

*На правах рукописи*

Зайцев Владислав Дмитриевич

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПОТОКА ЭНЕРГИИ  
И СПИНОВОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА В ОСТРОМ ФОКУСЕ  
ВЕКТОРНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ**

1.3.6. - Оптика

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Самара – 2024

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» на кафедре технической кибернетики и в Отделении «Институт систем обработки изображений - Самара» Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники федерального государственного бюджетного учреждения «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт».

Научный руководитель:

**Котляр Виктор Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты:

**Лукин Владимир Петрович**, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева Сибирского отделения Российской академии наук, руководитель лаборатории когерентной и адаптивной оптики;

**Петров Николай Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО», заведующий лабораторией квантовых процессов и измерений.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки **Физический институт им. П.Н. Лебедева** Российской академии наук, г. Москва.

Защита состоится 6 декабря 2024 года в 10:00 на заседании диссертационного совета 24.2.379.01, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева», по адресу: 443086, г. Самара, Московское шоссе, д. 34.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» [https://ssau.ru/resources/dis\\_protection/zaitsev](https://ssau.ru/resources/dis_protection/zaitsev).

Автореферат разослан «\_\_\_»\_\_\_\_\_2024 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета 24.2.379.01  
к.ф.-м.н., доцент

Телегин А. М.

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

## Актуальность темы диссертации

Поиск новых закономерностей и новых оптических эффектов в остром фокусе когерентного лазерного света является актуальной задачей. В остром фокусе, который формируется сферическими линзами с высокой числовой апертурой ( $NA > 0,8$ ), нельзя использовать параксиальное приближение, а требуется рассчитывать все проекции векторов напряженности электромагнитного поля. Это достаточно трудная задача. Например, Е. Lommel в 1885 году описывал световое поле в фокусе с помощью рядов Бесселя. Разложение поля в фокусе по плоским волнам использовали Р. Debye (1909) и В.С. Гнатовский (1919). В работе Ричардса-Вольфа (1959) был разработан подход, который позволяет получать все проекции векторов напряженности электрического и магнитного полей вблизи фокуса с помощью однократных интегралов по азимутальному углу. В плоскости фокуса теория Ричардса-Вольфа дает точные значения величины светового поля. Этот формализм будет использоваться в данной работе.

Еще в 1873 году Е. Аббе открыл дифракционный предел, который равен половине длине волны света. И только в 2003 году R. Dorn с соавторами с помощью использования радиальной поляризации и кольцевой апертуры экспериментально преодолели дифракционный предел и получили фокусное пятно диаметром  $0,45 \lambda$  от длины волны ( $\lambda$ ). В дальнейшем много авторов улучшали данный результат. Например, был получен экспериментально круглый фокус с диаметром  $0,44 \lambda$  (Котляр В.В. с соавторами, 2013),  $0,42\lambda$  (Prabakaran K. с соавторами, 2014),  $0,40\lambda$  (С.Т. Chong, 2008). Известно также, что с помощью узкой кольцевой диафрагмы или аксикона можно сформировать фокус в виде пучка Бесселя нулевого порядка, диаметр которого равен  $0,36\lambda$ . Но боковые лепестки такого фокуса могут достигать 20-30 % от максимума интенсивности. Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться фокусные пятна с низким уровнем боковых лепестков. В работах Хониной С.Н. с соавторами (2010) исследовалось влияние продольной составляющей электрического поля на размер и форму фокусного пятна.

Остается невыясненным вопрос: при каком состоянии поляризации начального поля диаметр фокусного пятна будет минимальным?

Известно, что в сечении векторных пучков имеют место поляризационные сингулярности. Например, в поле с неоднородной линейной поляризацией могут быть точки (V-точки), в которых направление вектора линейной поляризации не определено. В поле с неоднородной эллиптической поляризацией могут быть точки (С-точки), в которых не определено направление оси эллипса поляризации, то есть точки с круговой поляризацией. Такие особые точки описываются индексом поляризационной сингулярности (индексом Стокса или индексом Пуанкаре-Хопфа). Наиболее полно поляризационные сингулярности и их индексы изучал I. Freund (1996, 2002). Однако обычно индекс поляризационной сингулярности рассчитывают для отдельной особой точки. Но в сечении векторного пучка может быть много особых точек и линий.

Нерешенным остается вопрос: как рассчитывать индекс поляризационной сингулярности всего пучка, вне зависимости от того, сколько и каких особых точек пучок имеет в своем сечении.

Пучки Пуанкаре в оптике известны после работы Beckley А.М. с соавторами (2010). Их состояние поляризации описывается двумя углами, задающими точку на поляризационной сфере Пуанкаре, и может быть однородным (линейная, эллиптическая и круговая поляризации) и неоднородным (азимутальная или радиальная). Но индекс поляризационной сингулярности для пучков Пуанкаре не рассчитывался. Кроме того, индекс поляризационной сингулярности для V-точек, в которых не определено направление линейной поляризации, ранее не рассчитывался с помощью формулы М.

Berry (2004), которая применяется для расчета топологического заряда скалярных параксиальных вихревых пучков.

Среди векторных пучков наиболее распространенными являются цилиндрические векторные пучки высокого порядка (Q. Zhan, 2009). Пучки с азимутальной и радиальной поляризацией являются частным случаем таких пучков. У таких пучков в сечении в начальной плоскости и в плоскости фокуса поляризация в каждой точке линейная. В работе Стафеева С.С. с соавторами (2020) показано, что у пучка с линейной поляризацией, хотя в фокусе также поляризация линейная, но вблизи фокуса (до и после) поляризация эллиптическая. Причем имеются области со спином разного знака, то есть области, в которых имеется как левая эллиптическая поляризация, так и правая эллиптическая поляризация.

Но обобщение этого результата на общее семейство цилиндрических векторных пучков произвольного порядка не было сделано.

В последнее время, благодаря появлению оптических сканирующих ближнепольных микроскопов различных типов, в остром фокусе были открыты интересные оптические эффекты: узлы из особых точек (W.T. Irvine с соавторами, 2008), оптические колеса (A. Aiello с соавторами, 2015), поляризационная лента Мебиуса (T. Bauer с соавторами, 2015), полная магнетизация (Y. Jiang с соавторами, 2013), обратный поток энергии (Котляр В.В. с соавторами, 2018), спин-орбитальная конверсия (O.G. Rodriguez-Nerrega с соавторами, 2010), спиновый и орбитальный эффекты Холла (K.Y. Blokh с соавторами, 2011; H. Hehe с соавторами, 2021; С.С. Стафеев с соавторами, 2021).

