos(2\varphi) I_{2,2} \right), \\
 E_y(r, \varphi) &= i^{m-1} \left(\sin(m\varphi) I_{0,m} - \sin((m-2)\varphi) I_{2,m-2} \right) + \\
 &\quad + ia \sin(2\varphi) I_{2,2}, \\
 E_z(r, \varphi) &= 2i^m \cos((m-1)\varphi) I_{1,m-1} + 2a \cos \varphi I_{1,1}, \\
 H_x(r, \varphi) &= -i^{m-1} \left(\sin(m\varphi) I_{0,m} + \sin((m-2)\varphi) I_{2,m-2} \right) + \\
 &\quad + ia \sin(2\varphi) I_{2,2}, \\
 H_y(r, \varphi) &= -i^{m-1} \left(-\cos(m\varphi) I_{0,m} + \cos((m-2)\varphi) I_{2,m-2} \right) + \\
 &\quad + ia \left(I_{0,0} - \cos(2\varphi) I_{2,2} \right), \\
 H_z(r, \varphi) &= -2i^m \sin((m-1)\varphi) I_{1,m-1} + 2a \sin \varphi I_{1,1}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

В (3.22) функции $I_{\nu,\mu}$ зависят только от радиальной переменной r и равны выражению:

$$\begin{aligned}
 I_{\nu,\mu} &= \left(\frac{4\pi f}{\lambda} \right)^{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin^{\nu+1} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-\nu} \left(\frac{\theta}{2} \right) \times \\
 &\quad \times \cos^{1/2}(\theta) A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_{\mu}(x) d\theta,
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

где k – волновое число света, λ – длина волны света, f – фокусное расстояние идеальной сферической линзы, формирующей фокус, z – оптическая ось, при $z=0$ – плоскость фокуса, $x = kr \sin \theta$, $J_\mu(x)$ – функция Бесселя первого рода μ -го порядка, $NA = \sin \theta_0$ – числовая апертура апланатической оптической системы, $A(\theta)$ – любая действительная функция, описывающая амплитуду входного поля, обладающего осевой симметрией (плоская волна, гауссов пучок, пучок Бесселя-Гаусса). У интегралов $I_{\nu,\mu}$ (3.23) первый индекс $\nu = 0, 1, 2$ описывает тип интеграла, а второй индекс $\mu = 0, 1, 2, \dots, m$ равен порядку функции Бесселя.

Каждая проекция векторов электрического и магнитного полей (3.22) является суммой проекций векторов двух пучков: цилиндрического векторного поля m -го порядка и светового поля с линейной поляризацией. В этом легко убедиться, если вспомнить, какие проекции в фокусе имеет электромагнитное поле с линейной поляризацией, направленной вдоль горизонтальной оси [14]:

$$\begin{aligned}
 E_{Lx}(r, \varphi) &= -i(I_{0,0} + \cos(2\varphi)I_{2,2}), \\
 E_{Ly}(r, \varphi) &= -i \sin(2\varphi)I_{2,2}, \\
 E_{Lz}(r, \varphi) &= -2 \cos \varphi I_{1,1}, \\
 H_{Lx}(r, \varphi) &= -i \sin(2\varphi)I_{2,2}, \\
 H_{Ly}(r, \varphi) &= -i(I_{0,0} - \cos(2\varphi)I_{2,2}), \\
 H_{Lz}(r, \varphi) &= -2a \sin \varphi I_{1,1}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Распределение интенсивности в фокусе

На основе полученных амплитуд проекций вектора электрического поля в фокусе (3.22) можно получить выражения для распределения интенсивности и ее составляющих по декартовым осям. Заметим, что выражения для интенсивности с четным и нечетным номерами m будут разные. Действительно из (3.22) следуют выражения для

$$I = I_x + I_y + I_z = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2 \tag{3.25}$$

$$I_x = \begin{cases} \left[a(-1)^{p+1} (I_{0,0} + \cos I_{2,2}) + \cos(m\varphi) I_{0,m} + \right. \\ \left. + \cos((m-2)\varphi) I_{2,m-2} \right]^2, m = 2p, \\ \left[a(I_{0,0} + \cos(2\varphi) I_{2,2}) \right]^2 + \\ \left. + \left[\cos(m\varphi) I_{0,m} + \cos((m-2)\varphi) I_{2,m-2} \right]^2, m = 2p+1, \right. \end{cases} \quad (3.26)$$

$$I_y = \begin{cases} \left[a(-1)^{p+1} \sin(2\varphi) I_{2,2} + \sin(m\varphi) I_{0,m} - \right. \\ \left. - \sin((m-2)\varphi) I_{2,m-2} \right]^2, m = 2p, \\ \left[a \sin(2\varphi) I_{2,2} \right]^2 + \\ \left. + \left[\sin(m\varphi) I_{0,m} - \sin((m-2)\varphi) I_{2,m-2} \right]^2, m = 2p+1, \right. \end{cases} \quad (3.27)$$

$$I_z = \begin{cases} 4 \left[a(-1)^p \cos(\varphi) I_{1,1} + \cos((m-1)\varphi) I_{1,m-1} \right]^2, m = 2p, \\ 4 \left[a \cos(\varphi) I_{1,1} \right]^2 + 4 \left[\cos((m-1)\varphi) I_{1,m-1} \right]^2, m = 2p+1. \end{cases} \quad (3.28)$$

Из (3.28) видно, что при $m = 2p = 2$ интенсивность равна простому выражению:

$$I_{2z}(r, \varphi) = 4 \cos^2(\varphi) I_{1,1}^2 (1-a)^2. \quad (3.29)$$

Из (3.29) видно, что продольная интенсивность (3.29) равна нулю при $a=1$, а при $a \neq 1$ имеет два локальных максимума на горизонтальной оси x при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$.

Запишем выражения для полной интенсивности в фокусе при $m=2p+1$, потому что, как мы увидим далее, поперечные потоки энергии и продольная проекция СУМ в фокусе возникают только для нечетных номеров m :

$$I = a^2 \left(I_{0,0}^2 + I_{2,2}^2 + 2I_{1,1}^2 + 2 \cos 2\varphi (I_{0,0} I_{2,2} + I_{1,1}^2) \right) + \\ \left(I_{0,m}^2 + I_{2,m-2}^2 + 2I_{1,m-1}^2 + 2 \cos(2(m-1)\varphi) (I_{0,m} I_{2,m-2} + I_{1,m-1}^2) \right). \quad (3.30)$$

Так как в выражении для интенсивности в (3.26) и (3.30) присутствует при любом m слагаемое $a^2 I_{0,0}^2 > 0$, в котором в интеграле (3.23) множителем является

функция Бесселя нулевого порядка, поэтому на оптической оси (при $r=0$) интенсивность будет отлична от нуля (будет локальный максимум), так как $J_0(0)=1$. Так как в выражении для интенсивности (3.30) аргументы косинусов четные, то это означает, что картина интенсивности хотя и не имеет радиальной симметрии, но имеет осевую симметрию, то есть $I(r, \varphi) = I(r, \varphi + \pi)$. Также из (3.26) видно, что интенсивность I_x будет иметь максимум на оптической оси из-за слагаемого $a^2 I_{0,0}^2$, а из (3.27) видно, что I_y будет иметь ноль на оптической оси. Также из (3.27) видно, что у картины интенсивности I_y будет $2m$ локальных максимумов, так как в выражении для I_y присутствует квадрат $\cos(m\varphi)$. В картине распределения полной интенсивности (3.30) будет $2(m-1)$ локальных максимумов (кроме максимума интенсивности на оптической оси), так как в (3.30) присутствует $\cos(2(m-1)\varphi)$. Эти выводы будут подтверждены моделированием.

Плотность потока энергии в фокусе

В этом разделе найдем выражения для трех проекций вектора Умова-Пойнтинга в плоскости фокуса светового поля (3.21). Известно [15, 88], что цилиндрическое векторное поле любого порядка и в начальной плоскости $(E_x, E_y) = (\cos(m\varphi), \sin(m\varphi))$ и в плоскости фокуса (3.22) при $a = 0$ не имеет спина и не имеет вихревых потоков энергии. То есть продольная проекция вектора СУМ равна нулю в каждой точке фокуса и продольная компонента вектора орбитального углового момента тоже равна нулю в каждой точке фокуса. Ниже мы покажем, что суперпозиция цилиндрического векторного поля и светового поля с линейной поляризацией (3.22) имеет локальный спин и вихревой поток энергии. Вектор Умова-Пойнтинга определяется выражением [14]:

$$\mathbf{P} = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \quad (3.31)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} – вектора напряженности электрического и магнитного полей, $*$ – знак комплексного сопряжения, \times – векторное умножение, c – скорость света в вакууме. В дальнейшем постоянную $c/(2\pi)$ будем игнорировать. Подставим

выражения для проекций электромагнитного поля в фокусе (3.22) в выражение (3.31) и получим:

$$P_x(r, \varphi) = \begin{cases} 2a(-1)^{(m-1)/2} \left[\cos((m-1)\varphi)(I_{1,1}I_{2,m-2} - I_{0,0}I_{1,m-1}) + \right. \\ \left. \cos((m+1)\varphi)(I_{2,2}I_{1,m-1} - I_{1,1}I_{0,m}) \right], & m = 2p + 1, \\ 0, & m = 2p, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.32)$$

$$P_y(r, \varphi) = \begin{cases} 2a(-1)^{(m-1)/2} \left[-\sin((m-1)\varphi) \times \right. \\ \left. \times (I_{1,1}I_{2,m-2} - I_{0,0}I_{1,m-1}) + \right. \\ \left. \sin((m+1)\varphi)(I_{2,2}I_{1,m-1} - I_{1,1}I_{0,m}) \right], & m = 2p + 1, \\ 0, & m = 2p, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.33)$$

$$P_z(r, \varphi) = \begin{cases} a^2 (I_{0,0}^2 - I_{2,2}^2) + (I_{0,m}^2 - I_{2,m-2}^2) + \\ + 2a(-1)^p \cos(m\varphi)(I_{2,2}I_{2,m-2} - I_{0,0}I_{0,m}), & m = 2p, \\ a^2 (I_{0,0}^2 - I_{2,2}^2) + \\ + (I_{0,m}^2 - I_{2,m-2}^2), & m = 2p + 1, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.34)$$

Из (3.34) видно, что распределение продольной компоненты вектора Умова-Пойнтинга в фокусе для нечетных номеров m обладает круговой симметрией, а при четном номере m – зависит от полярного угла и имеет m максимумов при обходе вокруг оптической оси. Из (3.32) и (3.33) видно, что поперечный поток энергии имеет место только для нечетных номеров m , и равен нулю для четных m . Чтобы более детально охарактеризовать поперечный поток энергии в фокусе перейдем к полярным проекциям вектора поперечного потока энергии. С помощью перехода от декартовых проекций вектора Умова-Пойнтинга к полярным:

$$\begin{aligned} P_r &= P_x \cos \varphi + P_y \sin \varphi, \\ P_\varphi &= -P_x \sin \varphi + P_y \cos \varphi, \end{aligned} \quad (3.35)$$

из (3.32) и (3.33) найдем поперечные компоненты вектора Умова-Пойнтинга в остром фокусе поля (3.22) в полярных координатах для нечетных номеров m (для четных номеров m эти компоненты вектора Умова-Пойнтинга равны нулю):

$$\begin{aligned}
 P_r &= 2a(-1)^p \cos(m\varphi) Q_1(r), \quad m = 2p + 1, \\
 Q_1(r) &= I_{1,m-1} (I_{2,2} + I_{0,0}) - I_{1,1} (I_{2,m-2} + I_{0,m}), \\
 P_\varphi &= 2a(-1)^p \sin(m\varphi) Q_2(r), \quad m = 2p + 1, \\
 Q_2(r) &= I_{1,m-1} (I_{2,2} - I_{0,0}) + I_{1,1} (I_{0,m} - I_{2,m-2}).
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Из (3.36) видно, что поперечный поток энергии неравномерно вращается на разных радиусах и при разном p против или по часовой стрелке. Неравномерность заключается в том, что поперечный вектор потока энергии вращается вокруг оптической оси не по касательной к некоторой окружности, а под изменяющимся углом к некоторой окружности. На окружности некоторого радиуса с центром на оптической оси имею место $(m+1)$ субволновая область, в которой поперечный поток энергии вращается по замкнутой траектории. Причем в соседних областях поток энергии вращается в разные стороны (по часовой или против часовой стрелки). Интегрирование радиального и азимутального потоков энергии в (3.36) по углу φ дает ноль, то есть суммарный поперечный поток энергии в фокусе равен нулю.

Плотность вектора Стокса в фокусе

В этом подразделе найдем проекции вектора Стокса в плоскости фокуса для начального векторного поля (3.21). Компоненты вектора Стокса \mathbf{S} вычисляются по формулам [53]:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{|E_x|^2 - |E_y|^2}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, \quad S_2 = \frac{2 \operatorname{Re}(E_x^* E_y)}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, \quad S_3 = \frac{2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y)}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, \\
 s_1 &= |E_x|^2 - |E_y|^2, \quad s_2 = 2 \operatorname{Re}(E_x^* E_y), \quad s_3 = 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y),
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

где Re и Im – знаки действительной и мнимой части числа. В (3.37) малыми буквами (s_1, s_2, s_3) обозначены ненормированные компоненты вектора Стокса. Нормированный вектор Стокса, как видно из (3.37), имеет единичную длину

$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$. Из-за громоздкости выражений, и чтобы узнать будет ли в фокусе круговая поляризация получим выражения только для третьей проекции Стокса без нормировки, то есть рассчитаем функцию вида $s_3 = 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y)$. Предварительно заметим, что третья компонента вектора Стокса пропорциональна продольной проекции вектора спинового углового момента (СУМ) [88]:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{16\pi\omega} \operatorname{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}), \quad (3.38)$$

где ω – циклическая частота света. В дальнейшем постоянную $1/(16\pi\omega)$ будем игнорировать. Из (3.38) видно, что продольная компонента СУМ (без учета константы) совпадает с ненормированной третьей компонентой вектора Стокса:

$$s_3 = S_z = 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y). \quad (3.39)$$

Подставляя проекции электрического поля (3.22) в (3.39), получим:

$$s_3 = S_z(r, \varphi) = \begin{cases} 2a(-1)^{(m-1)/2} \left[\sin((m-2)\varphi) \times \right. \\ \left. \times (I_{0,0} I_{2,m-2} - I_{2,2} I_{0,m}) - \right. \\ \left. - \sin(m\varphi) (I_{0,0} I_{0,m} - I_{2,2} I_{2,m-2}) \right], & m = 2p + 1, \\ 0, & m = 2p, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.40)$$

Из (3.40) видно, что при четном m в фокусе поля (3.21) нет областей с круговой (эллиптической) поляризацией. При нечетном m , и если $a \neq 0$, в фокусе имеется $2m$ локальных областей, в которых свет имеет эллиптическую поляризацию. Заметим, что из (3.36) видно, что при нечетном m в фокусе также имеются $2m$ локальных областей с поперечным вихревым потоком энергии. Из сравнения (3.36) и (3.40) видно, что число областей в фокусе с поперечным вихревым потоком энергии равно $2m$ и равно числу областей с эллиптической поляризацией. Причем в соседних областях направление вращения поперечного потока энергии разное, так же, как и направление вращения вектора поляризации чередуется в соседних областях. Так как в начальной плоскости у поля (3.21) нет поперечного потока энергии и нет продольного СУМ, то и в плоскости фокуса

суммарный (по всей плоскости фокуса) продольный СУМ должен быть равен нулю, и суммарный поперечный поток энергии в фокусе тоже должен быть равен нулю. Заметим, что, если проинтегрировать плотность спина (3.40), то есть продольную компоненту углового спинового момента, по всему сечению пучка в фокусе, то интегралы по углу φ дадут ноль, и полный спин пучка (3.21) в фокусе, как и в начальной плоскости, будет равен нулю:

$$ss_3 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} s_3(r, \varphi) r dr d\varphi = 0. \quad (3.41)$$

Для сравнения теории и результатов моделирования приведем выражение для s_2 только при четном номере $m=2p$, $p=0, 1, 2, \dots$:

$$s_2 = \sin(2\varphi) \left[2I_{0,m}I_{2,m-2} + a^2 I_{2,2} (I_{0,0} + \cos(2\varphi)I_{2,2}) \right] \times \\ \times \sin(2m\varphi) I_{0,m}^2 - \sin(2(m-2)\varphi) I_{2,m-2}^2, \quad m = 2p. \quad (3.42)$$

Из (3.42) видно, что, так как все аргументы косинусов и синусов четные, то распределение s_2 в фокусе будет осесимметричное. И так как максимальный аргумент в (3.42) у $\sin(2m\varphi)$ равен $2m$, то число смены знаков функции s_2 будет равно $4m$.

Численное моделирование

В этом подразделе мы приведем результаты расчета распределения интенсивности, проекций векторов Стокса (или продольной проекции СУМ), а также проекции вектора Умова-Пойнтинга в фокусе для начального светового поля (3.21). Расчет производился с помощью общих формул Ричардса-Вольфа [14], которые описывают свет в области фокуса:

$$\mathbf{U}(\rho, \psi, z) = -\frac{if}{\lambda} \int_0^{\alpha_{\max}} \int_0^{2\pi} B(\theta, \varphi) T(\theta) \mathbf{P}(\theta, \varphi) \times \\ \times \exp\{ik[\rho \sin \theta \cos(\varphi - \psi) + z \cos \theta]\} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (3.43)$$

где $\mathbf{U}(\rho, \psi, z)$ – напряжённость электрического или магнитного поля, $B(\theta, \varphi)$ – электрическое или магнитное поле на входе широкоапертурной оптической системы в координатах выходного зрачка (θ – полярный угол, φ – азимутальный), $T(\theta)$ – функция аподизации линзы, f – фокусное расстояние, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое

число, λ – длина волны, α – максимальный полярный угол, определяемый числовой апертурой линзы ($NA = \sin\alpha$), $\mathbf{P}(\theta, \varphi)$ – матрица поляризации. Интеграл (3.43) позволяет вычислять распределение компонент электромагнитного поля в координатах выходного зрачка (Рисунок 3.5).

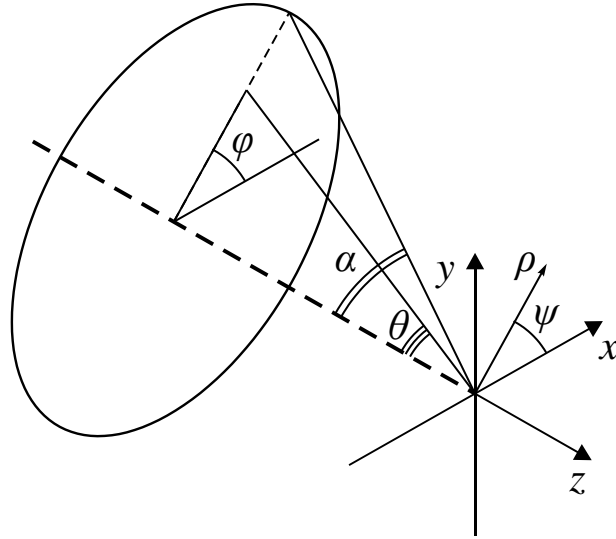


Рисунок 3.5 – Геометрия рассматриваемой задачи

Матрица поляризации $\mathbf{P}(\theta, \varphi)$ для напряжённости электрического и магнитного полей имеет вид [102]:

$$\mathbf{P}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos \theta & \sin \varphi \cos \varphi (\cos \theta - 1) & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \varphi (\cos \theta - 1) & \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \\ c(\theta, \varphi) \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

где $a(\theta, \varphi)$, $b(\theta, \varphi)$ и $c(\theta, \varphi)$ – функции поляризации для x -, y - и z -компонент падающего поля. Например, для света, линейно-поляризованного вдоль оси x компоненты, будут равны $a = 1$, $b = 0$ и $c = 0$. Для всех рассмотренных в этом разделе примеров продольная компонента фокусируемого поля считалась нулевой: $c = 0$ (начальная плоскость), тогда:

$$\mathbf{P}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 + \cos^2 \varphi (\cos \theta - 1) \\ \sin \varphi \cos \varphi (\cos \theta - 1) \\ -\sin \theta \cos \varphi \end{bmatrix} a(\theta, \varphi) + \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \varphi (\cos \theta - 1) \\ 1 + \sin^2 \varphi (\cos \theta - 1) \\ -\sin \theta \sin \varphi \end{bmatrix} b(\theta, \varphi), \quad (3.45)$$

Для начального поля (3.21) функции поляризации будут иметь вид:

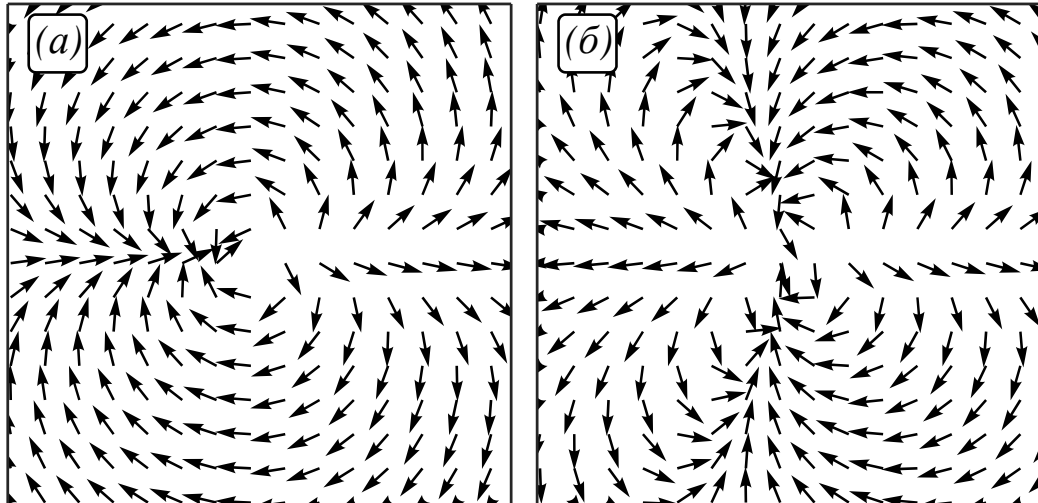
$$E(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(m\varphi) - a \\ \sin(m\varphi) \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

для напряжённости электрического поля и

$$H(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) - a \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Распределение векторов линейной поляризации в начальной плоскости

В начальной плоскости распределение линейных векторов по сечению пучка будет зависеть от номера m и параметра a [74]. На Рисунке 3.6 показаны распределения векторов линейной поляризации в сечении поля (3.21) при $m = 2$ (а,в,д) и $m = 3$ (б,г,е), и при $a = 1/2$ (а,б), $a = 3/2$ (в,г), $a = 1$ (д,е).



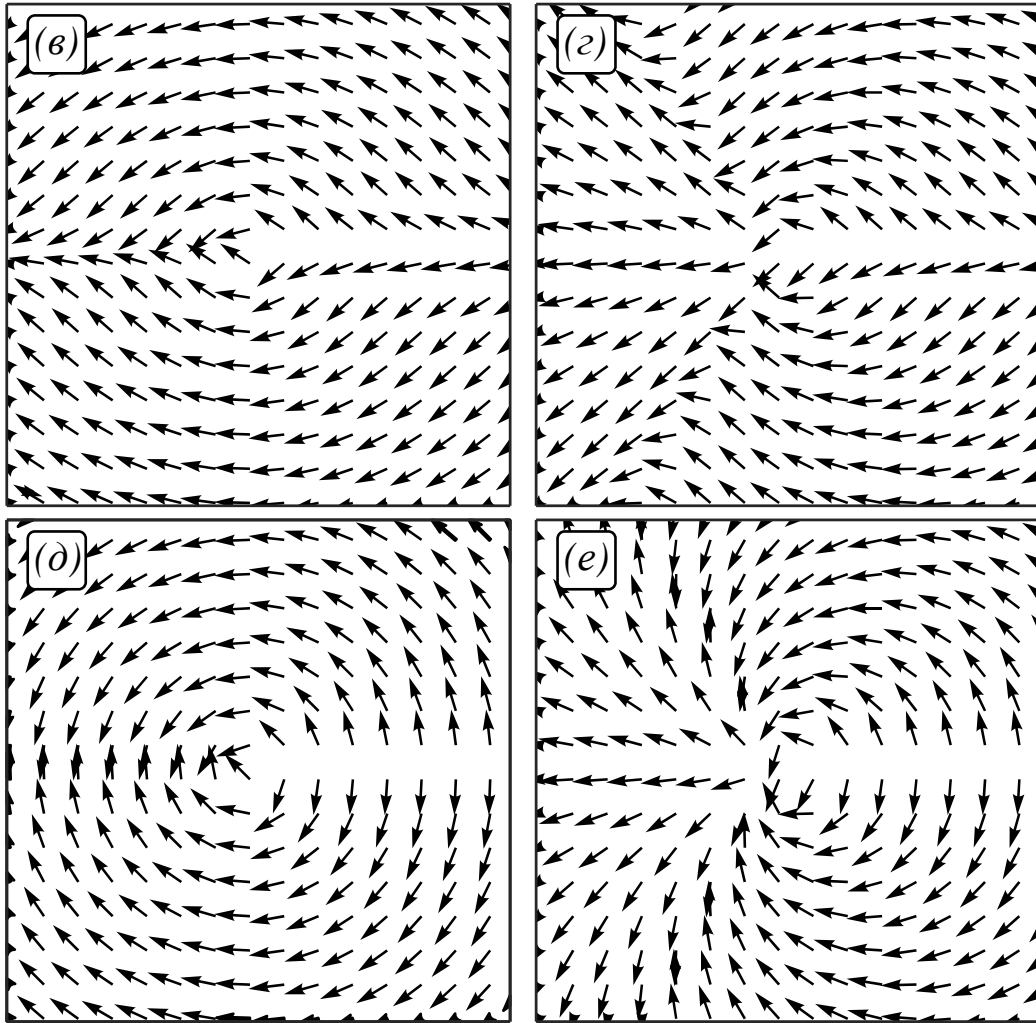


Рисунок 3.6 – Распределения векторов линейной поляризации в сечении поля (3.21) при $m = 2$ (а,в,д) и $m = 3$ (б,г,е), и при $a = 1/2$ (а,б), $a = 3/2$ (в,г), $a = 1$ (д,е)

В [74] показано, что при $a < 1$ индекс поляризационной сингулярности (число поворотов вектора линейной поляризации на 2π при обходе по замкнутому контуру вокруг оптической оси – вокруг точки сингулярности) равен m , то есть равен 2 (а) и 3 (б) на Рисунке 3.6. При $a = 1$ индекс поляризационной сингулярности равен $m/2$, так как в поле (3.21) при этом имеются только линии сингулярности (Рисунок 3.6д,е) и вектора линейной поляризации поворачиваются от линии до линии на угол π . Поэтому индекс равен 1(д) и $3/2$ (е) на Рисунке 3.6. При $a > 1$ индекс поляризационной сингулярности поля (3.1) равен нулю (Рисунок 3.6в,г).

Распределение интенсивности в плоскости фокуса

Расчет интенсивности в фокусе для поля (3.21) проводился по формулам Ричардса-Вольфа (3.43)-(3.47) для длины волны 633 нм и числовой апертуры $NA = 0,95$. Рассчитывалось распределение интенсивности и ее составляющих для векторного пучка (3.21) второго ($m = 2$) (Рисунок 3.7-3.9) и третьего ($m = 3$) (Рисунок 3.10-3.12) порядков. Параметр a пучка (3.21) выбирался равным 1 (Рисунок 3.7, 3.10), $1/2$ (Рисунок 3.8, 3.11) и $3/2$ (Рисунок 3.9, 3.12).

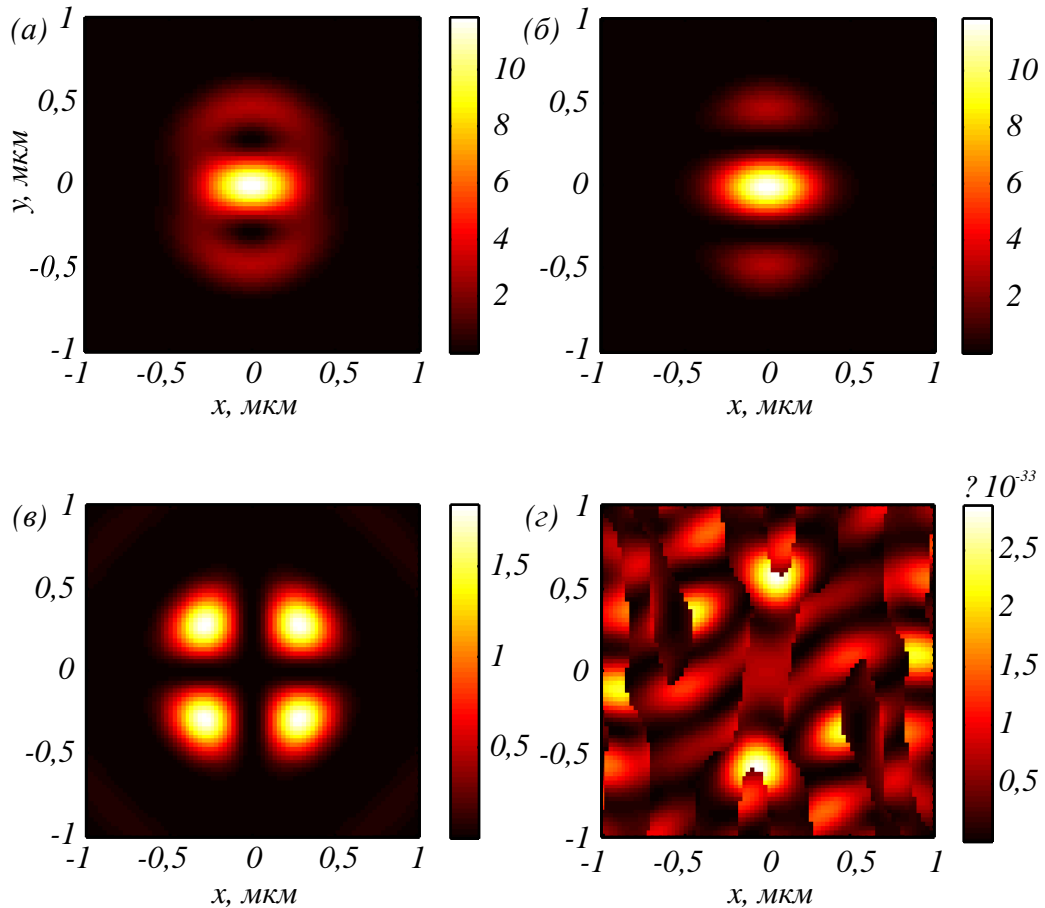
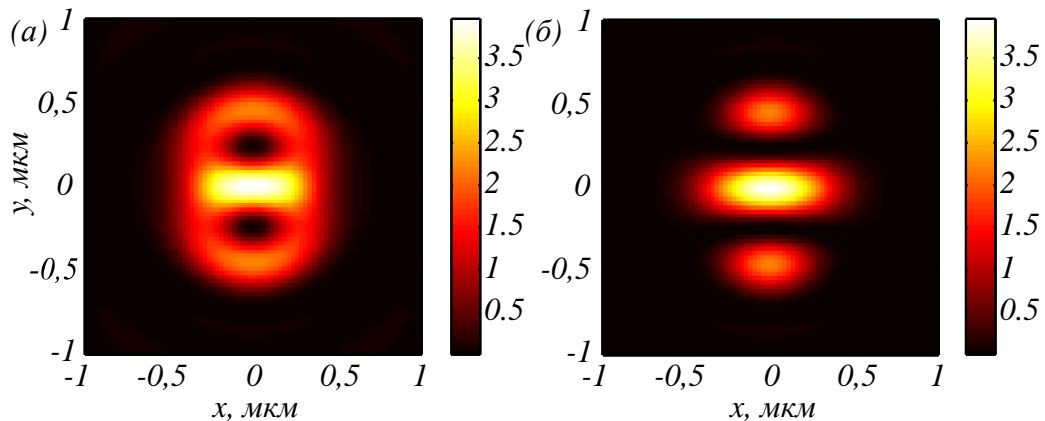


Рисунок 3.7 – Интенсивность I (а) и ее составляющие I_x (б), I_y (в), I_z (г) при фокусировке векторного поля (3.21) второго ($m = 2$) порядка при $a = 1$



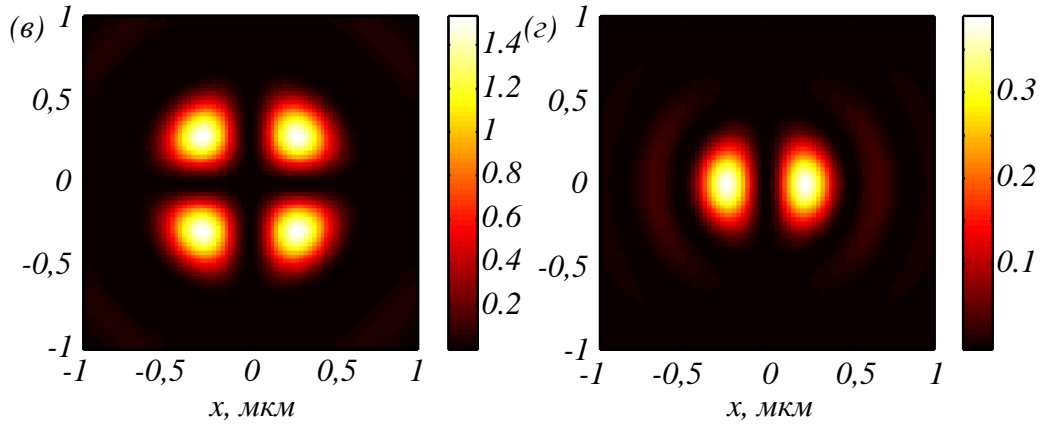


Рисунок 3.8 – Интенсивность I (а) и ее составляющие I_x (б), I_y (в), I_z (г) при фокусировке векторного поля (3.21) второго ($m = 2$) порядка при $a = \frac{1}{2}$