Актуальным является поиск новых лазерных пучков с другими состояниями поляризации, у которых в начальной плоскости поляризация неоднородная линейная, а в фокусе имеет место спиновый эффект Холла. В данной работе теоретически показано, что в остром фокусе суперпозиции цилиндрического векторного пучка и пучка с линейной поляризацией также имеет место спиновый эффект Холла. Под спиновым эффектом Холла в фокусе в дальнейшем будем понимать формирования у пучка с начальной неоднородной линейной поляризацией в фокусе четного числа областей с эллиптической или круговой поляризацией с разными направлениями вращения (со спинами разных знаков).

**Объектом исследования** являются векторные вихревые лазерные пучки.

**Предметом исследования** служит использование новых подходов для определения оптических закономерностей светового поля вблизи острого фокуса для различных начальных вихревых векторных лазерных пучков, в том числе получение аналитических выражений для основных характеристик светового поля в фокусе на основе теории Ричардса-Вольфа.

### **Цель диссертационной работы**

Аналитический и численный расчёт проекций вектора напряженности электрического поля, распределения интенсивности, продольных проекций потока энергии для сравнения размеров фокусных пятен и расчет спинового углового момента в остром фокусе для обнаружения спинового эффекта Холла для некоторых векторных вихревых лазерных пучков, в том числе для цилиндрических векторных пучков любого целого порядка и для их суперпозиции с пучком с линейной поляризацией.

### **Задачи исследования**

Для достижения цели исследования были поставлены и решались следующие задачи:

1. Сравнить диаметры фокусных пятен, рассчитанных по интенсивности и по потоку энергии, для пучков с линейной, круговой поляризацией, а также для пучков с

радиальной и азимутальной поляризацией. Найти при какой поляризации формируется фокус с минимальным диаметром.

2. Рассчитать индекс поляризации и интенсивность в остром фокусе пучков Пуанкаре, поляризационное состояние которых определяют два угла, задающих точку на поляризационной сфере Пуанкаре.

3. Рассчитать продольную проекцию вектора спинового углового момента до и после фокуса цилиндрических векторных пучков высокого порядка и показать, что в самом фокусе нет спинового эффекта Холла, а вблизи фокуса есть спиновый эффект Холла.

4. Рассчитать продольную проекцию спинового углового момента в фокусе суперпозиции цилиндрического векторного пучка порядка  $m$  и пучка с линейной поляризацией и показать, что только при нечетном  $m$  в фокусе имеет место спиновый эффект Холла.

### **Научная новизна**

1. Аналитически и численно показано, что распределение осевого потока энергии в остром фокусе света с круговой и линейной поляризацией одинаковые и обладают круговой симметрией. Также показано, что равны осевые потоки энергии для оптических вихрей с единичным топологическим зарядом и с радиальной или азимутальной поляризацией. Аналитически показано, что диаметр фокусного пятна, рассчитанного по потоку энергии, у света с круговой поляризацией меньше (при прочих равных условиях), чем у оптического вихря с азимутальной поляризацией.

2. С помощью параметров Стокса найден индекс поляризационной сингулярности пучков Пуанкаре, он оказался равен топологическому заряду оптических вихрей, участвующих в формировании пучка Пуанкаре. С помощью формализма Ричардса-Вольфа найдены аналитические выражения для проекций вектора напряженности электрического поля вблизи острого фокуса данных пучков. Получено выражение для распределения интенсивности в плоскости фокуса. Число локальных максимумов (боковых лепестков) интенсивности в плоскости фокуса пропорционально величине индекса поляризационной сингулярности пучка.

3. Аналитически показано, что до и после фокальной плоскости цилиндрического векторного пучка высокого порядка формируется четное число локальных субволновых областей, где вектор поляризации в каждой точке вращается. В соседних областях векторы поляризации вращаются в разные стороны, так что продольная составляющая векторов спинового углового момента в этих соседних областях имеет противоположный знак. Такое пространственное разделение левого и правого вращения векторов поляризации демонстрирует наличие оптического спинового эффекта Холла.

4. Аналитически и численно показано, что в остром фокусе аксиальной суперпозиции цилиндрического векторного пучка порядка  $m$  и пучка с линейной поляризацией, при нечетном  $m$  имеет место спиновый эффект Холла. То есть, хотя такой пучок в начальной плоскости имеет неоднородную линейную поляризацию, в фокусе формируются области с эллиптической или круговой поляризацией с чередующимися направлениями вращения (по часовой стрелке и против часовой стрелки).

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

В диссертационной работе разработаны несколько новых подходов к изучению оптических закономерностей в остром фокусе лазерного излучения: 1) определение диаметра фокусного пятна по потоку энергии, а не по интенсивности, 2) определение индекса поляризационной сингулярности векторных пучков аналогично определению топологического заряда скалярных оптических вихрей, 3) определение характеристик спинового эффекта Холла в области фокуса цилиндрических векторных пучков высокого

порядка.

Также значение полученных аналитических результатов в том, что они применимы для любой длины волны, любой числовой апертуры апланатической системы (идеальной сферической линзы) и для любого радиально-симметричного начального распределения амплитуды пучка.

Практическая ценность, полученных результатов, состоит в том, что 1) определение минимального фокусного пятна позволяет достигать предельного разрешения в оптической микроскопии, 2) от величины индекса поляризационной сингулярности векторных пучков зависит число боковых лепестков в фокусе, которые определяют структуру оптических ловушек для захвата и манипулирования микрочастицами, 3) спиновый эффект Холла в фокусе можно использовать в микромеханике в качестве оптического двигателя, когда в фокусе в двух соседних областях со спином разного знака вращаются две взаимодействующие микрочастицы в виде шестеренок. Параксиальные цилиндрические векторные пучки, у которых имеет место спиновый эффект Холла, можно использовать для передачи информации в беспроводных системах связи.

### **Методы исследования**

Аналитические выражения для интенсивности, потока энергии и спинового углового момента в остром фокусе получены на основе теории Ричардса-Вольфа. Для моделирования распределений интенсивности используются исходные интегралы Ричардса-Вольфа и интегралы Дебая.

### **Защищаемые положения**

1. Если с помощью идеальной сферической линзы с высокой числовой апертурой сфокусировать гауссов пучок с круговой поляризацией и гауссов оптический вихрь первого порядка с азимутальной поляризацией, то диаметр фокусного пятна (при прочих равных условиях), рассчитанного по полуспаду распределения интенсивности будет меньше у оптического вихря с азимутальной поляризацией. А если рассчитать диаметр фокусного пятна по полуспаду продольной составляющей модуля вектора Умова-Пойнтинга (по потоку энергии), то меньший диаметр будет у гауссова пучка с круговой поляризацией.