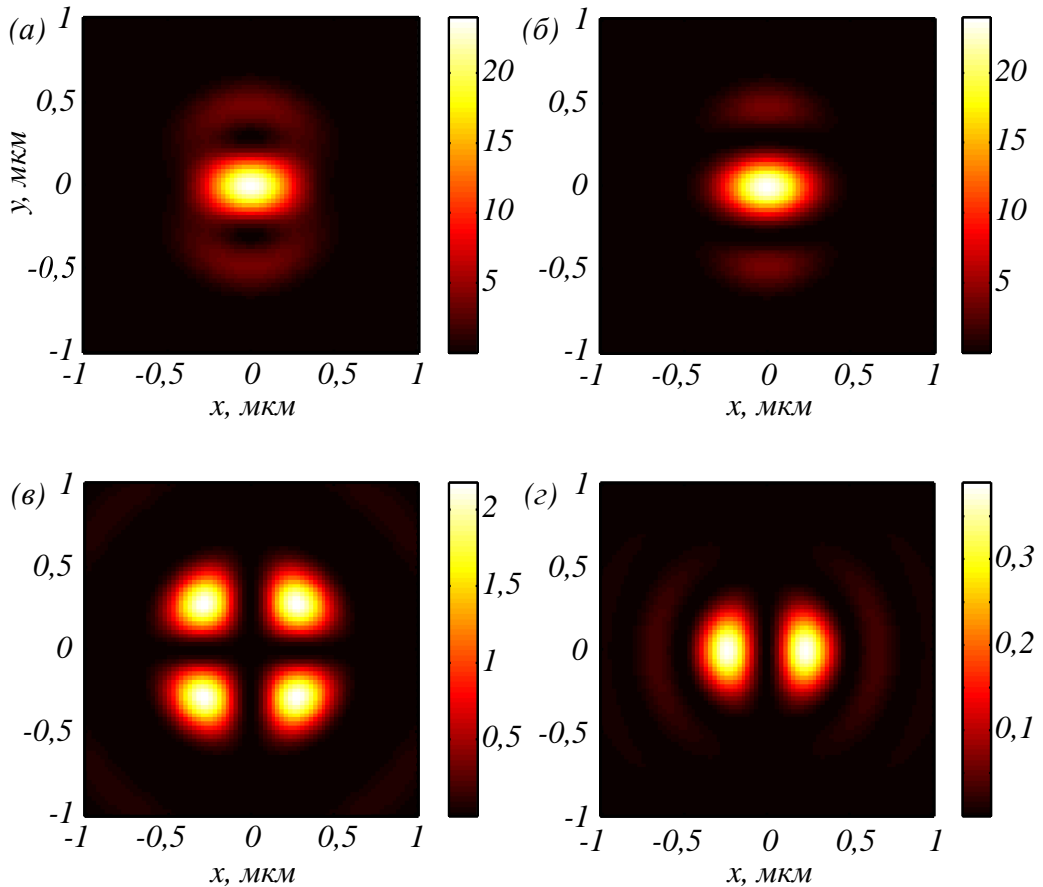
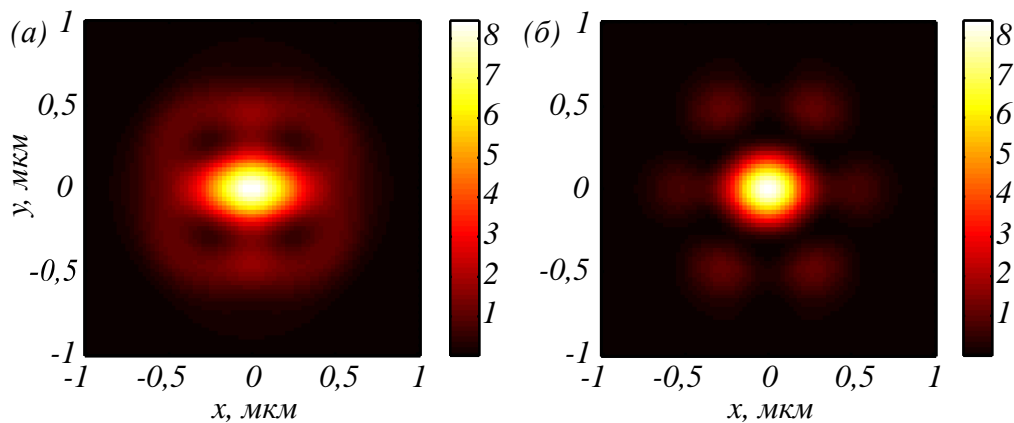


Рисунок 3.9 – Интенсивность I (а) и ее составляющие I_x (б), I_y (в) I_z (г) при фокусировке векторного поля (3.21) второго ($m = 2$) порядка при $a = \frac{3}{2}$

Из Рисунков 3.7а-3.9а видно, что при любом $a > 0$ в центре фокуса вблизи оптической оси имеется фокусное пятно эллиптической формы, вытянутое вдоль оси x . Максимум интенсивности на оптической оси следует из формул (3.27)-(3.30). Разница между распределениями интенсивности на Рисунках 3.7а-3.9а

только в величине центрального и двух боковых лепестков. При $a > 1$ боковые лепестки малы и почти вся интенсивность идет в центральное эллиптическое пятно. При $a = 1$ энергия боковых лепестков увеличивается, и при $a < 1$ энергия двух боковых лепестков, максимумы интенсивности которых лежат на вертикальной оси y , сравнима с интенсивностью центрального фокусного пятна. Особенностью распределения интенсивности на Рисунке 3.7-3.9 является то, что при $a = 1$ нет продольной составляющей. Этот уникальный случай имеет место только при $m = 2$ и $a = 1$, и описывается формулой (3.29). Рисунки 3.7г-3.9г подтверждают формулу (3.28), согласно которой продольная интенсивность I_z при $a \neq 1$ имеет два локальных максимума интенсивности на горизонтальной оси при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. На Рисунках 3.7в-3.9в при любом a имеют место 4 локальных максимума, что согласуется с формулой (3.27), так как таких максимумов у I_y должно быть $2m$. На Рисунках 3.10-3.12 показаны распределения интенсивности, аналогичные показанным на Рисунках 3.7-3.9, только для нечетного $m=3$.



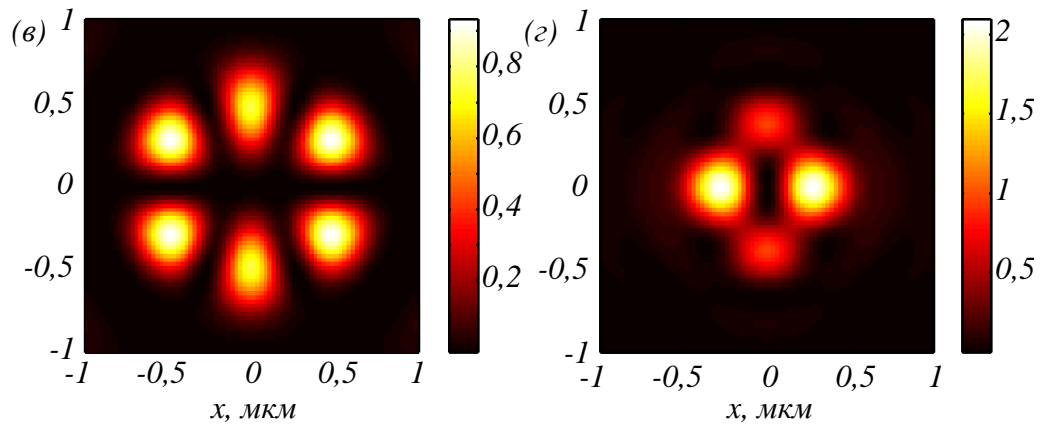


Рисунок 3.10 – Интенсивность I (а) и ее составляющие I_x (б), I_y (в), I_z (г) при фокусировке векторного поля (3.21) третьего ($m = 3$) порядка при $a = 1$

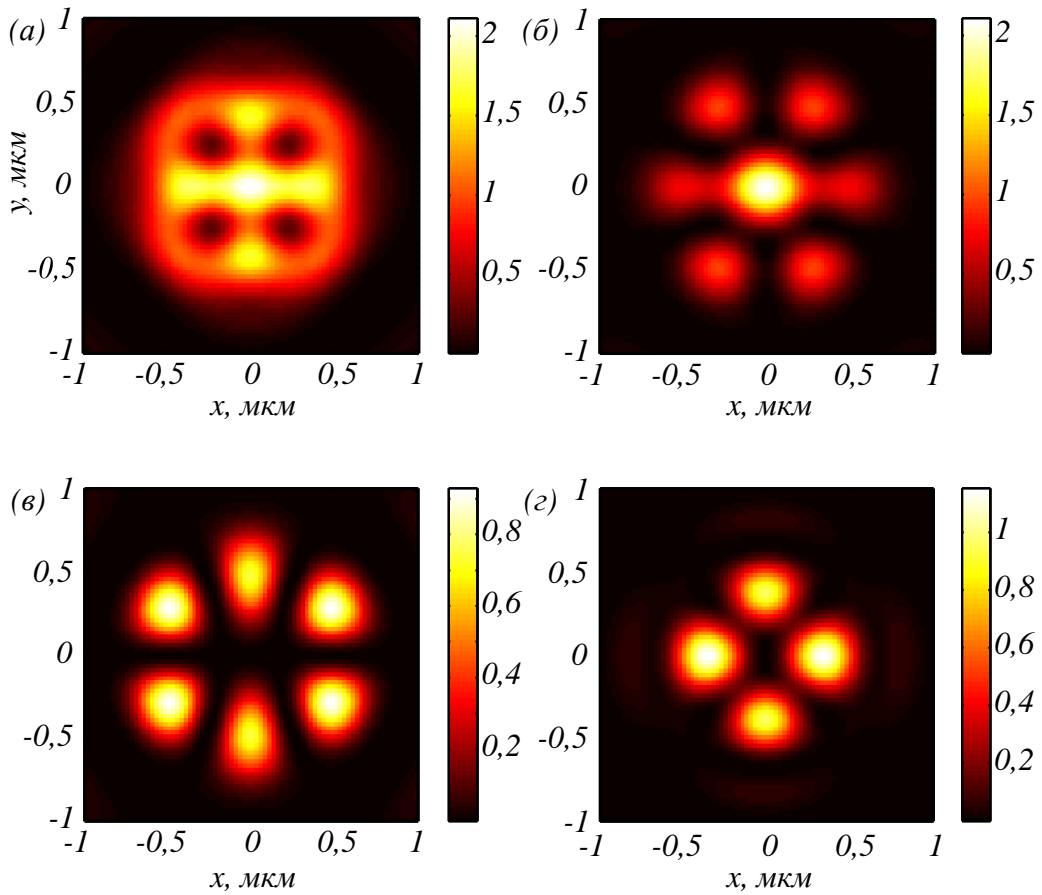


Рисунок 3.11 – Интенсивность I (а) и ее составляющие I_x (б), I_y (в), I_z (г) при фокусировке векторного поля (3.21) третьего ($m = 3$) порядка при $a = 1/2$

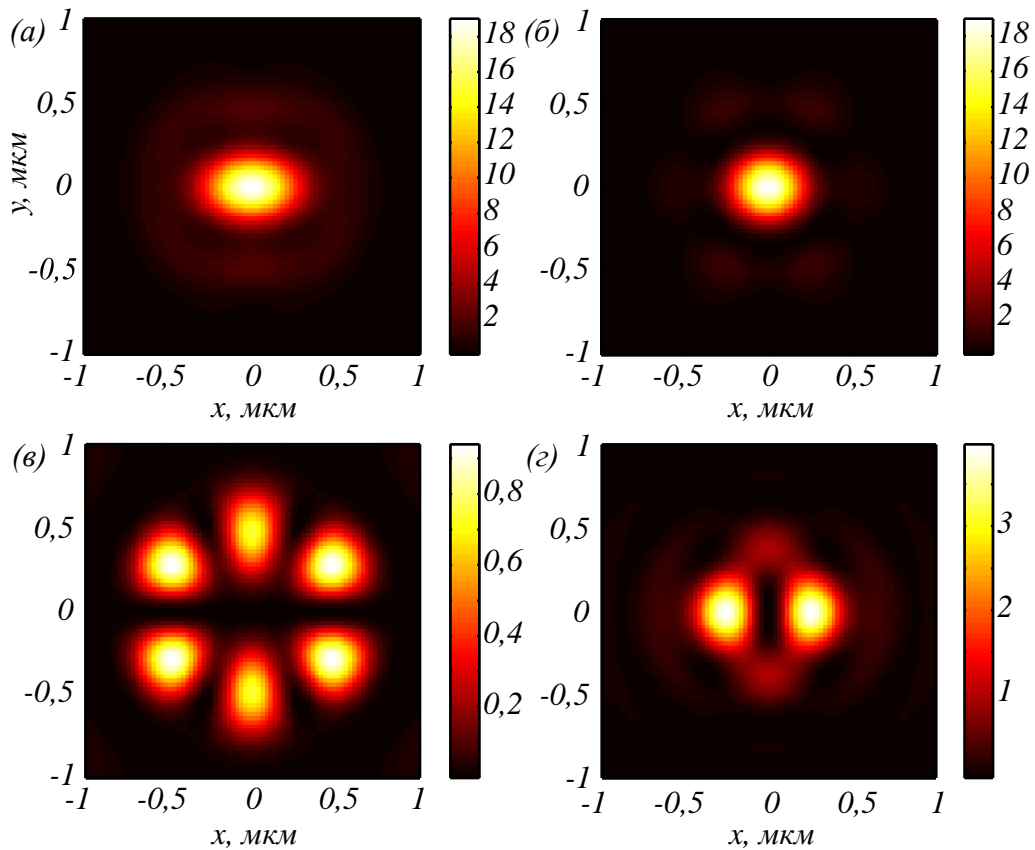


Рисунок 3.12 – Интенсивность I (а) и ее составляющие I_x (б), I_y (в), I_z (г) при фокусировке векторного поля (3.21) третьего ($m = 3$) порядка при $a = 3/2$

Из Рисунков 3.10а-3.12а видно, что в центре картины интенсивности вблизи оптической оси имеет место фокусное эллиптическое пятно с боковыми лепестками, число которых, согласно формуле (3.30), равно $2(m - 1) = 4$. Эти лепестки отчетливо видны на Рисунке 3.11а, когда параметр $a < 1$ и почти не видны на Рисунке 3.12а, когда $a > 1$. Рисунки 3.10г-3.12г подтверждают формулу (3.28), согласно которой продольная интенсивность I_z при любом a имеет 4 локальных максимума интенсивности, два из которых на горизонтальной оси x больше по величине, чем два максимума на вертикальной оси y . На Рисунках 3.10в-3.12в при любом a имеют место шесть локальных максимумов, что согласуется с формулой (3.27), так как таких максимумов у I_y должно быть $2m$.

Распределение проекций вектора Стокса в плоскости фокуса

Из (3.40) видно, что при четном m третья проекция вектора Стокса равна нулю, то есть в фокусе в каждой точке поляризация линейная. На Рисунке 3.13

показаны проекции ненормированного вектора Стокса s_1 и s_2 ($s_3 = 0$) для четных номеров $m = 2$ (а, б) и $m = 4$ (в, г).

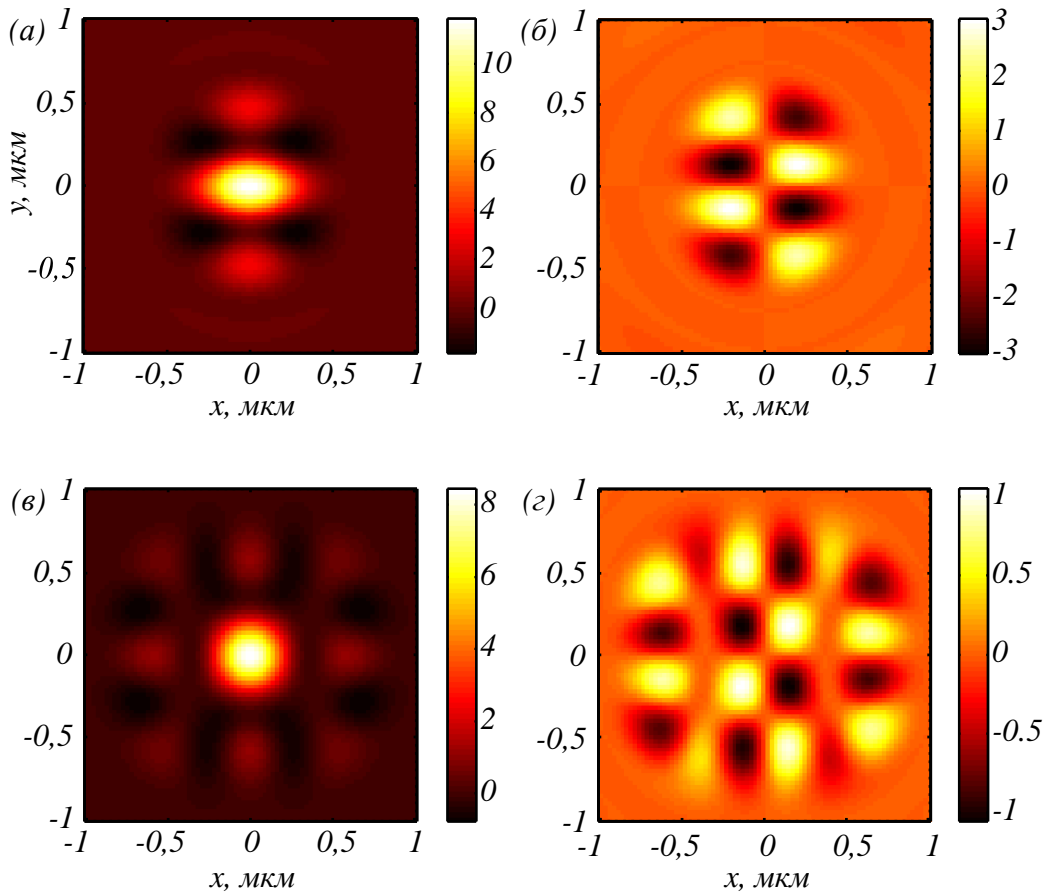


Рисунок 3.13 – Компоненты вектора Стокса s_1 (а, в) и s_2 (б, г) при фокусировке векторного поля (3.21) второго ($m = 2$) (а, б) и четвертого ($m = 4$) (в, г) порядков при $a = 1$

Из Рисунка 3.13а видно, что картина распределения s_1 почти совпадает с I_x (Рисунок 3.8б). Это происходит потому, что $s_1 = I_x - I_y$ и $I_x \gg I_y$.

Третья проекция вектора Стокса в фокусе отлична от нуля только при нечетном номере m . На Рисунке 3.14 показаны три проекции ненормированного вектора Стокса в фокусе для поля (3.21) при $m = 3$ при $a = 1$.

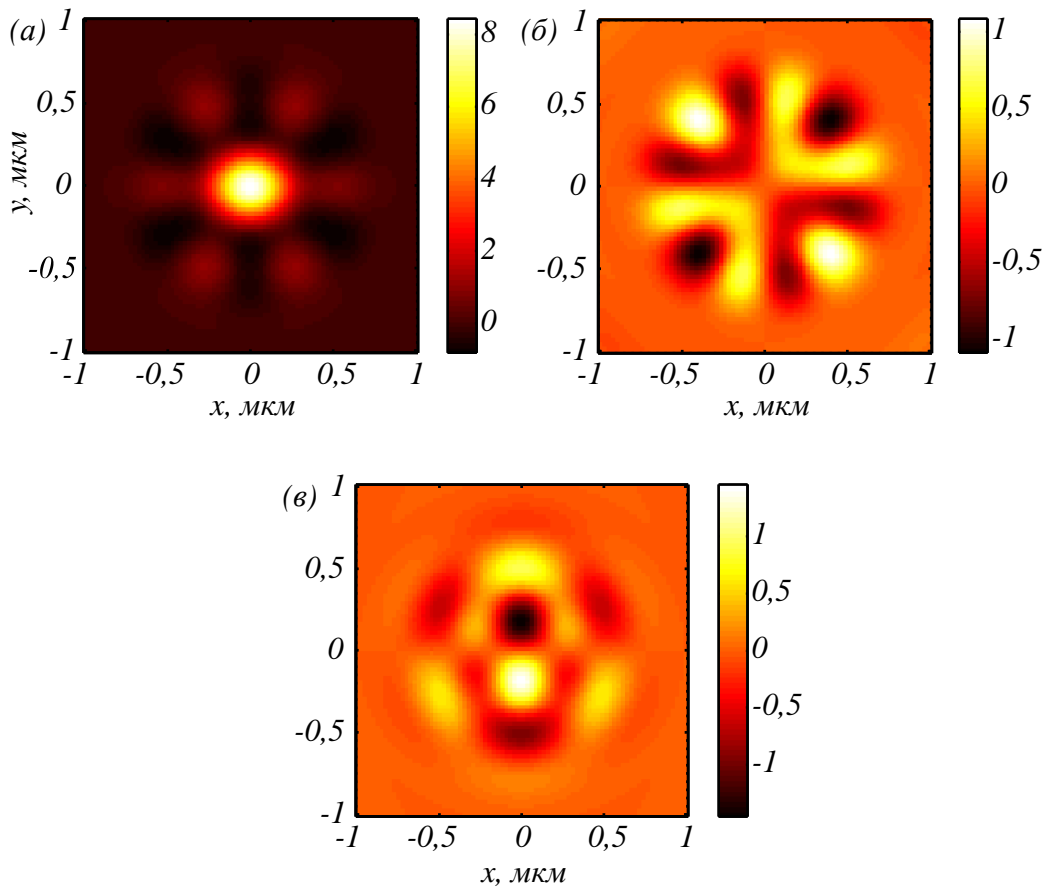


Рисунок 3.14 – Компоненты вектора Стокса s_1 (а), s_2 (б) и s_3 (в) при фокусировке векторного поля (3.21) третьего ($m = 3$) порядка при $a = 1$

Из Рисунка 3.14а видно, что картина распределения s_1 почти совпадает с I_x (Рисунок 3.11б). Это происходит потому, что $s_1 = I_x - I_y$ и $I_x > I_y$. Из Рисунка 3.14в видно, что на окружностях некоторых радиусов с центром на оптической оси третья проекция вектора Стокса s_3 сменяет знак $2m = 6$ раз. Это согласуется с формулой (3.40), в которую входит $\sin(m\varphi)$ и который меняет знак $2m$ раз за оборот. А вторая проекция Стокса меняет знак при обходе по замкнутой траектории вокруг оптической оси $4m$ раз: 8 (Рисунок 3.13б), 16 (Рисунок 3.13г) и 12 (Рисунок 3.14б). Это согласуется с формулой (3.42), в которой слагаемое с максимальным аргументом имеет множитель $\sin(2m\varphi)$.

Для сравнения на Рисунке 3.15 показаны вторая s_2 (а,в) и третья s_3 (б,г) компоненты вектора Стокса в фокусе для векторного поля (3.21) для других нечетных номеров m : 1 (а,б) и 5 (в,г).

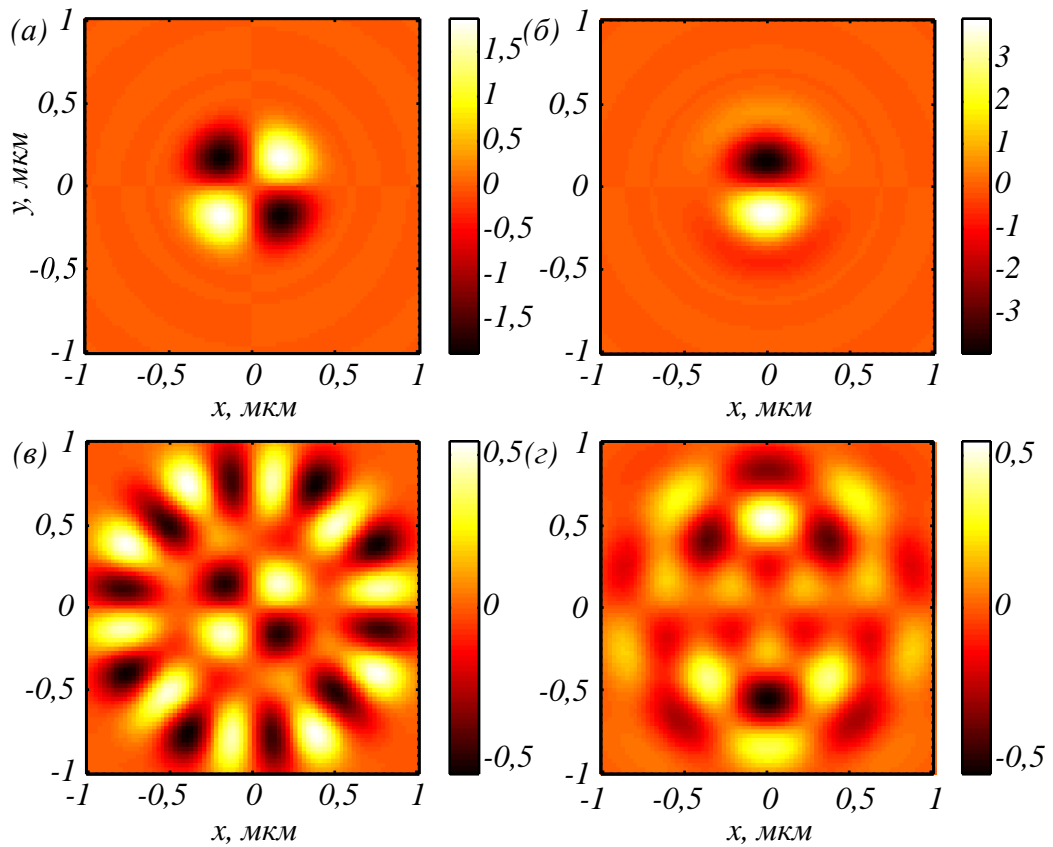
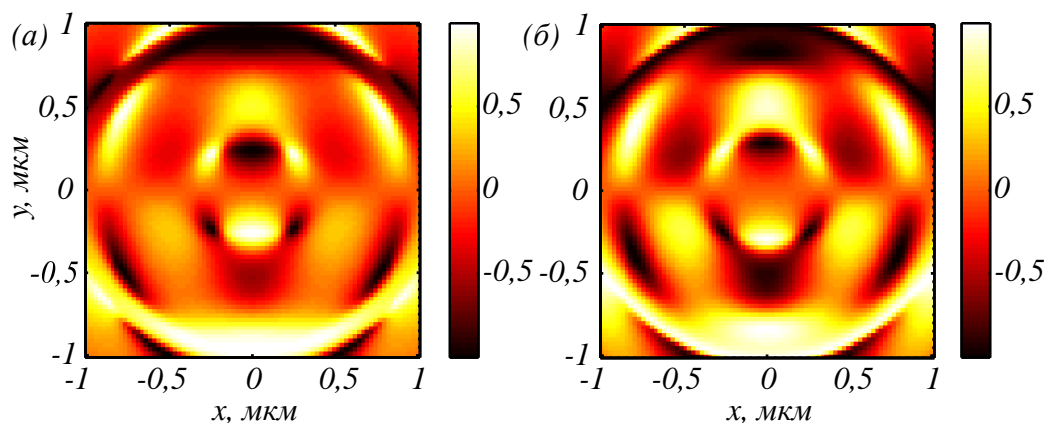


Рисунок 3.15 – Компоненты вектора Стокса s_2 (а,в) и s_3 (б,г)) при фокусировке векторного поля (3.1) первого ($m = 1$) (а,б) и пятого ($m = 5$) (в,г) порядков

Из (3.21) видно, что распределение s_2 меняет знак при обходе вокруг оптической оси $4m$ раз: 4 (Рисунок 3.15а) и 20 (Рисунок 3.15в). Это согласуется с формулой (3.42). А распределение s_3 меняет знак $2m$ раз: 2 (Рисунок 3.15б) и 10 (Рисунок 3.15г). Это согласуется с формулой (3.38).

Для полноты картины покажем распределения третьей компоненты нормированного вектора Стокса (Рисунок 3.16).



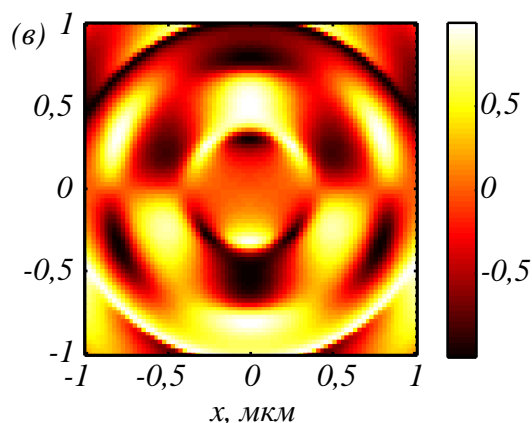


Рисунок 3.16 – Третья компоненты нормированного вектора Стокса (3.37) S_3 при фокусировке векторного поля (3.21) третьего ($m = 3$) порядка при разном параметре a : 1/2 (а), 1 (б) и 3/2 (в)

Из Рисунка 3.16 видно, что величина и размер областей эллиптической и круговой поляризации, там, где компонента S_3 близка к +1 (самые светлые) или -1 (самые темные), уменьшается при уменьшении параметра a . Из сравнения Рисунка 3.14в и Рисунка 3.16 видно, что структура нормированного S_3 и ненормированного s_3 качественно согласуются.

Итак, в этом подразделе показано на численных примерах, что при фокусировке векторного поля (3.21) в плоскости фокуса формируются локальные области размером около 200-250 нм (длина волны 532 нм, NA = 0,95), в которых поляризация эллиптическая или круговая. Число таких областей связано с номером поля (3.21) m . На некоторой окружности в фокусе с центром на оптической оси число таких областей равно $2m$. Заметим, что области с локальной эллиптической поляризацией возникают в фокусе только при нечетном номере m и при ненулевом параметре a . Если параметр $a = 0$, то поле (3.21) сводится к хорошо известному цилиндрическому векторному полю порядка m , у которого в фокусе при любом m имеет место только локальная линейная поляризация, и нет областей с эллиптической поляризацией.

Распределение проекций вектора Умова-Пойнтинга в плоскости фокуса

В этом подразделе приведены результаты расчета по формулам Ричардса-Вольфа (3.43)-(3.47) распределений вектора потока энергии (вектора Умова-Пойнтинга) (3.31) в остром фокусе поля (3.21).

На Рисунке 3.17 показаны проекции вектора Умова-Пойнтинга в фокусе для поля (3.21) с четным номером $m = 2$ и $a = 1$. Согласно полученным формулам (3.32)-(3.34) при четном номере m поперечные проекции вектора потока энергии P_x и P_y равны нулю (Рисунок 3.17б,в), а продольная компонента P_z не имеет радиальной симметрии (Рисунок 3.17а). Из Рисунка 3.17а и формулы (3.34) видно, что у продольной компоненты вектора Умова-Пойнтинга на оптической оси имеет место локальный максимум, и на вертикальной оси имеются два локальных максимума (боковых лепестка) при $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$, так как функция P_z (3.34) при $m = 2$ зависит от угла, как $\cos(2\varphi)$. Параметры расчета на Рисунках 3.17 и 3.18 такие же как, на всех предыдущих Рисунках. Из Рисунка 3.17а также видно, что продольная компонента вектора Умова-Пойнтинга внешне совпадает с распределением интенсивности на Рисунке 3.17а ($m = 2$). Это объясняется тем, что выражение (3.30) для интенсивности при $m = 2$ также, как и (3.34), зависит от угла, как $\cos(2\varphi)$.

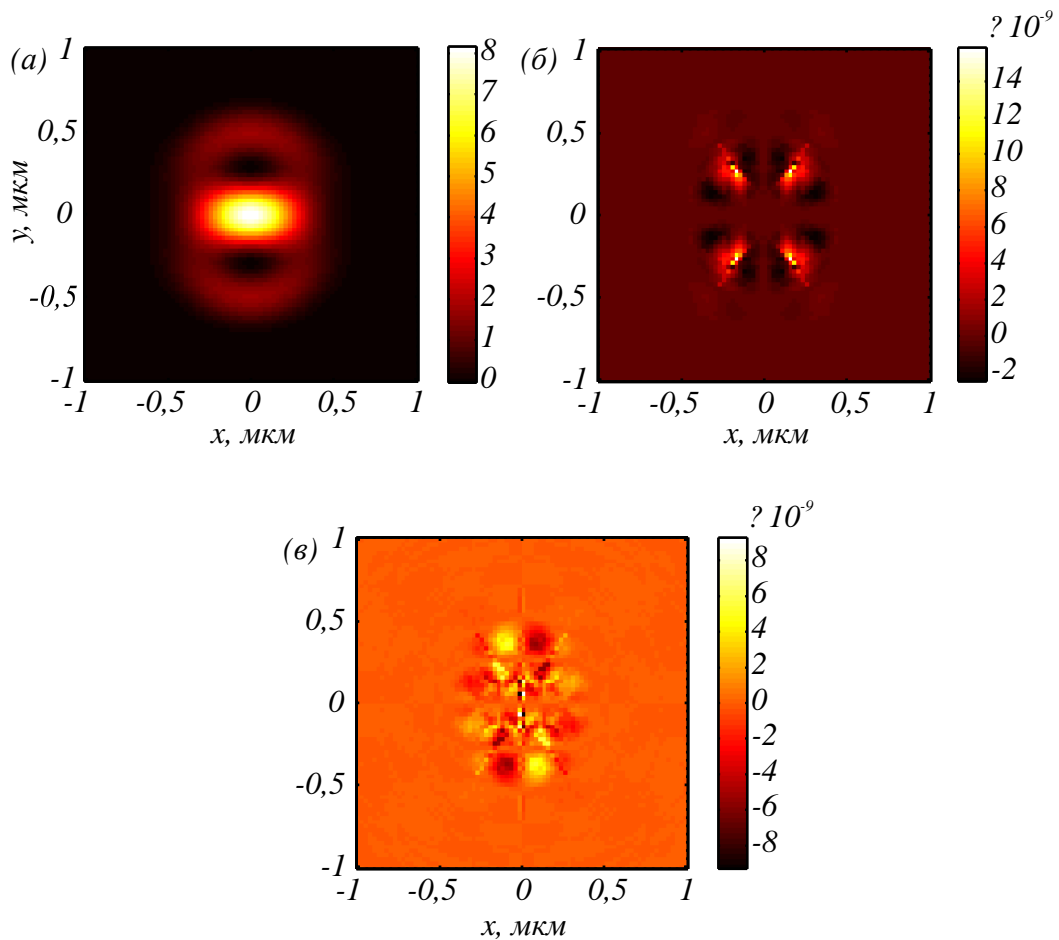


Рисунок 3.17 – Компоненты вектора Умова-Пойнтинга в фокусе для $m = 2$ и $a = 1$:

$$P_z \text{ (а)}, P_x \text{ (б)}, P_y \text{ (в)}$$

На Рисунке 3.18 показаны проекции вектора Умова-Пойнтинга в фокусе для нечетного номера $m = 3$ и $a = 1$. Из Рисунка 3.18а видно, что продольная компонента P_z радиально симметричная и на оптической оси имеет максимальное значение. Это согласуется с уравнением (3.34). Из Рисунка 3.18б,в видно, что поперечный поток энергии вращается в восьми локальных субволновых областях, в четырех областях против часовой стрелки, а в других четырех областях по часовой стрелке. При обходе вокруг оптической оси по окружности некоторого радиуса обе поперечные проекции потока энергии P_x и P_y меняют знак четыре раза, что согласуется с формулами (3.32) и (3.33), так как в этих формулах зависимость от угла определяется функцией $\cos((m+1)\varphi)$ при $m = 3$. Интегрируя в (3.36) по углу φ угловую P_φ и радиальную P_r проекции вектора Пойнтинга, получим, что суммарный поперечный поток энергии в фокусе равен нулю.