2. Индекс поляризационной сингулярности векторных лазерных пучков Пуанкаре равен топологическому заряду оптических вихрей, участвующих в формировании таких пучков. При острой фокусировке векторных лазерных пучков Пуанкаре число локальных максимумов интенсивности (боковых лепестков) в плоскости фокуса пропорционально величине индекса поляризационной сингулярности пучка.

3. Хорошо известные цилиндрические векторные пучки высокого порядка имеют неоднородную линейную поляризацию в начальной плоскости и в плоскости фокуса. Вблизи фокальной плоскости, то есть до и после фокуса, эти пучки формируют в своем сечении четное число локальных субволновых областей, где вектор поляризации в каждой точке вращается. В соседних областях векторы поляризации вращаются в разные стороны, так что продольная составляющая векторов спинового углового момента (плотность спина) в этих соседних областях имеет противоположный знак. Такое пространственное разделение левого и правого вращения векторов поляризации демонстрирует наличие оптического спинового эффекта Холла.

4. При острой фокусировке аксиальной суперпозиции цилиндрического векторного пучка высокого порядка (порядка  $m$ ) и пучка с линейной поляризацией в плоскости фокуса при нечетном номере  $m$  формируются субволновые локальные области с поперечным вихревым потоком энергии и с ненулевой третьей проекцией Стокса (с ненулевой плотностью спина). Это означает, что такой пучок с нечетным  $m$  имеет в фокусе области эллиптической или круговой поляризации с чередующимися направлениями вращения (по часовой стрелке и против часовой стрелки). Такое

разделение в пространстве областей с разным направлением поляризации является спиновым эффектом Холла.

### **Достоверность результатов**

Достоверность полученных результатов подтверждается согласием теоретических выводов с результатами численного моделирования. А также совпадением результатов моделирования, полученных разными способами: с помощью полученных аналитических выражений и с помощью прямого расчета интегралов Дебая.

### **Апробация диссертационной работы**

Основные результаты работы докладывались на международных и всероссийских конференциях, в том числе: на международной конференции «Оптические технологии в телекоммуникациях», г. Самара (2020, 2021); г. Уфа (2022); на международной конференции «Информационные технологии и нанотехнологии», г. Самара (2021, 2022, 2023); на международной конференции «Нолохро по голографии и прикладным оптическим технологиям» г. Сочи (2023); на всероссийской научной конференции с международным участием «Енисейская фотоника» г. Красноярск (2022); на международной конференции «Photonics and Electromagnetics Research Symposium» г. Ханчжоу, Китай (2021).

### **Публикации**

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 статьях, в журналах, индексируемых в информационно-аналитических системах научного цитирования SCOPUS / Web of Science, в том числе в 4 статьях в периодических изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки России.

### **Личный вклад автора**

Заключается в получении аналитических результатов и проведении моделирования, а также в обсуждении полученных результатов. Автор лично запрограммировал расчет интегралов Дебая в формализме Ричардса-Вольфа и проводил с помощью этой программы расчет основных характеристик светового поля вблизи острого фокуса для различных начальных вихревых векторных лазерных пучков.

### **Структура работы**

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Текст изложен на 137 страницах машинописного текста, содержит 65 рисунков, 4 таблицы и список литературы из 132 наименований.

## **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснованы актуальность темы, новизна, теоретическая и практическая значимость и достоверность результатов работы. Проведён обзор научной литературы по теме диссертационного исследования и сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** с помощью формул Ричардса-Вольфа производилось сравнение распределения интенсивности и продольной компоненты вектора Умова-Пойнтинга (осевого потока энергии) в плоскости острого фокуса. Для этого были записаны аналитические выражения проекций вектора напряженности электрического поля, интенсивности и проекции на оптическую ось вектора Умова-Пойнтинга  $\mathbf{P} = [c/(8\pi)]\text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$ , где  $c$  – скорость света в вакууме,  $\text{Re}$  – вещественная часть числа,  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  – векторное произведение,  $*$  – комплексное сопряжение (далее опустим постоянную  $c/(8\pi)$ ), в фокусе при острой фокусировке света апланатической системой с линейной, круговой, радиальной и азимутальной поляризацией при прочих равных условиях. С помощью формул Ричардса-Вольфа моделировалась фокусировка света различной поляризации апланатическим объективом с числовой апертурой  $NA=0,95$ . Начальный

волновой фронт во всех случаях считался плоским или вихревым.

Таблица 1 - Формулы, описывающие распределение интенсивности и осевого потока энергии в остром фокусе света с разной начальной поляризацией

Тип поляризации	Интенсивность в фокусе	Осевой поток энергии в фокусе
Линейная поляризация	$I_{0,0}^2 + I_{2,2}^2 + 2I_{0,0}I_{2,2} \cos 2\varphi + 4I_{1,1}^2 \sin^2 \varphi$	$I_{0,0}^2 - I_{2,2}^2$
Круговая поляризация	$I_{0,0}^2 + I_{2,2}^2 + 2I_{1,1}^2$	$I_{0,0}^2 - I_{2,2}^2$
Радиальная поляризация	$(I_{0,1} - I_{2,1})^2 + 4I_{1,0}^2$	$(I_{0,1} - I_{2,1})^2$
Радиальная поляризация и оптический вихрь	$\frac{1}{2}(I_{0,0} - I_{2,0})^2 + \frac{1}{2}(I_{2,2} - I_{0,2})^2 + 2I_{1,0}I_{1,2}$	$I_{0,2}^2 + I_{0,0}^2 - I_{2,0}^2 - I_{2,2}^2$
Азимутальная поляризация и оптический вихрь	$\frac{1}{2}(I_{0,0} + I_{2,0})^2 + \frac{1}{2}(I_{0,2} + I_{2,2})^2$	$I_{0,2}^2 + I_{0,0}^2 - I_{2,0}^2 - I_{2,2}^2$

В Таблице 1 использованы обозначения интегралов, зависящих только от радиальной переменной  $r$ :

$$I_{v,\mu} = \left( \frac{4\pi f}{\lambda} \right) \int_0^{\theta_0} \sin^{v+1} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-v} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{1/2}(\theta) A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_\mu(x) d\theta, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – длина волны света,  $f$  – фокусное расстояние апланатической системы,  $x = krs \sin \theta$ ,  $k$  – волновое число света,  $J_\mu(x)$  – функция Бесселя первого рода и  $NA = \sin \theta_0$  – числовая апертура, начальная функция амплитуды  $A(\theta)$ ,  $(r, \varphi)$  – полярные координаты в плоскости фокуса. Из Таблицы 1 следует, что распределение осевого потока энергии в фокусе для света с линейной и круговой поляризацией одинаковые. Это значит, что фокусное пятно, измеренное по потоку энергии для света с линейной и круговой поляризацией (при прочих равных условиях) будет круглым и одинаковым по диаметру. Также из Таблицы 1 видно, что у оптического вихря с единичным топологическим зарядом с радиальной и азимутальной поляризацией осевые потоки энергии в фокусе тоже одинаковые, а значит и фокусные пятна у них будут одинаковые. Из Таблицы 1 видно, что все распределения интенсивности и потока энергии вблизи оптической оси пропорциональны квадрату функции Бесселя нулевого порядка, которая входит в интеграл  $I_{0,0}^2$ . Так как световая энергия у всех полей из Таблицы 1 одинаковая (одинаковая начальная амплитуда), то по величине интенсивности или потока на оптической оси можно судить о величине диаметра фокусного пятна: чем больше интенсивность или поток энергии на оптической оси, тем меньше диаметр фокусного пятна. Из Таблицы 1 видно, что больше всех интенсивность на оптической оси у оптического вихря с азимутальной поляризацией:  $(I_{0,0} + I_{2,0})^2 / 2$ .

В Таблице 2 показаны размеры фокусных пятен по обеим декартовым координатам, рассчитанным по полуспаду распределения интенсивности и потока энергии в длинах волн ( $\lambda = 532$  нм). Полученные распределения интенсивности и продольной составляющей вектора Умова-Пойнтинга показаны на рис. 1 и 2, соответственно.



Таблица 2 - Величины диаметров фокусных пятен ( $NA=0,95$ ) в длинах волн, рассчитанные по полуспаду интенсивности и осевой проекции потока энергии для начальной плоской волны с линейной, круговой, радиальной поляризацией, и для начального оптического вихря первого порядка с радиальной и азимутальной поляризацией

Тип поляризации	Интенсивность $I$ , отн. ед.		Продольный поток энергии $S_z$ , отн. ед.	
	FWHM <sub>x</sub> , $\lambda$	FWHM <sub>y</sub> , $\lambda$	FWHM <sub>x</sub> , $\lambda$	FWHM <sub>y</sub> , $\lambda$
Круговая	0,5997	0,5997	0,5357	0,5357
Линейная	0,7305	0,5028	0,5357	0,5357
Радиальная	0,6327	0,6327	-	-
Радиальная+ вихрь	1,0747	1,0747	0,5573	0,5573
Азимутальная + вихрь	0,5346	0,5346	0,5566	0,5566

Из Таблицы 2 видно, что для круглых фокусных пятен наименьший диаметр, как и предсказывает теория, у оптического вихря с азимутальной поляризацией, измеренного по интенсивности ( $FWHM=0,5350\lambda$ ). Почти такой же по величине (всего на 0,14% больше) диаметр фокусных пятен для света с линейной и круговой поляризацией, измеренный по потоку энергии ( $FWHM=0,5358\lambda$ ). Немного больше (на 4%) диаметр фокусного пятна для вихря с азимутальной поляризацией, но измеренного по потоку энергии ( $FWHM=0,5573\lambda$ ). Еще на 7% больше диаметр фокусного пятна для круговой поляризации, измеренный по интенсивности ( $FWHM=0,5998\lambda$ ). И еще больше на 5% диаметр фокусного пятна для радиальной поляризации, измеренный по интенсивности ( $FWHM=0,6333\lambda$ ). Таким образом, меньшее фокусное пятно меньше большего из фокусных пятен на 15%. Заметим, что эллиптическое фокусное пятно имеет размер меньшего диаметра по интенсивности на 6% меньше минимального круглого фокусного пятна ( $FWHM=0,5029\lambda$ ). С увеличением числовой апертуры размеры фокусных пятен уменьшаются, но соотношение между ними остается почти таким же. На рис. 1 показаны сечения интенсивности фокусного пятна, рассчитанного по формулам Ричардса-Вольфа для длины волны 532 нм и числовой апертуры 0,95. Освещающий пучок имел плоский фронт (или оптический вихрь с зарядом 1) и разное состояние поляризации. Соотношение размеров фокусных пятен по полуспаду интенсивности, которое следует из Рисунка 1, подтверждает сказанное ранее. Из Рисунка 1 видно, что в случае оптического вихря с азимутальной поляризацией фокусное пятно немного меньше, чем фокусное пятно для круговой поляризации, но боковой лепесток для круговой поляризации (около 4%) в 5 раз меньше, чем у азимутальной поляризации (около 20%).

На Рисунке 2 показаны сечения фокусного пятна, рассчитанного по потоку энергии. Видно, что в этом случае фокусное пятно оптического вихря с азимутальной (радиальной) поляризацией немного больше, чем фокусное пятно пучка с круговой (линейной) поляризацией. И боковой лепесток у фокуса на Рисунке 2 для азимутальной поляризации также в 5 раз больше, чем у фокуса для круговой поляризации.

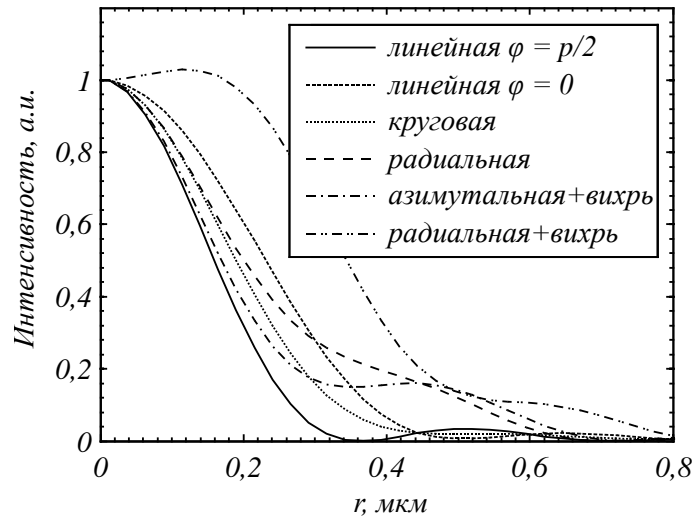


Рисунок 1 – Сечение интенсивности в фокусе при фокусировке света различной поляризации