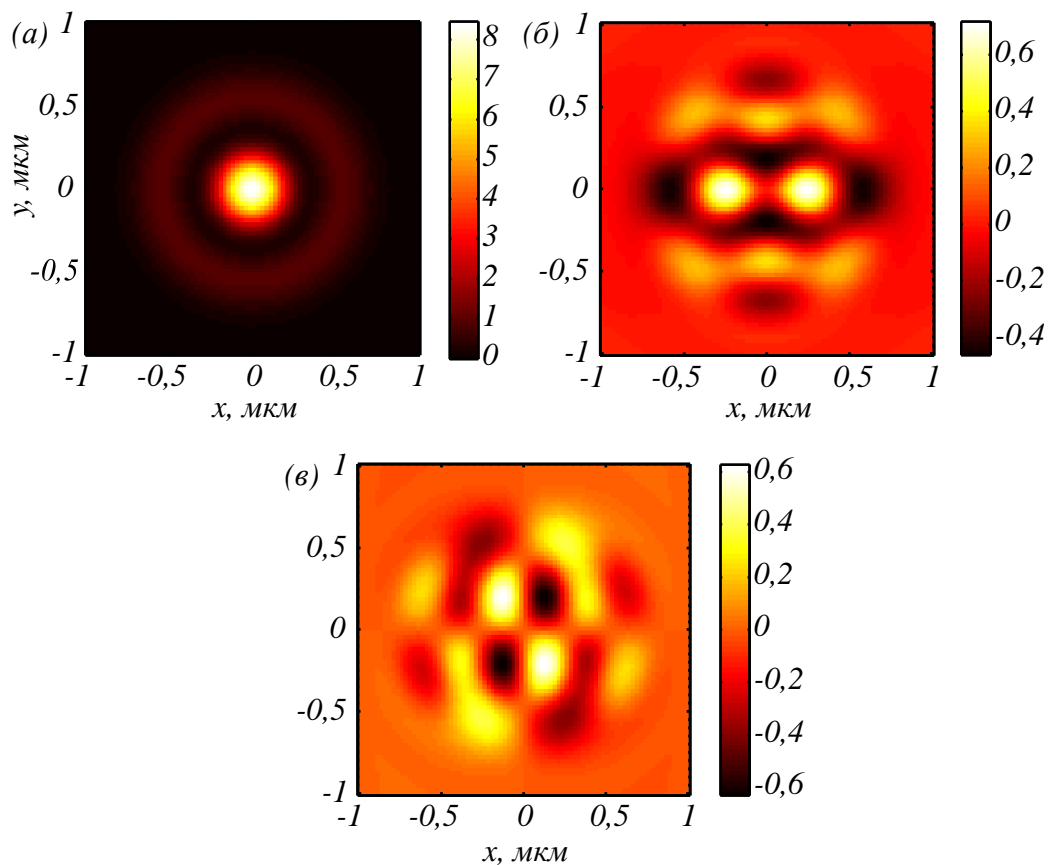


Рисунок 3.18 – Компоненты вектора Умова-Пойнтинга в фокусе для $m = 3$ и $a = 1$:

$$P_z \text{ (а)}, P_x \text{ (б)}, P_y \text{ (в)}$$

Сравнивая Рисунок 3.14в и Рисунок 3.18в видно, что 6 областей, в которых вектор поляризации вращается по эллипсу, не совпадают, но перекрываются с 8 областями, в которых вращается поперечный поток энергии [103*, 104*].

3.3 Дифракция лазерного излучения на бинарной зонной пластинке дробного порядка

Гибридные векторные лазерные пучки в последние годы привлекают все большее внимание. Благодаря особенностям пространственной поляризации и фазовой сингулярности они могут быть использованы в STED-микроскопии, в качестве оптического пинцета, в нанобработке, для возбуждения поверхностных плазмонных поляритонов, в нелинейной оптике, в квантовой оптике, в телекоммуникационных технологиях [105, 106]. Изучению оптических вихрей посвящено множество современных работ [107, 108, 109, 125, 126, 127, 128, 41.]. Интерес к таким пучкам связан с большим количеством приложений, где они могут быть использованы. Оптические вихри, в которых при распространении в свободном пространстве поперечное распределение интенсивности светового поля вращается вокруг оптической оси, широко используются в микроскопии при измерении положения и ориентации молекул [110], в атмосферных системах зондирования и беспроводной связи [111], подводных системах передачи информации [112], а также в фиксации магнитных полей [113]. Для генерации оптических вихрей разрабатываются специальные оптические элементы [114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124]. Исследование и экспериментальная демонстрация генерации трехмерных объемных оптических вихрей на основе взаимодействия света с высокоэффективной диэлектрической метаповерхностью представлены в [114]. Несколько оптических вихрей с топологическими зарядами 2, 4, 6 формируются в разных порядках дифракции нанопластины аморфного кремния с размерами $410 \times 175 \times 466$ нм и периодом 600 нм. Серия фазовых элементов Панчаратнама–Берри была разработана в [115] для создания идеальных вихревых и векторных пучков. Векторные пучки на длине волны 633 нм с топологическими зарядами 1, 2, 3 и кольцевой структурой, диаметр которой не зависит от топологического заряда, формируются спиральной зонной пластиной (СЗП), аксиконом и зонной пластиной (ЗП). Размер элемента 6 мм, фокусное расстояние линз 200 мм. Методом FDTD было показано, что спиральная

металинза из аморфного кремния с единичным топологическим зарядом и числовой апертурой ($NA = 1$) способна резко фокусировать оптический вихрь [116]. В [117] представлен дифракционный элемент для генерации оптических вихрей, основанный на фазовой модификации радиального смещения зон. Также была исследована роль так называемого параметра сдвига, и в результате было показано, что он является параметром, определяющим размер вихря. Все результаты были проверены экспериментально, продемонстрирована высокая степень совпадения теоретических и экспериментальных данных. В [118] рассмотрены децентрированные фазовые СЗП с дробным топологическим зарядом. В [119] показано, что использование спиральной фазовой пластины с дробным топологическим зарядом и управление ее начальной ориентацией позволяет нарушить симметрию процесса фокусировки и получить ориентационно-селективные анизотропные вихревые фокусы.

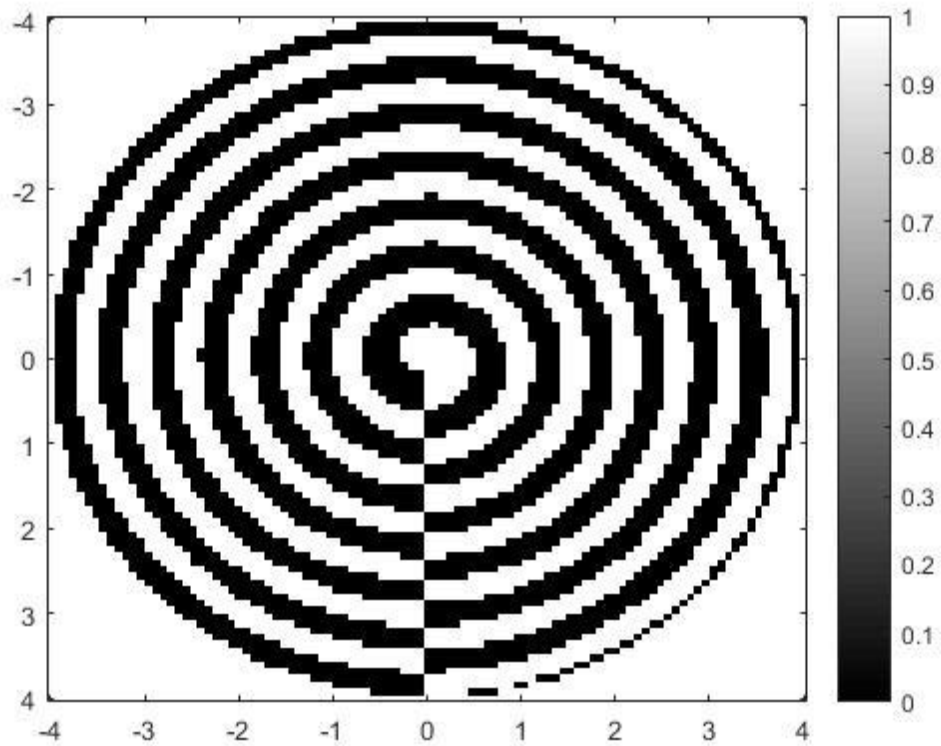
Численные результаты показывают, что бинарная структура элемента дает дополнительные высокоуровневые фокусы на оптической оси, а интенсивность в фокусе зависит от топологического заряда. В [120] теоретически и экспериментально исследуется винтовой фазовращательный элемент, позволяющий генерировать различные оптические вихри с заданным топологическим зарядом. Показано, что количество спиральных рукавов, а также кривизна спирали импульса зависят от параметра сдвига ЦВП. Кроме того, показано, что до и после плоскости фокусировки образуются вихри с разными топологическими зарядами, при этом топологический заряд оптического вихря перед фокусом постепенно трансформируется, образуя новый оптический вихрь после фокуса. В [121] теоретически и численно исследованы пространственно-временные характеристики ультракоротких оптических вихрей, такие как распределения интенсивности, фазы, оптического углового момента и потока энергии. Ультракороткий вихревой импульс формируется с помощью спирального элемента с набором отверстий, который исследовался с помощью интерферометрической системы Маха–Цендера.

Моделирование

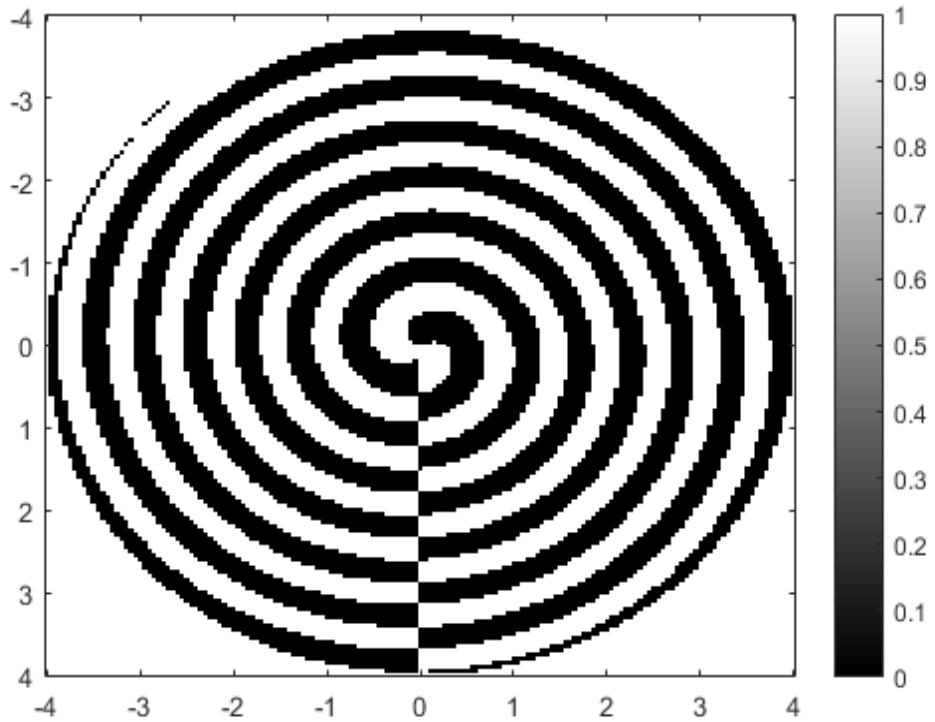
В этом разделе мы изучаем способность фазовых СЗП с дробным порядком генерировать оптические вихри с дробным топологическим зарядом. Мы используем следующую формулу для функции пропуска СЗП:

$$T(r, \theta) = \exp \left[im\theta + ik \left(\sqrt{f^2 + r^2} - f \right) \right] \quad (3.48)$$

где r и θ - полярные координаты, k - волновое число, f - фокусное расстояние. Бинарный шаблон рассматриваемой СЗП, рассчитанный по предыдущей формуле для порядков (топологического заряда) $m = 0,5$ и $m = 1,5$, максимального радиуса 4 мкм и фокусного расстояния $f = 0,532$ мкм, показан на Рисунке 3.19



a)



б)

Рисунок 3.19 – Бинарный шаблон СЗП (топологический заряд $m = 0,5$) (а), и шаблон СЗП (топологический заряд $m = 1,5$) (б)

В качестве материала рельефа зонной пластины принято кварцевое стекло $n = 1,5$. Радиус элемента был выбран равным 4 мкм, фокусное расстояние 532 нм. На Рисунке 3.20 на вход подавался ТЕ-поляризованный гауссов пучок с длиной волны $\lambda = 0,532$ мкм. Пространственное распределение падающего поля рассчитывается по сценарию, написанному автором в программном комплексе MATLAB.

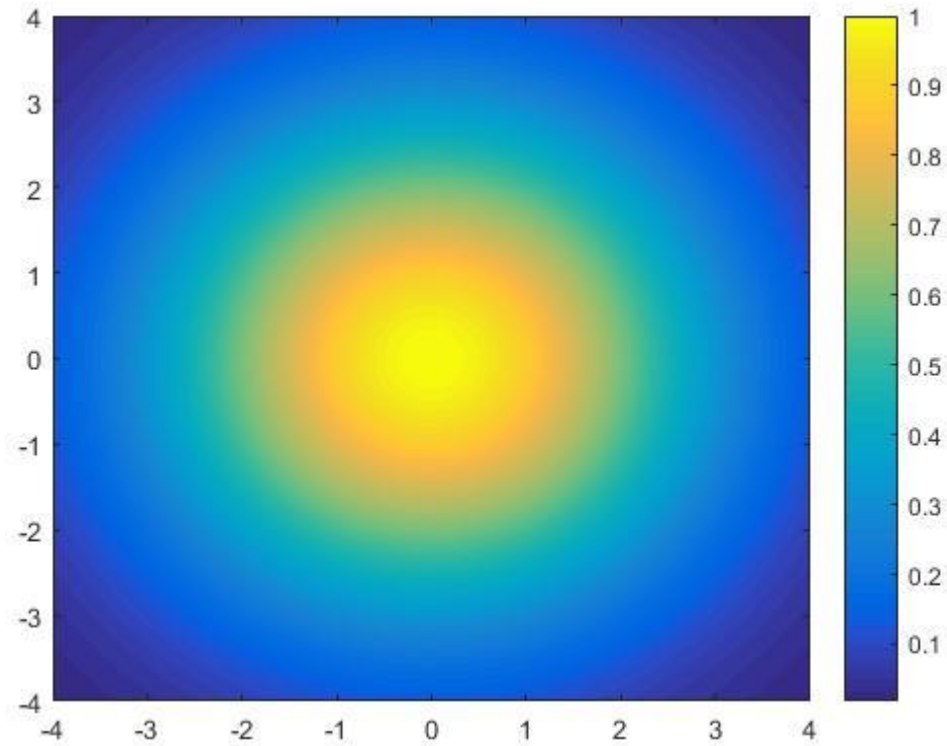


Рисунок 3.20 – Распределение интенсивности в падающем гауссовом пучке с линейной поляризацией. По осям отложены миллиметры

Все моделирование проводится методом $(FD)^2$ TD (частотно-разностным во временной области), реализованным в пакете программ FullWAVE. В этом методе используется модель диэлектрической проницаемости Селлмейера для кварцевого стекла:

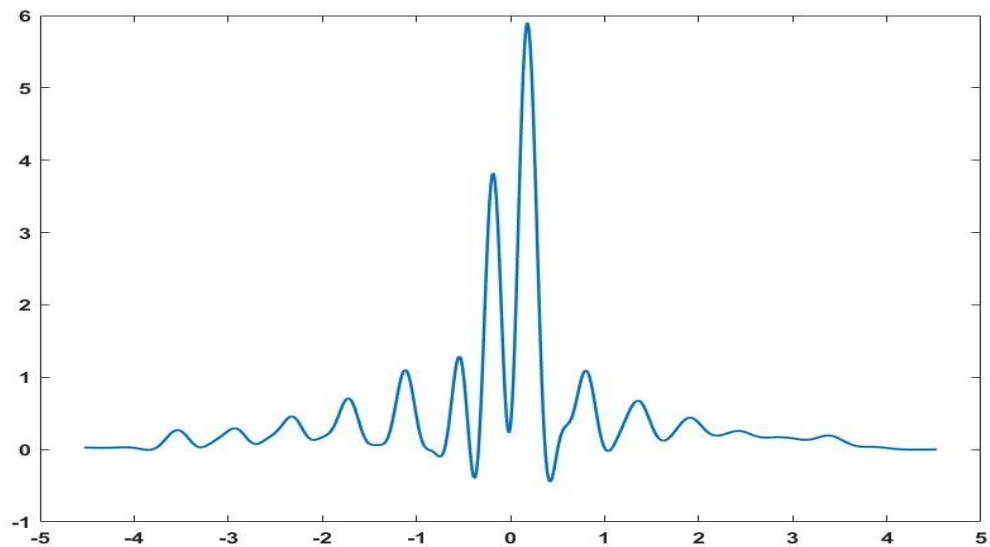
$$\varepsilon_2(\lambda) = \varepsilon_\infty + \sum_m \frac{\Delta\varepsilon_m \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2 - i\lambda\eta_m} \quad (3.49)$$

где λ - длина волны; $\varepsilon_\infty(x, z)$ - диэлектрическая проницаемость в пределе бесконечной частоты; $\Delta\varepsilon_m$ — сила резонанса; λ_m - резонансная длина волны; η_m - коэффициент демпфирования Селлмейера. Параметры для кварцевого стекла взяты из [127] и представлены в Таблице 3.2.