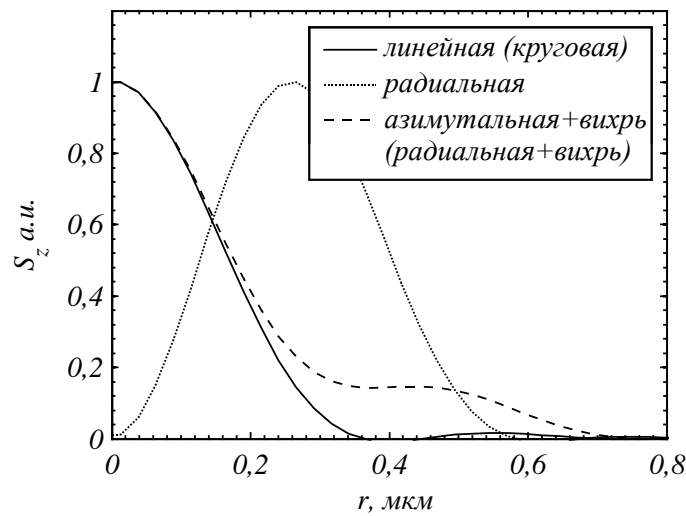


Рисунок 2 – Сечения продольной компоненты вектора Умова-Пойнтинга в фокусе

Так же с помощью формализма Ричардса-Вольфа рассмотрена фокусировка света с круговой поляризацией плоскими дифракционными линзами. Было показано, что при увеличении числовой апертуры линзы размер фокусного пятна сначала уменьшается, а потом начинает расти. Минимальное фокусное пятно наблюдается при  $NA = 0,96$  ( $FWHM = 0,55\lambda$ ) Рисунок 3а. При дальнейшем увеличении числовой апертуры дифракционной линзы рост продольной составляющей приводит к увеличению размера фокусного пятна. При замене плоской дифракционной линзы на апланатический объектив размер фокусного пятна монотонно уменьшается при увеличении числовой апертуры Рисунок 3б. То есть с помощью дифракционной линзы можно получить более острый фокус, чем с помощью идеального объектива.

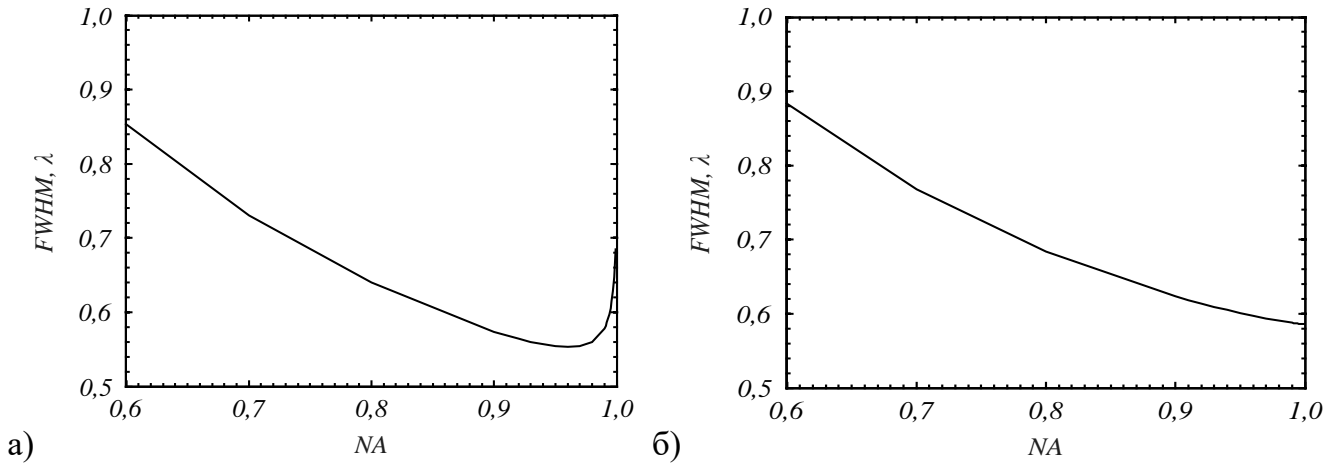


Рисунок 3 – Зависимость диаметра фокусного пятна по полуспаду

интенсивности от числовой апертуры плоской дифракционной линзы при фокусировке плоской волны с круговой поляризацией (а) и зависимость диаметра фокусного пятна по полуспаду интенсивности от числовой апертуры апланатического объектива при фокусировке плоской волны с круговой поляризацией (б)

**Вторая глава** посвящена расчёту индекса поляризационной сингулярности (ИПС) любых векторных световых полей аналогично расчету топологического заряда (ТЗ) скалярных оптических вихрей по формуле М. Берри:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (2)$$

Световых полей с неоднородной поляризацией, которые описываются в начальной плоскости с помощью векторов Джонса, известно целое множество. В работе рассчитан ИПС для некоторых таких полей. Были рассчитаны ИПС для векторных полей с цилиндрической поляризацией (радиальной и азимутальной) высших порядков, с гибридной радиально-циркулярной (и азимутально-циркулярной) поляризацией произвольных порядков, для полей с несколькими точками и с несколькими линиями поляризационной сингулярности, для пучков Пуанкаре, а также для полей с поляризацией, изменяющейся от центра к периферии. Для характеристики векторных световых полей с поляризационной сингулярностью вместо топологического заряда используют индексы поляризационной сингулярности. Это связанные между собой индекс Стокса и индекс Пуанкаре-Хопфа. Точки поляризационной сингулярности неоднородно поляризованных световых полей имеют такие: V-точки и C-точки. Они определяют топологию потоков локальных векторов поляризации в сечении пучка. V-точки – это точки сингулярности (неопределенности) направления вектора локальной линейной поляризации. В этой точке у светового поля интенсивность равна нулю. C-точки – это точки, в которых не определено направление большей оси локального эллипса поляризации. То есть это точки, в которых поляризация круговая. Если в поле есть линии неопределенности направления линейной поляризации – это V-линии (или L-линии). А линии круговой поляризации называются C-линиями. Индексы сингулярности для V- и C-точек, а также для L- и C-линий определяются с помощью параметров Стокса и комплексных полей Стокса. Например, для пучка Пуанкаре

$$E(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ae^{-in\varphi} + be^{in\varphi} \\ ia e^{-in\varphi} - ib e^{in\varphi} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $a$  и  $b$  – постоянные,  $n$  – ТЗ, комплексное поле Стокса будет иметь вид:

$$S_c = S_1 + iS_2 = 2|ab| \exp(2in\varphi - i \arg a + i \arg b). \quad (4)$$

Подставив комплексную амплитуду (4) в формулу Берри (2) получим, что индекс Стокса  $\sigma$  равен удвоенному индексу Пуанкаре-Хопфа  $\eta$  и равен:

$$\sigma = 2\eta = \begin{cases} 2n, & |a| > 0, |b| > 0, \\ 0, & |a| = 0, \text{ или } |b| = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Получается, что индекс Пуанкаре-Хопфа равен топологическому заряду  $n$ , а само поле имеет неоднородную линейную поляризацию, если модули  $a$  и  $b$  оба отличны от нуля. И поле имеет круговую поляризацию и нет сингулярности ( $\eta = 0$ ), если либо  $a$ , либо  $b$  равны нулю. Соответственно, в сечении пучков Пуанкаре в центре на оптической оси имеется точка поляризационной сингулярности с индексом равным  $n$ . Это означает, что поток локальных векторов с линейной поляризацией при обходе по замкнутому контуру вокруг оптической оси совершает  $n$  полных оборотов на угол  $2\pi$ . На рис. 4 показаны карты векторных полей (распределения векторов линейной поляризации) для поля (3) с радиальной и с азимутальной поляризацией первого и третьего порядка.

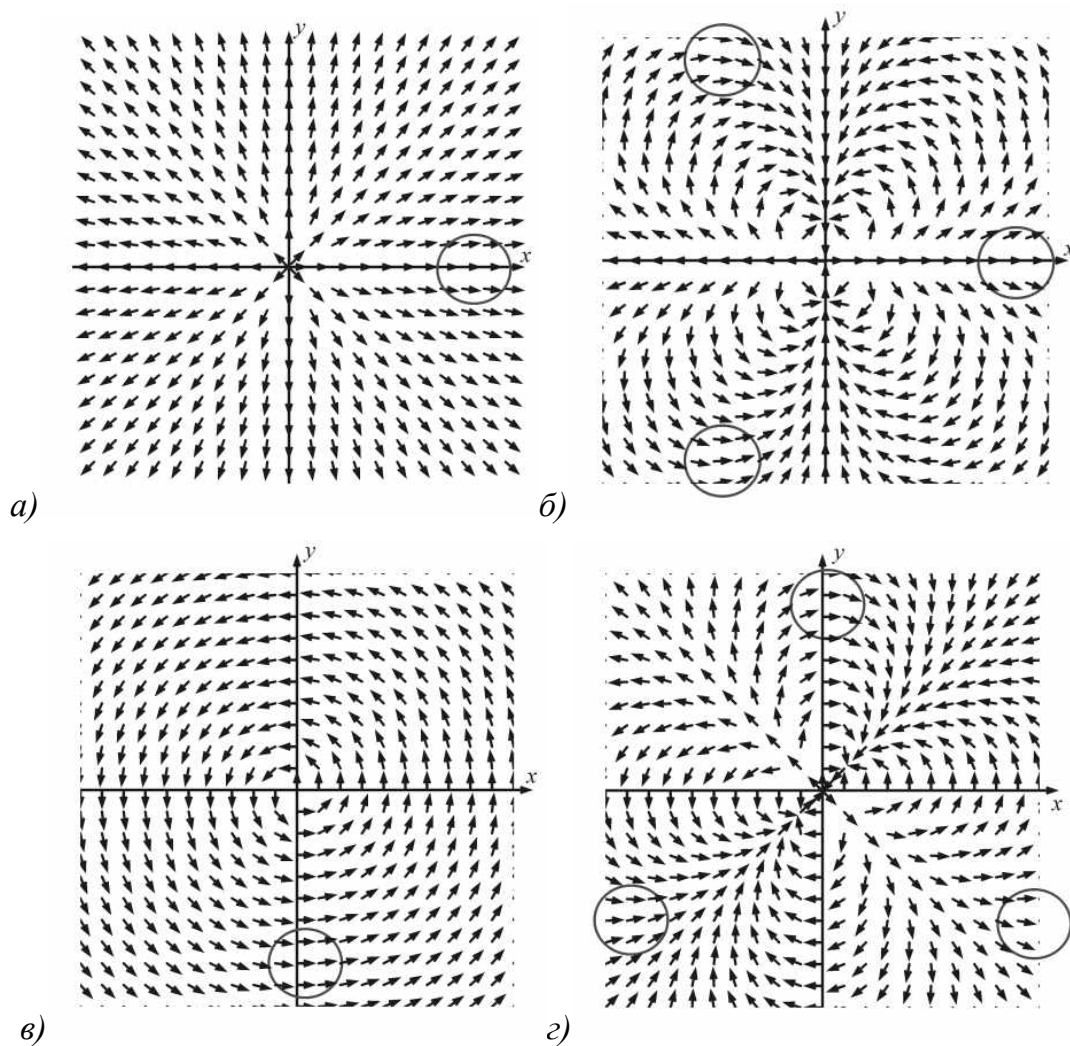


Рисунок 4 – Карты векторных полей с радиальной поляризацией первого ( $n = 1$ ) (а) и третьего ( $n = 3$ ) (б) и с азимутальной поляризацией первого ( $n = 1$ ) (в) и третьего порядка ( $n = 3$ ) (г) (кругами показаны области, где вектор поляризации направлен вправо)

Подсчёт областей с определённым направлением поляризации (например, правым) на рис.4 подтверждает, что индекс Пуанкаре-Хопфа поля (3) равен  $n$ .

**В третьей главе** с помощью интегралов Дебая и численного моделирования показано, что вблизи острого фокуса (до фокуса и за фокусом) генерируются локальные субволновые области с эллиптической и круговой поляризацией разного знака (разного

спина). Известно, что третья компонента Стокса  $S_3$  указывает на круговую или эллиптическую поляризацию светового поля. Если  $S_3 = 0$ , то поле имеет только линейную поляризацию. Продольная составляющая вектора спинового углового момента (СУМ) равна третьей компоненте Стокса и вблизи острого фокуса для цилиндрического векторного поля порядка  $n$  имеет вид:

$$S_z = S_3 = 2 \operatorname{Im} \left( E_x^* E_y \right) \approx 2kz \sin(2(n-1)\varphi) (I_0 R_2 - I_2 R_0), \quad (6)$$

где  $R_0 = I_{0,n}(z=0)$ ,  $I_0 = \bar{I}_{0,n}$ ,  $R_2 = I_{2,n-2}(z=0)$ ,  $I_2 = \bar{I}_{2,n-2}$ ,

$$\bar{I}_{\nu,\mu} = \left( \frac{4\pi f}{\lambda} \right)^2 \int_0^{\theta_0} \sin^{\nu+1} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-\nu} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{3/2}(\theta) A(\theta) J_\mu(\xi) d\theta. \quad (7)$$

Как видно из уравнения (6), в самом фокусе ( $z = 0$ ),  $S_z = S_3 = 0$  и, следовательно, в каждой точке фокальной плоскости поляризация линейна. Однако при малых расфокусировках ( $kz \ll 1$ ),  $S_3 \neq 0$  и появляются области с эллиптической и круговой поляризацией, если  $n \neq 1$ . Условие  $n \neq 1$  демонстрирует, что порядок  $n = 1$  не нарушает вращательную симметрию пучка, и области с ненулевым СУМ не могут появиться. Таким образом, такие области могут появиться только из-за нарушения симметрии при  $n \neq 1$ . В областях, где до фокуса ( $z < 0$ ) СУМ была отрицательной ( $S_3 < 0$ ), после фокуса ( $z > 0$ ) она становится положительной ( $S_3 > 0$ ), и наоборот. Вблизи фокальной плоскости на окружности определенного радиуса с центром на оптической оси располагаются центры  $4(n-1)$  локальных субволновых областей с эллиптической (рис.5). В таких соседних областях вектор поляризации вращается в противоположных направлениях (по часовой или против часовой стрелки). Поскольку при  $n \neq 1$  вблизи фокуса светового поля появляются области с левой и правой круговой поляризацией (области с разным «спином»), можно заключить, что вблизи фокуса (до и после него) возникает спиновый эффект Холла, хотя в самой фокальной плоскости этот эффект исчезает.