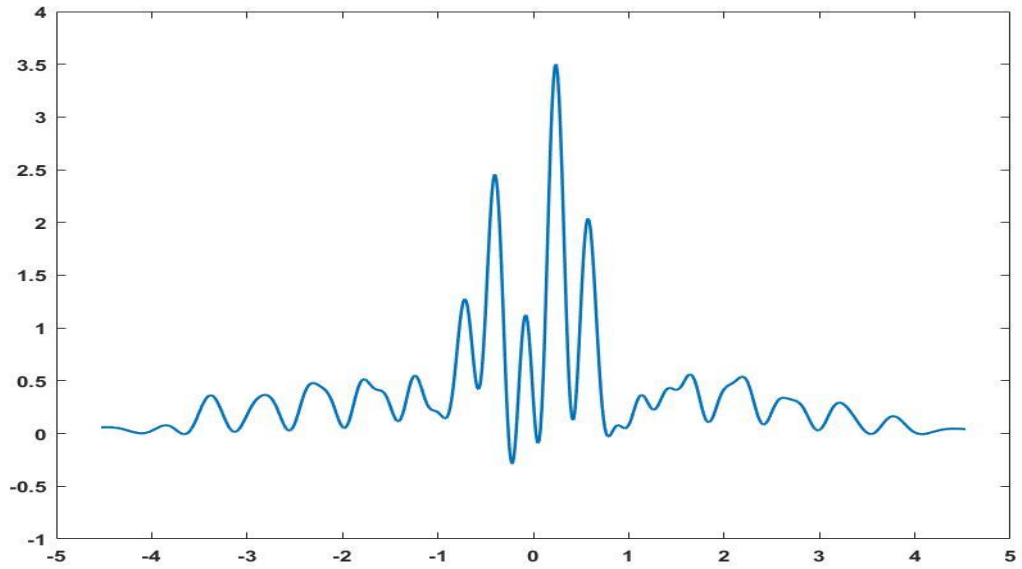
Таблица 3.2 Параметры модели диэлектрической проницаемости Селлмейера кварцевого стекла [122].

m	$\Delta\epsilon_m$	λ_m	δ_m
1	0,69616630	0,068404300	0
2	0,40794260	0,11624140	0
3	0,89747940	9,8961610	0
$\epsilon_\infty = 1$			

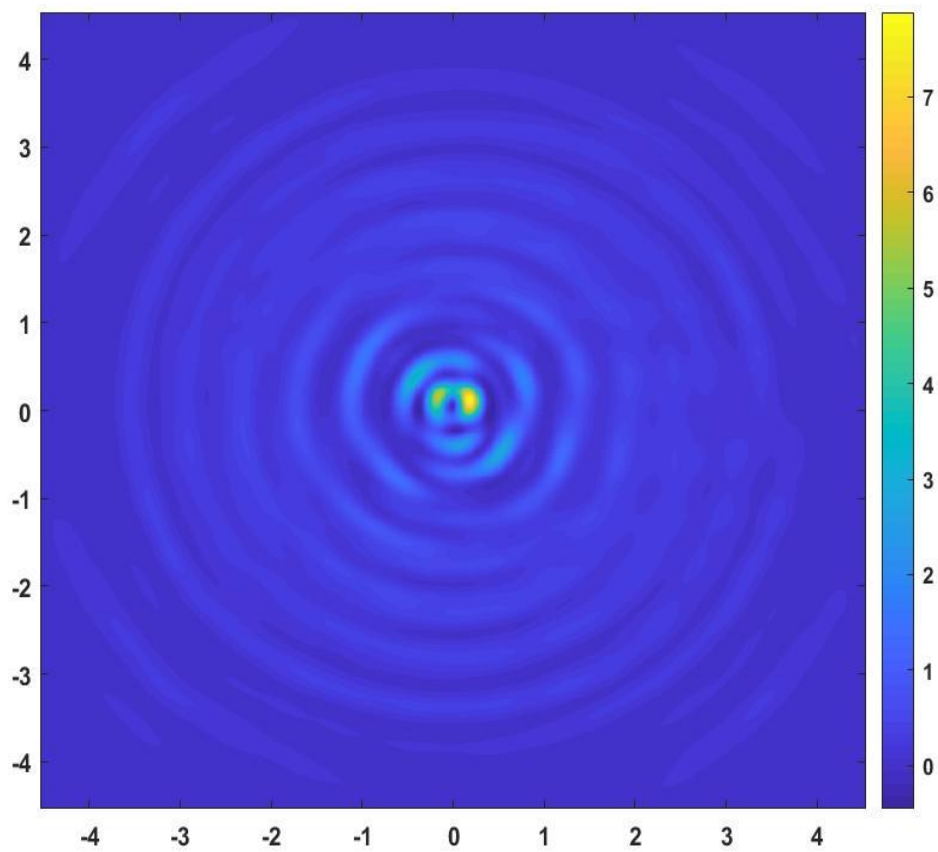
Для расчета выбран шаг 20 нм и 10 нм по поперечным и продольным координатам. Шаг по времени $c\Delta t$, где c - скорость света, составляет 5 нм, этот выбор обусловлен соблюдением условия Куранта. Все это сделано для сходимости численного метода, поэтому дальнейшее уменьшение шагов не приводит к существенному улучшению, стандартное отклонение составляет 0,001%. Усреднение расчетной напряженности поля при анализе результатов проводилось по 30 периодам. Также были рассчитаны амплитуда и фаза для каждой компоненты электрического поля с использованием скрипта MATLAB. На Рисунке 3.21 представлены результаты моделирования для SiO₂ СЗП.



а)



б)



в)

Рисунок 3.21 – Продольная составляющая вектора Умова-Пойнтинга для $m = 1,5$ (а) в фокусе СЗП, продольная составляющая вектора Умова-Пойнтинга для $m = 0,5$ (б), интенсивность в фокусе зонной пластины $m = 0,5$ (в)

Из Рисунка 3.21 видно, что СЗП формировала вихревой пучок с обратным потоком энергии. Анализ результатов моделирования показывает наличие фазовых особенностей, формирующих вихревое поле сложной структуры. Сравнение полученных электрических полей с полями, формируемыми амплитудным аналогом СЗП, показывает, что они совпадают друг с другом.

Исследования по фокусировке цилиндрических векторных пучков дробного порядка проводились в работах [80, 130*, 131*, 132*].

3.4 Выводы к главе 3

1. В поперечном сечении цилиндрического векторного пучка высокого порядка (ЦВП) поляризация имеет локально-линейный характер. Чем выше порядок пучка, тем больше число полных оборотов делают вектора локальной линейной поляризации при прохождении по контуру вокруг оптической оси. Известно, что как во входной, так и в фокальной плоскостях ЦВП не имеет ни спинового углового момента (СУМ), ни орбитального углового момента (ОУМ). Показано, что вблизи фокальной плоскости ЦВП (до и после фокуса) генерируется четное число локальных субволновых областей, где вектор поляризации в каждой точке вращается. Кроме того, в соседних областях векторы поляризации вращаются в разные стороны, так что продольная составляющая СУМ векторов в этих соседних областях имеет противоположный знак. Кроме того, после прохождения пучком фокуса, направление вращения вектора поляризации в каждой точке поперечного сечения луча сменяется на противоположное. Такое пространственное разделение левого и правого вращения векторов поляризации демонстрирует наличие оптического спинового эффекта Холла [92*].
2. Теоретически и численно рассмотрено спин-орбитальное преобразование в остром фокусе аксиальной суперпозиции цилиндрического векторного пучка высокого порядка (порядка m) и пучка с линейной поляризацией. Хотя такой пучок не имеет спинового момента количества движения в начальной плоскости и третья проекция его вектора Стокса равна нулю, субволновые локальные области с поперечным вихревым потоком энергии и с ненулевой третьей проекцией Стокса (продольная компонента момент импульса вращения) образуются в фокальной плоскости при нечетном числе m . Это означает, что такой пучок с нечетным m имеет в фокусе области эллиптической или круговой

поляризации с чередующимися направлениями вращения (по часовой стрелке и против часовой стрелки). При четном m поле линейно поляризовано в каждой точке фокальной плоскости и поперечный поток энергии отсутствует. Такое разделение в пространстве областей с разным направлением поляризации называется спиновый эффект Холла [104*].

3. Рассмотрено также формирование оптических вихрей при использовании фазового СЗП из SiO₂ дробного порядка. Все моделирование выполняется частотно-зависимым методом конечных разностей во временной области (метод FDTD), реализованным в программном пакете FullWAVE. MATLAB используется для расчета амплитудного и фазового распределения компонент светового поля. В качестве падающего света использовался гауссов пучок с длиной волны 0,532 мкм и с линейной поляризацией. Показано, что кварцевая фаза СЗП с $m = 0,5$ и $m = 1,5$ формирует в фокусе оптический вихрь, у которого имеются области с обратным потоком энергии [130*].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие основные научные результаты.

1. Показано, что вблизи фокальной плоскости начального цилиндрического векторного пучка произвольного целого порядка (до и после фокуса) генерируется четное число локальных субволновых областей, где вектор поляризации в каждой точке вращается. Кроме того, в соседних областях векторы поляризации вращаются в разные стороны, так что продольная составляющая вектора спинового углового момента в этих соседних областях имеет противоположный знак. Кроме того, после прохождения пучком фокуса, направление вращения вектора поляризации в каждой точке поперечного сечения пучка меняется на противоположное. Такое пространственное разделение левого и правого вращения векторов поляризации демонстрирует наличие оптического спинового эффекта Холла [92*].
2. Аналитически и численно показано, что распределение осевого потока энергии в остром фокусе идеальной сферической линзы для света с круговой и линейной поляризацией одинаковые и обладают круговой симметрией. Также показано, что равны осевые потоки энергии для оптических вихрей с единичным топологическим зарядом и с радиальной или азимутальной поляризацией. Минимальный диаметр (при прочих равных условиях, числовая апертура больше 0,95) имеет фокусное пятно, измеренное по интенсивности для оптического вихря с азимутальной поляризацией. Немного больше (на доли процента) диаметр фокусного пятна, рассчитанного по потоку энергии для света с круговой или линейной поляризацией [19*, 20*].
3. Для разных векторных и гибридных световых полей, в том числе для полей со многими точками поляризационной сингулярности, найдены индексы поляризационной сингулярности по известной формуле М. Берри, которая применяется обычно для нахождения топологического

заряда скалярных вихревых световых полей. Показано, что у полей, состояние поляризации которых зависит только от полярного угла в сечении пучка, могут быть либо линии поляризационной сингулярности, исходящие из центра, либо одна точка поляризационной сингулярности, находящаяся в центре сечения пучка. Если поляризационное состояние векторного поля зависит от обеих полярных координат, то такое поле может иметь несколько точек поляризационной сингулярности, расположенных в разных местах в сечении пучка. [63*].

4. С помощью параметров Стокса найден индекс поляризационной сингулярности пучков Пуанкаре. Он оказался равен топологическому заряду оптических вихрей, участвующих в формировании пучка Пуанкаре. С помощью формализма Ричардса-Вольфа аналитически найдены аналитические выражения для проекций вектора напряженности электрического поля вблизи острого фокуса данных пучков. Получено выражение для распределения интенсивности в плоскости фокуса, и найдены параметры, при которых фокусное пятно имеет круглую форму. Число локальных максимумов интенсивности в плоскости фокуса пропорционально величине индекса поляризационной сингулярности пучка [75*].
5. Аналитически и численно рассмотрено спин-орбитальное преобразование в остром фокусе аксиальной суперпозиции цилиндрического векторного пучка высокого порядка (порядка m) и пучка с линейной поляризацией. Показано, что в фокальной плоскости формируются субволновые локальные области с поперечным вихревым потоком энергии и с ненулевой третьей проекцией Стокса (продольная компонента спинового углового момента) при нечетном числе m . Это означает, что такой пучок с нечетным m имеет в фокусе области эллиптической или круговой поляризации с чередующимися направлениями вращения (по часовой стрелке и против часовой стрелки). При четном m поле линейно поляризовано в каждой точке фокальной

плоскости и поперечный поток энергии отсутствует. Такое разделение в пространстве областей с разным направлением поляризации демонстрирует наличие спинового эффекта Холла [104*].

Список литературы

1. Dorn, R. Sharper Focus for a Radially Polarized Light Beam / R. Dorn, S. Quabis, G. Leuchs // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – Vol. 91(23) – P. 233901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.233901>
2. Chong, C.T. Creation of a needle of longitudinally polarized light in vacuum using binary optics / C.T. Chong, C. Sheppard, H. Wang, L. Shi, B. Lukyanchuk // *Nat. Photonics* – 2008. – Vol. 2(6). – P. 501–505. DOI:10.1038/nphoton.2008.127
3. Kitamura, K. Sub-wavelength focal spot with long depth of focus generated by radially polarized, narrow-width annular beam / K. Kitamura, K. Sakai, S. Noda // *Opt. Express* – 2010. – Vol. 18(5). – P. 4518–4525. <https://doi.org/10.1364/OE.18.004518>
4. Yu, A. Creation of Sub-diffraction Longitudinally Polarized Spot by Focusing Radially Polarized Light with Binary Phase Lens / A. Yu, G. Chen, Z. Zhang, Z. Wen, L. Dai, K. Zhang, S. Jiang, Z. Wu, Y. Li, C. Wang, X. Luo // *Sci. Rep.* – 2016. – Vol. 6(1). – P. 38859. DOI:10.1038/srep38859
5. Prabakaran, K. Generation of sub wavelength focal spot with large depth of focus generated by radially polarized beam / K. Prabakaran, K. B. Rajesh // *Optik.* – 2014. – Vol. 125(23). – P. 7013–7015. DOI:10.1016/j.ijleo.2014.08.086
6. Prabakaran, K. Creation of Sub Wavelength Focal Spot Segment Using Longitudinally Polarized Multi Gaussian Beam / K. Prabakaran, K.B. Rajesh, V. Hariharan, V. Aroulmoji, P.M. Anbarasan, A.M. Musthafa – 2016. – Vol. 2(4). – P. 172–175. ISSN 2349 5359
7. Nie, Z. Tight focusing of a radially polarized Laguerre–Bessel–Gaussian beam and its application to manipulation of two types of particles / Z. Nie, G. Shi, D. Li, X. Zhang, Y. Wang, Y. Song // *Phys. Lett. A* – 2015. – Vol. 379(9). – P. 857–863. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2014.11.029>