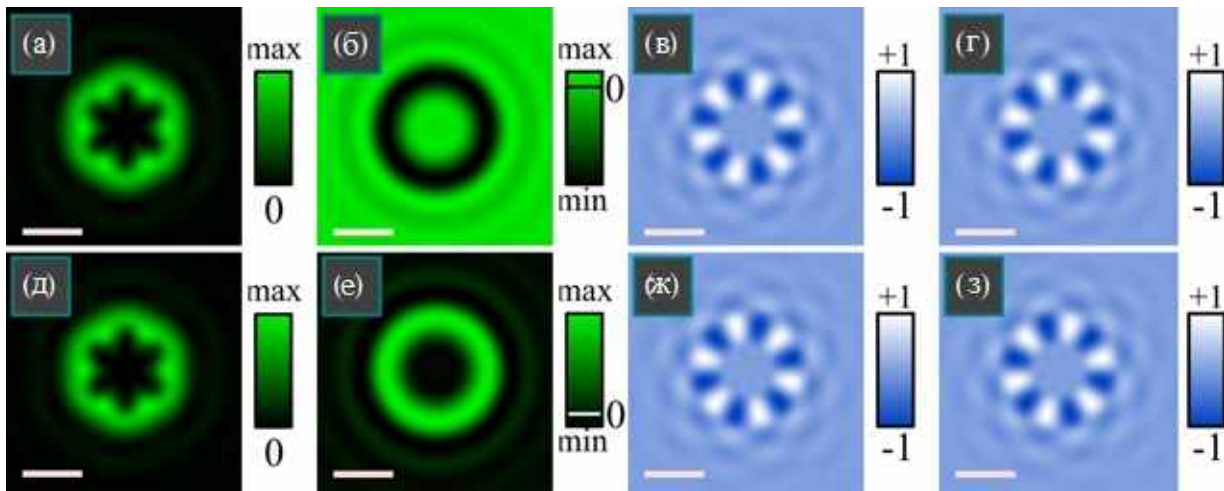


Рисунок 5 – Распределения интенсивности (столбец 1), радиальной составляющей вектора Умова- Пойнтинга (столбец 2), нормированной на максимум продольной составляющей вектора СУМ (столбец 3) и нормированной на максимум продольной составляющей вектора ОУМ (столбец 4) остро сфокусированного гауссова пучка с цилиндрической поляризацией 4-го порядка до фокуса (строка 1) и после фокуса (строка 2). Порядок пучка  $n=4$ , расстояние до и после фокуса равно длине волны,  $NA=0,95$ . На всех рисунках светлый и черный цвета означают соответственно максимум и минимум. Метки шкалы (в нижнем левом углу) обозначают 1 мкм.

В третьей главе также рассмотрена острая фокусировка осевой суперпозиции цилиндрического векторного пучка высокого порядка и пучка с линейной поляризацией. Для начального светового поля вектора Джонса электрического и магнитного полей имеют вид:

$$E_m(\varphi, a) = \begin{pmatrix} \cos m\varphi - a \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_m(\varphi, a) = \begin{pmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi - a \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Получены явные выражения для всех проекций векторов напряженности электрического поля в плоскости острого фокуса:

$$\begin{aligned} E_x(r, \varphi) &= i^{m-1} (\cos(m\varphi) I_{0,m} + \cos((m-2)\varphi) I_{2,m-2}) + ia (I_{0,0} + \cos(2\varphi) I_{2,2}), \\ E_y(r, \varphi) &= i^{m-1} (\sin(m\varphi) I_{0,m} - \sin((m-2)\varphi) I_{2,m-2}) + ia \sin(2\varphi) I_{2,2}, \\ E_z(r, \varphi) &= 2i^m \cos((m-1)\varphi) I_{1,m-1} + 2a \cos \varphi I_{1,1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя проекции поля (9) в формулу для продольной проекции спинового углового момента  $S_z$ , которая совпадает с третьей проекцией вектора Стокса  $s_3$ :

$$s_3 = S_z = 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y). \quad (10)$$

получим:

$$s_3 = S_z(r, \varphi) = \begin{cases} 2a(-1)^{(m-1)/2} \left[ \sin((m-2)\varphi) \times \right. \\ \left. \times (I_{0,0} I_{2,m-2} - I_{2,2} I_{0,m}) - \right. \\ \left. - \sin(m\varphi) (I_{0,0} I_{0,m} - I_{2,2} I_{2,m-2}) \right], & m = 2p + 1, \\ 0, & m = 2p, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (11)$$

Из (11) видно, что при четном  $m$  в фокусе поля (8) нет областей с эллиптической поляризацией. При нечетном  $m$ , и если  $a \neq 0$ , в фокусе имеется  $2m$  локальных областей, в которых свет имеет эллиптическую поляризацию. На рис.6 показана  $s_3$  ( $m=3$ ,  $NA=0,95$ ,  $\lambda=633$  нм) в фокусе поля (8). Видны области со спином разного знака.

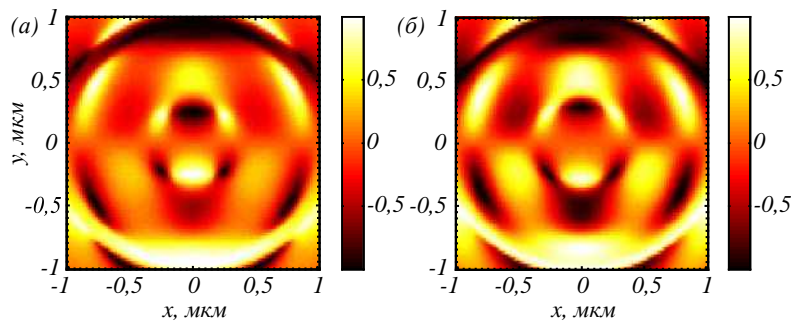


Рисунок 6 – Третья компоненты нормированного вектора Стокса (11) при фокусировке векторного поля (8) третьего ( $m = 3$ ) порядка при разном  $a$ : 1/2 (а), 1 (б)

## В Заключение диссертации приведены основные результаты

1. Показано, что вблизи фокальной плоскости начального цилиндрического векторного пучка произвольного целого порядка (до и после фокуса) генерируется четное число локальных субволновых областей, где вектор поляризации в каждой точке вращается. Кроме того, в соседних областях векторы поляризации вращаются в разные стороны, так что продольная составляющая вектора спинового углового момента в этих

соседних областях имеет противоположный знак. Кроме того, после прохождения пучком фокуса, направление вращения вектора поляризации в каждой точке поперечного сечения пучка меняется на противоположное. Такое пространственное разделение левого и правого вращения векторов поляризации демонстрирует наличие оптического спинового эффекта Холла.