8. Chang, K.-H. Efficient modulation of subwavelength focusing via meta-aperture-based plasmonic lens for multifunction applications / K.-H. Chang, Y.-C. Chen, W.-H. Chang, P.-T. Lee // *Sci. Rep.* – 2018. – Vol. 8(1). – P. 13648. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-31860-1>
9. Kozawa, Y. Superresolution imaging via superoscillation focusing of a radially polarized beam / Y. Kozawa, D. Matsunaga, S. Sato // *Optica* – 2018. – Vol. 5(2). – P. 86. <https://doi.org/10.1364/OPTICA.5.000086>
10. Grosjean, T. Smallest focal spots / T. Grosjean, D. Courjon // *Opt. Commun.* – 2007. – Vol. 272(2). – P. 314–319. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2006.11.043>
11. Kotlyar, V.V. Analysis of the shape of a subwavelength focal spot for the linearly polarized light / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, Y. Liu, L. O’Faolain, A.A. Kovalev // *Appl. Opt.* – 2013. – Vol. 52(3). – P. 330–339. <https://doi.org/10.1364/AO.52.000330>
12. Stafeev, S.S. Microlens-aided focusing of linearly and azimuthally polarized laser light / S.S. Stafeev, A.G. Nalimov, M.V. Kotlyar, D. Gibson, S. Song, L. O’Faolain, V.V. Kotlyar // *Opt. Express* – 2016. – Vol. 24(26). – P. 29800–29813. <https://doi.org/10.1364/OE.24.029800>
13. Kotlyar, V. Subwavelength grating-based spiral metalens for tight focusing of laser light / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, A.G. Nalimov, L. O’Faolain // *Appl. Phys. Lett.* – 2019. – Vol. 114 – P. 141107. <https://doi.org/10.1063/1.5092760>
14. Richards, B. Electromagnetic Diffraction in Optical Systems. II. Structure of the Image Field in an Aplanatic System / B. Richards, E. Wolf // *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* – 1959. – Vol. 253(1274). – P. 358–379. <https://doi.org/10.1098/rspa.1959.0200>
15. Котляр, В.В. Острая фокусировка светового поля с поляризационной и фазовой сингулярностью произвольного порядка / В.В. Котляр, С.С. Стафеев, А.А. Ковалёв // *Компьютерная оптика* – 2019. – Vol. 43(3). – P. 337–346. doi:10.18287/2412-6179-2019-43-3-337-346
16. Kotlyar, V.V. Exploiting the circular polarization of light to obtain a spiral energy flow at the subwavelength focus / V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov, S.S. Stafeev // *J.*

- Opt. Soc. Am. B – 2019. – Vol. 36(10). – P. 2850–2855.
DOI:10.1364/JOSAB.36.002850
17. Youngworth, K.S. Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams / K.S. Youngworth, T.G. Brown // Opt. Express – 2000. – Vol. 7(2). – P. 77–87.
<https://doi.org/10.1364/OE.7.000077>
18. Kotlyar, V.V. Reverse and toroidal flux of light fields with both phase and polarization higher-order singularities in the sharp focus area / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, A.A. Kovalev // Opt. Express – 2019. – Vol. 27(12). – P. 16689–16702.
<https://doi.org/10.1364/OE.27.016689>
19. *Kotlyar, V.V. Minimal Focal Spot Size Measured Based on Intensity and Power Flow/ V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, V.D. Zaitsev // Sensors. – 2021. – V. 21. – Issue 16.–P.5505. DOI: 10.3390/s21165505.
20. *Стафеев, С.С. Минимальное субволновое фокусное пятно по потоку энергии / С.С. Стафеев, В.Д. Зайцев // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 5. – С. 685-691. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-908
21. Man, Z. The evolutions of spin density and energy flux of strongly focused standard full Poincaré beams / Z. Man, X. Dou, H.P. Urbach // Opt. Commun. – 2020. – Vol. 458. – P.124790. DOI:10.1016/j.optcom.2019.124790.
22. Man, Z. Redistributing the energy flow of a tightly focused radially polarized optical field by designing phase masks / Z. Man, Z. Bai, S. Zhang, X. Li, J. Li, X. Ge, Y. Zhang, S. Fu // Opt. Express. – 2018. – Vol. 26. – P.23935. DOI:10.1364/OE.26.023935.
23. Gao, X-Z. Redistributing the energy flow of tightly focused ellipticity-variant vector optical fields / X-Z Gao, Y Pan, G-L Zhang, M-D Zhao, Z-C Ren, C-G Tu, Y-N Li, H-T Wang. // Photonics Res. – 2017. – Vol. 5. – P.640. DOI:10.1364/PRJ.5.000640.
24. Jiao, X. Redistributing energy flow and polarization of a focused azimuthally polarized beam with rotationally symmetric sector-shaped obstacles / X. Jiao, S. Liu, Q. Wang, X. Gan, P. Li, J. Zhao // Opt. Lett. – 2012. – Vol. 37. – P.1041. DOI:10.1364/OL.37.001041.

25. Stafeev, S.S. Circular Polarization near the Tight Focus of Linearly Polarized Light / S.S. Stafeev, A. G. Nalimov, A.A. Kovalev, V.D. Zaitsev, V.V. Kotlyar // *Photonics*. – 2022. – Vol. 9. – P. 196. DOI:10.3390/photonics9030196.
26. Bauer, T. Observation of optical polarization Möbius strips / T. Bauer, P. Banzer, E. Karimi, S. Orlov, A. Rubano, L. Marrucci, E. Santamato, R.W. Boyd, G. Leuchs. // *Science*. – 2015. – Vol. 347. – P. 964–966. DOI:10.1126/science.1260635.
27. Kotlyar, V.V. Spin-orbital conversion of a strongly focused light wave with high-order cylindrical–circular polarization / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, E.S. Kozlova, A.G. Nalimov // *Sensors*. – 2021. – Vol. 21(19). – P. 6424. DOI: 10.3390/s21196424.
28. Grosjean, T. Longitudinally polarized electric and magnetic optical nano-needles of ultra high lengths / T. Grosjean, I. Gauthier // *Opt. Commun.* – 2013. – Vol. 294. – P. 333–337. DOI:10.1016/j.optcom.2012.12.032.
29. Wang, X. Generation of equilateral-polygon-like flat-top focus by tightly focusing radially polarized beams superposed with off-axis vortex arrays / X. Wang, B. Zhu, Y. Dong, S. Wang, Z. Zhu, F. Bo, X. Li // *Opt. Express*. – 2017. – Vol. 25. – P. 26844–26852. DOI:10.1364/OE.25.026844.
30. Ping, C. Radially polarized multi-Gaussian Schell-model beam and its tight focusing properties / C. Ping, C. Liang, F. Wang, Y. Cai // *Opt. Express*. – 2017. – Vol. 25. – P. 32475–32490. DOI:10.1364/OE.25.032475.
31. Chen, H. Demonstration of flat-top focusing under radial polarization illumination / H. Chen, S. Tripathi, K. C. Toussaint // *Opt. Lett.* – 2014. – Vol. 39. – P. 834–837. DOI:10.1364/OL.39.000834.
32. Malik, H.K. Relativistic self focusing and frequency shift of super-Gaussian laser beam in plasma / H.K. Malik, L. Devi // *Results in Physics*. – 2020. – Vol. 17. – P. 103070. DOI: 10.1016/j.rinp.2020.103070.
33. Savelyev, D.A. The investigation of the features of focusing vortex super-Gaussian beams with a variable-height diffractive axicon / D.A. Savelyev //

- Computer Optics. – 2021. – Vol. 45(2). – P. 214-221. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-862.
34. Ding, X. Shaping super-Gaussian beam through digital micro-mirror device / X. Ding, Y. Ren, R. Lu // Science China Physics, Mechanics & Astronomy. – 2015. – Vol. 58(3). – P. 1-6. DOI: 10.1007/s11433-014-5499-9.
35. Savelyev, D.A. Peculiarities of focusing circularly and radially polarized super-Gaussian beams using ring gratings with varying relief height / D.A. Savelyev // Computer Optics. – 2022. – Vol. 46(4). – P. 537-546. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1131.
36. Kasinski, J.J. Near-diffraction-limited laser beam shaping with diamond-turned aspheric optics / J.J. Kasinski, R.L. Burnham. // Opt. Lett. – 1997. – Vol. 22. – P. 1062. DOI:10.1364/ol.22.001062.
37. Li, Y. Light beams with flat-topped profiles / Y. Li // Opt. Lett. – 2002. – Vol. 27. – P. 1007. DOI:10.1364/ol.27.001007.
38. Eyyuboglu, H.T. Flat topped beams and their characteristics in turbulent media / H.T. Eyyuboglu, Ç. Arpali, Y.K. Baykal // Opt. Express. – 2006. – Vol. 14. – P. 4196. DOI:10.1364/oe.14.004196.
39. Stafeev, S.S. Circular polarization before and after the sharp focus for linearly polarized light / S.S. Stafeev, V.D. Zaitsev, V.V. Kotlyar // Computer Optics. – 2022. – Vol. 46(3). – P. 381-387. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1070.
40. Davidson, N. High-numerical-aperture focusing of radially polarized doughnut beams with a parabolic mirror and a flat diffractive lens / N. Davidson, N. Bokor // Opt. Lett. – 2004. – Vol. 29. – P. 1318–1320. DOI:10.1364/ol.29.001318.
41. Stafeev, S.S. Longitudinal component of the Poynting vector of a tightly focused optical vortex with circular polarization / S.S. Stafeev, A. G. Nalimov // Comput. Opt. – 2018. – Vol. 42. – P. 190-196. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2-190-196
42. Stafeev, S.S. Flat-Top Focal Spot and Polarization Conversion Obtained in Tightly Focused Circularly Polarized Light / S.S. Stafeev, V.D. Zaitsev, V.V.

- Kotlyar // Photonics. – 2023. – Vol. 10(1). – P. 32. DOI: 10.3390/photonics10010032.
43. Nye, J.E. Natural focusing and fine structure of light / J.E. Nye – Institute of Physics Publishing; 1st edition, 1999. – 328 p. ISBN: 978-0750306102.
44. Freund, I. Poincaré vortices. / I. Freund // Opt Lett. – 2001. – Vol. 26(24). – P. 1996–1998. DOI: 10.1364/OL.26.001996.
45. Freund I. Polarization singularity indices in Gaussian laser beams / I. Freund // Opt. Commun. – 2002. – Vol. 201(4–6). – P. 251–270. DOI: 10.1016/S0030-4018(01)01725-4.
46. Freund, I. Stokes singularity relations / I. Freund, A. I. Mokhun, M.S. Soskin, O.V. Angelsky, I.I. Mokhun // Opt. Lett. – 2002. – Vol. 27(7). – P. 545–547. DOI: 10.1364/OL.27.000545.
47. Vyas, S. Polarization singularities in superposition of vector beams / S. Vyas, Y. Kozawa, S. Sato // Opt. Express. – 2013. – Vol. 21(7). – P. 8972–8986. DOI: 10.1364/OE.21.008972.
48. Kovalev, A.A. Fresnel and Fraunhofer diffraction of a Gaussian beam with several polarization singularities / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar // Computer Optics. – 2018. – Vol. 42(2). – P. 179–189. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2-179-189.
49. Ruchi Phase singularities to polarization singularities / Ruchi, P. Senthilkumaran, S.K. Pal // Int. J. Opt. – 2020. – Vol. 2020. – P. 2812803. DOI: 10.1155/2020/2812803.
50. Komal, B. Polarization singularity index determination by using a tilted lens / B. Komal, S. Deepa, S. Kumar, P. Senthilkumaran // Appl. Opt. – 2021. – Vol. 60(12). – P. 3266–3271. DOI: 10.1364/AO.420554.
51. Berry, M.V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // J Opt. A Pure Appl. Opt. – 2004. – Vol. 6(2). – P. 259–268. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.

- 52.Zhan, Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications / Q. Zhan // *Adv. Opt. Photon.* – 2009. – Vol. 1(1). – P. 1–57. DOI: 10.1364/AOP.1.000001.
- 53.Born, M. Principles of Optics / M. Born, E. Wolf – Moscow: “Nauka” Publisher, 1973. – 720p.
- 54.Kotlyar, V.V. Tightly focusing vector beams containing V-point polarization singularities / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, S.S. Stafeev, A.G. Nalimov, S. Rasouli // *Opt. Las. Tech.* – 2022. – Vol. 145. – P. 107479. DOI: 10.1016/j.optlastec.2021.107479.
- 55.Dennis, M.R. Polarization singularities in paraxial vector fields: morphology and statistics / M.R. Dennis // *Opt. Commun.* – 2002. – Vol. 213(4-6). – P. 201–221. DOI: 10.1016/S0030-4018(02)02088-6.
- 56.Berry, M.V. Index formulae for singular lines of polarizatin / M.V. Berry // *J Opt. A: Pure Appl. Opt.* – 2004. – Vol. 6. – P. 675–678. DOI: 10.1088/1464-4258/6/7/003.
- 57.Kotlyar, V.V. Sharp focusing of a hybrid vector beam with a polarization singularity / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, A.G. Nalimov // *Photonics.* – 2021. – Vol. 8. – P. 227. DOI: 10.3390/photonics8060227.
- 58.Beckley, A.M. Full Poincaré beams / A.M. Beckley, T.G. Brown, M.A. Alonso // *Opt. Express.* – 2010. – Vol. 18(10). – P.10777–10785. DOI: 10.1364/OE.18.010777.
- 59.Chen, S. Generation of arbitrary cylindrical vector beams on the higher order Poincaré sphere / S. Chen, X. Zhou, Y. Liu, X. Ling, H. Luo, S. Wen // *Opt. Lett.* – 2014. – Vol. 39(18). – P. 5274–5276. DOI: 10.1364/OL.39.005274.
- 60.Volyar, A.V. Generation of singular beams in uniaxial crystals / A.V. Volyar, T.A. Fadeeva // *Optics and Spectroscopy.* – 2003. – Vol. 94. – P. 235–244. DOI: 10.1134/1.1555184.
- 61.Li, T. Polarization transitions in the focus of radial-variant vector circular Airy beams / T. Li, B. Cao, X. Zhang, X. Ma, K. Huang, X. Lu // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2019. – Vol. 36(4). – P. 526–532. DOI: 10.1364/JOSAA.36.000526.

62. Rashid, M. Focusing of high order cylindrical vector beams / M. Rashid, O.M. Marago, P.H. Jones // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* – 2009. – Vol. 1(6). – P. 065204. DOI: 10.1088/1464-4258/11/6/065204.
- 63.*Котляр, В.В. Индексы поляризационной сингулярности, аналогичные топологическому заряду, для световых полей с неоднородной поляризацией / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, В.Д. Зайцев // *Компьютерная оптика.* – 2022. – Т. 46, № 5. – С. 671-681. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1126.
64. Kotlyar, V.V. Vortex laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev – Boca Raton : CRC Press, 2018. – 418p. <https://doi.org/10.1201/9781351009607>
65. Wang, J. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing / J. Wang, J. Yang, I.M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur, A.E. Willner // *Nature Photon.* – 2012. – Vol. 6. – P. 488–496. DOI: 10.1038/nphoton.2012.138.
66. Padgett, M. Tweezers with a twist / M. Padgett, R. Bowman // *Nature Photonics.* – 2011. – Vol. 5. – P. 343-348. <http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2011.81>.
67. Yang, Y.J. Optical trapping with structured light: a review / Y.J. Yang, Y.X. Ren, M.Z. Chen, Y. Arita, C. Rosales-Guzmán // *Advanced Photonics.* – 2021. – Vol. 3(3). – P. 034001. <https://doi.org/10.1117/1.AP.3.3.034001>
68. Nicolas, A. A quantum memory for orbital angular momentum photonic qubits / A. Nicolas, L. Veissier, L. Giner, E. Giacobino, D. Maxein, J. Laurat // *Nat. Photon.* – 2014. – Vol. 8. – P. 234-238. DOI:10.1038/nphoton.2013.355.
69. Otte, E. Entanglement beating in free space through spin–orbit coupling / E. Otte, C. Rosales-Guzmán, B. Ndagano, C. Denz, A. Forbes // *Light: Science & Applications.* – 2018. – Vol. 7. – P. 18009. DOI:10.1038/lsa.2018.9.
70. Lavery, M. Detection of a Spinning Object Using Light's Orbital Angular Momentum/ M. Lavery, F. Speirits, S. Barnett, M. Padgett // *Science.* – 2013. – Vol. 341. – P. 537-540. DOI:10.1126/science.1239936.
71. Gianani, I. Transmission of vector vortex beams in dispersive media / I. Gianani, A. Suprano, T. Giordani, N. Spagnolo, F. Sciarrino, D. Gorpas, V. Ntziachristos,

- K. Pinker, N. Biton, J. Kupferman, S. Arnon // *Adv. Photonics*. – 2020. – Vol. 2. – P. 36003. <https://doi.org/10.1117/1.ap.2.3.036003>.
72. Allen, L. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerdman // *Phys. Rev. A*. – 1992. – Vol. 45. – P.8185. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.8185>
73. Kovalev, A. Topological Charge and Asymptotic Phase Invariants of Vortex Laser Beams / A. Kovalev, V. Kotlyar, A. Nalimov. // *Photonics*. – 2021. – Vol. 8. – P. 445. DOI: 10.3390/photonics8100445.
74. Kotlyar, V.V. Topological Charge of Light Fields with a Polarization Singularity / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.D. Zaitsev // *Photonics*. – 2022. – Vol. 9. – P. 298. <https://doi.org/10.3390/photonics9050298>
75. *Котляр В.В. Индекс поляризационной сингулярности пучков Пуанкаре / В. В. Котляр, А. А. Ковалёв, С. С. Стафеев, В. Д. Зайцев // *Известия РАН. Серия физическая*. – 2022. – Т.86. – №10. – С.1400-1405. DOI: 10.31857/S0367676522100118.
76. Zhan, Q. Focus shaping using cylindrical vector beams / Q. Zhan, J.R. Leger. // *Opt. Express*. – 2002. – Vol. 10(7). – P. 324-331. <https://doi.org/10.1364/OE.10.000324>
77. Tidwell, S.C. Generating radially polarized beams interferometrically / S.C. Tidwell, D.H. Ford, W.D. Kimura // *Appl. Opt.* – 1990. – Vol. 29. – P. 2234–2239. <https://doi.org/10.1364/AO.29.002234>
78. Moh, K.J. Generating radial or azimuthal polarization by axial CYMpling of circularly polarized vortex beams / K.J. Moh, X.-C. Yuan, J. Bu, R.E. Burge, B.Z. Gao // *Appl. Opt.* – 2007. – Vol. 46. – P. 7544–7551. DOI:10.1364/AO.46.007544
79. Liu, J. Generation of arbitrary cylindrical vector vortex beams with cross-polarized modulation / J. Liu, X. Chen, Y. He, L. Lu, H. Ye, G. Chai, S. Chen, D. Fan // *Results Phys.* – 2020. – Vol. 19. – P. 103455. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.103455>

- 80.*Stafeev, S.S. Tight focusing cylindrical vector beams with fractional order / S.S. Stafeev, A.G. Nalimov, V.D. Zaitsev, V.V. Kotlyar // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 2021. – Vol. 38(4). – P. 1090–1096. DOI:10.1364/JOSAB.413581
- 81.Fu, S. Generating polarization vortices by using helical beams and a Twyman Green interferometer / S. Fu, C. Gao, Y. Shi, K. Dai, L. Zhong, S. Zhang, // *Opt. Lett.* – 2015. – Vol. 40. – P. 1775–1778. <https://doi.org/10.1364/OL.40.001775>
- 82.Desai, J. Generation of V-point polarization singularity array by Dammann gratings / J. Desai, K.K. Gangwar, K. Ruchi Khare, P. Senthilkumaran // *Appl. Phys. B.* – 2022. – Vol. 128. – P. 108. DOI:10.1007/s00340-022-07830-x
- 83.Zalogina, A. Mid-infrared cylindrical vector beams enabled by dielectric metasurfaces / A. Zalogina, L. Wang, E. Melik-Gaykazyan, Y.Kivshar, I. Shadrivov, S. Kruk // *APL Mater.* – 2021. – 9. – P. 121113. <https://doi.org/10.1063/5.0061825>
- 84.Liu, D. Generation of vector beams with different polarization singularities based on metasurfaces / D. Liu, C. Zhou, P. Lu, J. Xu, Z. Yue, S. Teng // *New J. Phys.* – 2022. – Vol. 24. – P. 043022. DOI 10.1088/1367-2630/ac60dd
- 85.Guo, L. Generation of vector beams array with a single spatial light modulator / L. Guo, Z. Feng, Y. Fu, C. Min // *Opt. Commun.* – 2021. – Vol. 490(1). – P. 126915. DOI:10.1016/j.optcom.2021.126915
- 86.Zhu, X. Digital resonant laser printing: Bridging nanophotonic science and consumer products / X. Zhu, M. Keshavarz Hedayati, S. Raza, U. Levy, N.A. Mortensen, A. Kristensen, // *Nano Today.* – 2018. – Vol. 19. – P. 7–10. <https://doi.org/10.1016/j.nantod.2017.10.002>
- 87.Zhu, X. Resonant laser printing of optical metasurfaces / X. Zhu, J. Engelberg, S. Remennik, B. Zhou, J.N. Pedersen, P. Uhd Jepsen, U. Levy, A. Kristensen, // *Nano Lett.* – 2022. – Vol. 22. – P. 2786–2792. <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.1c04874>
- 88.Bliokh, K.Y. Spin-to-orbital angular momentum conversion in focusing, scattering, and imaging systems / K.Y. Bliokh, E.A. Ostrovskaya, M.A. Alonso,

- O.G. Rodriguez-Herrera, D. Lara, C. Dainty // *Opt. Express.* – 2011. – Vol. 19. – P. 26132–26149. <https://doi.org/10.1364/OE.19.026132>
89. Humblet, J. Sur le moment d'impulsion d'une onde électromagnétique / J. Humblet // *Physica.* – 1943. – Vol. 10. – P. 585–603. [https://doi.org/10.1016/S0031-8914\(43\)90626-3](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(43)90626-3)
90. Bliokh, K. Extraordinary momentum and spin in evanescent waves / K. Bliokh, A. Bekshaev, F. Nori // *Nat. Commun.* – 2014. – Vol. 5. – P. 3300. <https://doi.org/10.1038/ncomms4300>
91. Bliokh, K. Corrigendum: Dual electromagnetism: Helicity, spin, momentum, and angular momentum / K. Bliokh, A. Bekshaev, F. Nori // *New J. Phys.* – 2013. – Vol. 15. – P. 033026. DOI 10.1088/1367-2630/15/8/089503
92. *Kotlyar, V.V. Spin Hall Effect before and after the Focus of a High-Order Cylindrical Vector Beam. *Applied Sciences* / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, A.A. Kovalev, V.D. Zaitsev // *Appl. Sci.* – 2022. – Vol. 12(23). – P. 12218. DOI: 10.3390/app122312218.
93. *Kotlyar, V. The spin Hall effect near the tight focus of a vectorial Gaussian beam with higher-order cylindrical polarization / V. Kotlyar, S. Stafeev, A. Kovalev and V. Zaitsev // 2023 IX International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT), Samara, Russian Federation. – 2023. – P. 1-4. DOI: 10.1109/ITNT57377.2023.10139036.
94. Kotlyar, V.V. Multiple optical spin-orbit Hall effect at the tight focus / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, V.D. Zaitsev, A.A. Kovalev // *Physics Letters A.* – 2023. – Vol. 458. – P.128596. DOI: 10.1016/j.physleta.2022.128596.
95. Golovashkin, D.L. Mesh domain decomposition in the finite-difference solution of Maxwell's equations / D.L. Golovashkin, N.L. Kazanskiy // *Math Model Comput Simulations.* – 2007. – Vol. 19. – P. 48–58. DOI:10.3103/S1060992X09030102
96. Machavariani, G. Efficient extracavity generation of radially and azimuthally polarized beams / G. Machavariani, Y. Lumer, I. Moshe, A. Meir, S. Jackel // *Opt Lett.* – 2007. – Vol. 32(11). – P. 1468. <https://doi.org/10.1364/OL.32.001468>

97. Liu, Z. Generation of arbitrary vector vortex beams on hybrid-order Poincare sphere / Z. Liu, Y. Liu, Y. Ke, Y. Liu, W. Shu, H. Luo // *Phot Res.* – 2017. – Vol. 5(1). – P. 15-21. <https://doi.org/10.1364/PRJ.5.000015>
98. Yan, S. Radiation forces of a highly focused radially polarized beam on spherical particles / S. Yan, B. Yao // *Phys. Rev. A.* – 2007. – Vol. 76(5). – P. 053836. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.053836>
99. Chen, R. Imaging using cylindrical vector beams in a high-numerical-aperture microscopy system / R. Chen, K. Agarwal, C.J. Sheppard, X. Chen // *Opt. Lett.* – 2013. – Vol. 38(16). – P. 3111-3114. DOI: 10.1364/OL.38.003111
100. Fickler, R. Quantum entanglement of complex photon polarization patterns in vector beams / R. Fickler, R. Lapkiewicz, S. Ramelow, A. Zeilinger // *Phys. Rev. A.* – 2014. – Vol. 89(6). – P. 4172-4183. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.060301>
101. Hollecek, A. Classical and quantum properties of cylindrically polarized states of light / A. Hollecek, A. Aiello, C. Gabriel, C. Morquardt, G. Leuchs // *Opt. Express.* – 2011. – Vol. 19(10). – P. 9714-9736. DOI: 10.1364/OE.19.009714
102. Хонина, С.Н. Управление вкладом компонент векторного электрического поля в фокусе высокоапертурной линзы с помощью бинарных фазовых структур. / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский // *Компьютерная оптика.* – 2010. – Т. 34. – С. 58–68.
103. *Котляр, В.В. Острая фокусировка осевой суперпозиции цилиндрического векторного пучка высокого порядка и пучка с линейной поляризацией / В.В. Котляр, С.С. Стафеев, В.Д. Зайцев // *Компьютерная оптика.* – 2023. – Т. 47, № 1. – С. 5-15. – DOI:10.18287/2412-6179-CO-1165.
104. *Kotlyar, V.V. Spin-Orbital Conversion with the Tight Focus of an Axial Superposition of a HighOrder Cylindrical Vector Beam and a Beam with Linear Polarization/ V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, V.D. Zaitsev, E.S. Kozlova // *Micromachines.* – 2022. – Vol. 13. – P. 1112. DOI:10.3390/ mi13071112.

105. Guan, J. Transversely polarized sub-diffraction optical needle with ultra-long depth of focus / J. Guan, J. Lin, C. Chen, Y. Ma, J. Tan, P. Jin // *Opt. Commun.* – 2017. – Vol. 404. – P. 118–123
<https://doi.org/10.1016/j.optcom.2017.04.003>
106. Yu, Y. Engineering of multi-segmented light tunnel and flattop focus with designed axial lengths and gaps / Y. Yu, H. Huang, M. Zhou, Q. Zhan // *Opt. Commun.* – 2018. – Vol. 407. – P. 398–401.
<https://doi.org/10.1016/j.optcom.2017.09.075>
107. Wei, K. Generation of cylindrical vector beams and optical vortex by two acoustically induced fiber gratings with orthogonal vibration directions / K. Wei, W. Zhang, L. Huang, D. Mao, F. Gao, T. Mei, J. Zhao // *Optics. Express.* – 2017. – Vol. 25(3). – P. 2733-2741. <https://doi.org/10.1364/OE.25.002733>
108. Mafakheri, E. Realization of electron vortices with large orbital angular momentum using miniature holograms fabricated by electron beam lithography / E. Mafakheri, A.H. Tavabi, P. Lu, R. Balboni, F. Venturi, C. Menozzi, G.C. Gazzadi, S. Frabboni, A. Sit, R.E. Dunin-Borkowski, E. Karimi, V. Grillo // *App. Phys. Lett.* – 2017. – Vol. 110(4). – P. 093113. DOI: 10.1063/1.4977879.
109. Kozlova, E.S. Modeling of the optical vortex generation using a silver spiral zone plate / E.S. Kozlova // *Computer Optics.* – 2018. – Vol. 42(6). – P. 977-984. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-6-977-984
110. Backlund, M.P. The double-helix point spread function enables precise and accurate measurement of 3D single-molecule localization and orientation / M.P. Backlund, M.D. Lew, A.S. Backer, S.J. Sahl, G. Grover, A. Agrawal, R. Piestun, W.E. Moerner // *Proc. SPIE.* – 2013. – Vol. 8590. – P. 85900L. DOI: 10.1117/12.2001671.
111. Lavery, M.P.J. Freespace propagation of high-dimensional structured optical fields in an urban environment / M.P.J. Lavery, C. Peuntinger, K. Gunthner, P. Banzer, D. Elser, R.W. Boyd, M.J. Padgett, C. Marquardt, G. Leuchs // *Sci. Adv.* – 2017. – Vol. 3(10). – P. e1700552 (2017). DOI: 10.1126/sciadv.1700552.

112. Morgan, K.S. Free space propagation of concentric vortices through underwater turbid environments / K.S. Morgan, J.K. Miller, B.M. Cochennour, W. Li, Y. Li, R.J. Watkins, E.G. Johnson // *J. Opt.* – 2016. – Vol. 18(10). – P. 104004. DOI: 10.1088/2040-8978/18/10/104004.
113. Yu, S. Compositing orbital angular momentum beams in Bi₄Ge₃O₁₂ crystal for magnetic field sensing / S. Yu, F. Pung, H. Liu, X. Li, J. Yang, T. Wang // *Appl. Phys. Lett.* – 2017. – Vol. 111(9). – P. 091107. DOI: 10.1063/1.4989651.
114. Huang, L. Volumetric generation of optical vortices with metasurfaces / L. Huang, X. Song, B. Reineke, T. Li, J. Liu, S. Zhang, Y. Wang, T. Zentgraf // *ACS Photonics.* – 2017. – Vol. 4(2). – P. 338-346. DOI: 10.1021/acsp Photonics.6b00808.
115. Liu, Y. Generation of perfect vortex and vector beams based on Pancharatnam-Berry phase elements / Y. Liu, Y. Ke, J. Zhou, Y. Liu, H. Luo, S. Wen, D. Fan // *Sci. Rep.* – 2017. – Vol. 7. – P. 44096. DOI: 10.1038/srep44096.
116. Kotlyar, V.V. A vector optical vortex generated and focused using a metalens / V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov // *Computer Optics.* – 2017. – Vol. 41(5). – P. 645-654. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-645-654.
117. Sabatyan, A. Radial phase modulated spiral zone plate for generation and manipulation of optical perfect vortex / A. Sabatyan, Z. Behjat // *Opt. Quant. Electron.* – 2017. – Vol. 49(11). – P. 371. DOI: 10.1007/s11082-017-1211-4
118. Stafeev, S.S. The Non-vortex inverse propagation of energy in a tightly focused high-order cylindrical vector beam / S.S. Stafeev, V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov, E.S. Kozlova // *IEEE Photonics J.* – 2019. – Vol. 11. – P. 4500810. doi: 10.1109/JPHOT.2019.2921669
119. Zhou, Y. Anisotropic edge enhancement with spiral zone plate under femtosecond laser illumination / Y. Zhou, S. Feng, S. Nie, J. Ma, C. Yuan // *App. Opt.* – 2017. – Vol. 56(10). – P. 2641-2648. DOI: 10.1364/AO.56.002641.

120. Wei, L. Fractional spiral zone plates / L. Wei, Y. Gao, X. Wen, Z. Zhao, L. Cao, Y. Gu, // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2013. – Vol. 30(2). – P. 233-237. DOI: 10.1364/JOSAA.30.000233.
121. Rafighdoost, J. Spirally phase-shifted zone plate for generating and manipulating multiple spiral beams / J. Rafighdoost, A. Sabatyan // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 2017. – Vol. 34(3). – P. 608-612. DOI: 10.1364/JOSAB.34.000608.
122. Couairon, A. Surface physics, nanoscale physics, low-dimensional systems-Filamentation and damage in fused silica induced by tightly focused femtosecond laser pulses / A. Couairon, L. Sudrie, M. Franco, B. Prade, A. Mysyrowicz // *Phys. Rev. B.* – 2005. – Vol. 71(12). – P. 125435. DOI: 10.1103/PhysRevB.71.125435
123. Ma, L. Spatiotemporal evolutions of ultrashort vortex pulses generated by spiral multi-pinhole plate / L. Ma, P. Zhang, Z. Li, C. Liu, X. Li, Y. Zhang, R. Zhang, C. Cheng // *Opt. Express.* – 2017. – Vol. 25(24). – P. 29864-29873. DOI: 10.1364/OE.25.029864.
124. Liang, Y. Single-focus spiral zone plates / Y. Liang, E. Wang, Y. Hua, C. Xie, T. Ye // *Opt. Lett.* – 2017. – Vol. 42(13). – P. 2663-2666. DOI: 10.1364/OL.42.002663.
125. Kotlyar, V.V. Tight focusing of laser light using a chromium Fresnel zone plate / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, A.G. Nalimov, M.V. Kotlyar, L. O'Faolain, E.S. Kozlova // *Opt. Express.* – 2017. – Vol. 25(17). – P. 19662-19671. DOI: 10.1364/OE.25.019662.
126. Kozlova, E.S. Dependence of the focal spot parameters on the relief height of the amplitude zone plate / E.S. Kozlova, V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov, S.S. Stafeev, M.V. Kotlyar, L. O'Faolain // *Proc. 19th International Conference on Transparent Optical Networks.* – 2017. – P. 8025096. DOI: 10.1109/ICTON.2017.8025096.
127. Vial, A. A new model of dispersion for metals leading to a more accurate modeling of plasmonic structures using the FDTD method / A. Vial, T. Laroche,

- M. Dridi, L. Le Cunff // *Appl. Phys. A.* – 2011. – Vol. 103(3). – P. 849-853. DOI: 10.1007/s00339-010-6224-9.
128. Rakić, A.D. Optical properties of metallic films for vertical-cavity optoelectronic devices / A.D. Rakić, A.B. Djurišić, J.M. Elazar, M.L. Majewski // *App. Opt.* – 1998. – Vol. 37(22). – P. 5271-5283. DOI: 10.1364/AO.37.005271.
129. Stafeev, S.S. Longitudinal component of the poynting vector of a tightly focused optical vortex with circular polarization / S.S. Stafeev, A.G. Nalimov // *Computer Optics.* – 2018. – Vol. 42(2). – P. 190-196. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2- 190-196.
130. *Zaitcev, V.D. Focusing of vector beams with fractional-order azimuthal polarization / V.D. Zaitcev, S.S. Stafeev, V.V. Kotlyar // *Proc. SPIE.* – 2021. – Vol. 11793. – P. 117930O. DOI: 10.1117/12.2593076.
131. *Стафеев, С.С. Фокусировка цилиндрических векторных пучков дробных порядков / С.С. Стафеев, В.Д. Зайцев // *Компьютерная оптика.* – 2021. – Т. 45, № 2. – С. 172-178. – DOI: 10.18287/2412-6179-СО-805.
132. *Zaitsev, V.D. Focusing of cylindrical vector beams with an order from zero to one and with an order greater than one / V.D. Zaitsev, S.S. Stafeev, V.V. Kotlyar // *IEEE Explore: 2021 International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT).* – 2021. – P. 1-4. DOI: 10.1109/ITNT52450.2021.9649087.