2. Аналитически и численно показано, что распределение осевого потока энергии в остром фокусе идеальной сферической линзы для света с круговой и линейной поляризацией одинаковые и обладают круговой симметрией. Также показано, что равны осевые потоки энергии для оптических вихрей с единичным топологическим зарядом и с радиальной или азимутальной поляризацией. Минимальный диаметр (при прочих равных условиях, числовая апертура больше 0,95) имеет фокусное пятно, измеренное по интенсивности для оптического вихря с азимутальной поляризацией. Немного больше (на доли процента) диаметр фокусного пятна, рассчитанного по потоку энергии для света с круговой или линейной поляризацией.

3. Для разных векторных и гибридных световых полей, в том числе для полей с многими точками поляризационной сингулярности, найдены индексы поляризационной сингулярности по известной формуле М. Берри, которая применяется обычно для нахождения топологического заряда скалярных вихревых световых полей. Показано, что у полей, состояние поляризации которых зависит только от полярного угла в сечении пучка, могут быть либо линии поляризационной сингулярности, исходящие из центра, либо одна точка поляризационной сингулярности, находящаяся в центре сечения пучка. Если поляризационное состояние векторного поля зависит от обеих полярных координат, то такое поле может иметь несколько точек поляризационной сингулярности, расположенных в разных местах в сечении пучка.

4. С помощью параметров Стокса найден индекс поляризационной сингулярности пучков Пуанкаре. Он оказался равен топологическому заряду оптических вихрей, участвующих в формировании пучка Пуанкаре. С помощью формализма Ричардса-Вольфа аналитически найдены аналитические выражения для проекций вектора напряженности электрического поля вблизи острого фокуса данных пучков. Получено выражение для распределения интенсивности в плоскости фокуса, и найдены параметры, при которых фокусное пятно имеет круглую форму. Число локальных максимумов интенсивности в плоскости фокуса пропорционально величине индекса поляризационной сингулярности пучка.

5. Аналитически и численно рассмотрено спин-орбитальное преобразование в остром фокусе аксиальной суперпозиции цилиндрического векторного пучка высокого порядка (порядка  $m$ ) и пучка с линейной поляризацией. Показано, что в фокальной плоскости формируются субволновые локальные области с поперечным вихревым потоком энергии и с ненулевой третьей проекцией Стокса (продольная компонента спинового углового момента) при нечетном числе  $m$ . Это означает, что такой пучок с нечетным  $m$  имеет в фокусе области эллиптической или круговой поляризации с чередующимися направлениями вращения (по часовой стрелке и против часовой стрелки). При четном  $m$  поле линейно поляризовано в каждой точке фокальной плоскости и поперечный поток энергии отсутствует. Такое разделение в пространстве областей с разным направлением поляризации демонстрирует наличие спинового эффекта Холла.

## **СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ**

1. Стафеев, С.С. Минимальное субволновое фокусное пятно по потоку энергии / С.С. Стафеев, В.Д. Зайцев // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 5. – С. 685-691. DOI: 10.18287/2412-6179-СО-908

2. Котляр, В.В. Индексы поляризационной сингулярности, аналогичные топологическому заряду, для световых полей с неоднородной поляризацией / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, В.Д. Зайцев // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 5. – С. 671-681. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1126.
3. Котляр В.В. Индекс поляризационной сингулярности пучков Пуанкаре/В. В. Котляр, А. А. Ковалёв, С.С. Стафеев, В.Д. Зайцев // Известия РАН. Серия физическая. – 2022. – Т.86, №10. – С. 1400-1405. DOI: 10.31857/S0367676522100118.
4. Стафеев, С.С. Фокусировка цилиндрических векторных пучков дробных порядков / С.С. Стафеев, В.Д. Зайцев // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 2. – С. 172-178. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-805.
5. Kotlyar, V.V. Minimal Focal Spot Size Measured Based on Intensity and Power Flow/ V.V. Kotlyar, S.S. Stafeyev, V.D. Zaitsev // Sensors. – 2021. –Vol. 21(16). –P. 5505. DOI: 10.3390/s21165505.
6. Stafeyev, S.S. Tight focusing cylindrical vector beams with fractional order / S.S. Stafeyev, A.G. Nalimov, V.D. Zaitsev, V.V. Kotlyar // J. Opt. Soc. Am. B. – 2021. – Vol. 38(4). – P. 1090–1096. DOI:10.1364/JOSAB.413581
7. Kotlyar, V.V. Spin Hall Effect before and after the Focus of a High-Order Cylindrical Vector Beam / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeyev, A.A. Kovalev, V.D. Zaitsev // Appl. Sci. – 2022. – Vol. 12(23). – P. 12218. DOI: 10.3390/app122312218.
8. Zaitsev, V.D. Focusing of vector beams with fractional-order azimuthal polarization / V.D. Zaitsev, S.S. Stafeyev, V.V. Kotlyar // Proc. SPIE. – 2021. – Vol.11793. – P. 117930O. DOI: 10.1117/12.2593076.
9. Zaitsev, V.D. Focusing of cylindrical vector beams with an order from zero to one and with an order greater than one / V.D. Zaitsev, S.S. Stafeyev, V.V. Kotlyar // IEEE Explore: 2021 International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT). – 2021. – P. 1-4. DOI: 10.1109/ITNT52450.2021.9649087.
10. Котляр, В.В. Острая фокусировка осевой суперпозиции цилиндрического векторного пучка высокого порядка и пучка с линейной поляризацией / В.В. Котляр, С.С. Стафеев, В.Д. Зайцев // Компьютерная оптика. – 2023. – Т. 47, № 1. – С. 5-15. – DOI:10.18287/2412-6179-CO-1165.
11. Стафеев, С.С. Минимальный размер фокусного пятна при фокусировке света круговой поляризации / С.С. Стафеев, В.Д. Зайцев, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2023. – Т. 47, № 3. – С. 361-366. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1247.