

На правах рукописи

Халилов Сервер Искандарович

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТОКСА
СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПУЧКОВ ЛАГЕРРА-ГАУССА**

1.3.6. – Оптика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Симферополь – 2026

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского» на кафедре общей физики Физико-технического института.

Научный руководитель:

Брецько Михаил Владимирович, кандидат физико-математических наук.

Официальные оппоненты:

Петров Николай Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО», заведующий лабораторией научно-образовательного центра фотоники и оптоинформатики.

Стафеев Сергей Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент, Отделение «Институт систем обработки изображений – Самара» Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники федерального государственного бюджетного учреждения «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», старший научный сотрудник лаборатории лазерных измерений.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Томск.

Защита состоится 18 сентября 2026 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.379.01, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева», по адресу: 443086, г. Самара, Московское шоссе, д. 34.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» https://ssau.ru/storage/pages/6959/file_6a0460c5eeded2.21572142.pdf

Автореферат разослан «___» _____ 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.379.01
к.ф.-м.н., доцент

А.М. Телегин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Структурированные вихревые пучки с множеством степеней свободы обладают тонкой пространственной структурой интенсивности и несут как орбитальный угловой момент (ОУМ), так и спиновый угловой момент [Forbes A., 2021; He C., 2022; Shen Y., 2019; Rosales-Guzmán C., 2018], что обеспечило их быстрое внедрение в системы оптических манипуляций, линиях связи (в т.ч. квантовых), нелинейной оптике, радиотехнике и акустике [Cardano F., 2015; Willner A.E., 2023; Bokić B., 2024; Lee D., 2023; Shi C., 2017]. Массовое внедрение стало возможным благодаря технологической доступности формирования таких световых полей с применением пространственных модуляторов света, цифровых микрозеркальных устройств и голографических технологий: от классической голограммы Габора до современных решений, применяемых в системах безопасности, хранения данных, визуализации и медицине, что существенно ускорило развитие «инженерии» структурированного света [Forbes A., 2016; Scholes S., 2019; Coppola G., 2019; Rubinsztein-Dunlop H., 2016]. Тем не менее, ключевой проблемой остается измерение ОУМ и связанной с ним тонкой структуры интенсивности с её уникальной геометрией.

Анализ свойств параксиальных структурированных пучков традиционно осуществляется в два этапа. На первом этапе описываются общие свойства пучка, распространяющегося через оптическую систему, с использованием матричного подхода, основанного на формализме 4×4 ABCD-матриц [Luneberg R.K., 1966]. Второй этап связан с процессом измерений и опирается на формализм распределения Вигнера [Bastiaans M.J., 2009], а следовательно, на использование матриц моментов интенсивности второго порядка. Метод моментов интенсивности позволяет определять основные характеристики пучка посредством анализа только распределения интенсивности в соответствии с рекомендациями ISO 11146-2:2021, которые требуют наличия соответствующего программного обеспечения.

Исторически сформировались пять основных подходов к измерению ОУМ [Gbur G.J., 2016]: интерференционный метод [Harris M., 1994], дифракционный метод [Soskin M.S., 2001], метод Шака–Гартмана [Chen M., 1994], метод компьютерно-синтезированных голограмм и дифракционных оптических элементов [Khonina S.N., 1999; Fatkhiev D.M., 2021], а также метод геометрического разделения пучков [Berkhout G.C.G., 2010; Berkhout G.C.G., 2011]. Как правило, данные методы предполагают использование громоздкого и дорогостоящего оборудования, чувствительного к внешним возмущениям при проведении многократных последовательных измерений.

В то же время метод моментов интенсивности требует только одного снимка картины интенсивности с последующей стандартной компьютерной обработкой. Однако до недавнего времени он применялся преимущественно для анализа изображений [Flusser J., 2009] и для оценки качества лазерных пучков [Siegman A.E., 1998]. Лишь в одной работе [Alperin S.N., 2016] был предложен подход, основанный на применении моментов интенсивности для измерения ОУМ в некоторых типах лазерных пучков. Между тем ещё в начале 1990-х годов начались интенсивные теоретические исследования свойств лазерных пучков, включая ОУМ, с точки зрения физических моментов интенсивности второго порядка [Bastiaans M.J., 2009].

Ананьев и Бекшаев [Anan'ev Yu.A., 1994] определили главные инварианты матрицы моментов второго порядка. В работе [Bekshaev A.Ya., 2003] было предсказано сохранение полного ОУМ как суммы вихревого и астигматического вкладов при прохождении пучка через цилиндрическую линзу. Немес и Сейгман [Nemes G., 1994] предложили теоретический подход к измерению всех 10 элементов матрицы моментов интенсивности. Алиева и Басстианс [Alieva T., 2009] ввели понятие орбитальных параметров Стокса, включая ОУМ, и предложили отображение состояния вихревого пучка на орбитальную сферу Пуанкаре. Волостников и Абрамочкин [Abramochkin E., 1991; Abramochkin E., 2004] показали, что пучки Лагерра–Гаусса (ЛГ) и Эрмита–Гаусса (ЭГ) являются частными случаями обобщённого семейства однопараметрических пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса (ЭЛГ). Паджетт с соавторами [Padgett M.J., 1991] отображали все возможные состояния ЭЛГ-пучков низших порядков в виде плоских траекторий на орбитальной сфере Пуанкаре. Калво [Calvo G.F., 2005] внедрил в

экспериментальную установку призму Дове, вращающую пучок, что позволило превратить плоскую траекторию ЭЛГ-пучка в пространственную и измерить геометрическую фазу Берри при циклическом изменении управляющего параметра пучка.

В работах Воляра и соавторов [Volyar A., 2020] предложены двухпараметрические структурированные ЛГ-пучки (сЛГ), устраняющие вырождение ЭЛГ по вращению вокруг оси, и траектории состояний на орбитальной сфере становятся пространственными [Volyar A., 2024]. Там же предложен и реализован метод восстановления спектров ЛГ- и ЭГ-мод по моментам интенсивности высших порядков [Volyar A., 2018; Volyar A., 2019], что обеспечивает прямой метод измерения ОУМ и комплексных коэффициентов мод. Наконец, Деннис и Алонсо [Dennis M.R., 2017] предложили единый подход к отображению состояний поляризации и вихревых состояний на сферу Пуанкаре. Однако проблема экспериментального измерения орбитальных параметров Стокса и отображения состояний астигматических структурированных пучков с несколькими степенями свободы на орбитальную сферу Пуанкаре в оптических системах первого порядка до настоящего времени остаётся открытой.

В связи с этим **целью диссертационной работы** является разработка и экспериментальная реализация метода измерения орбитальных параметров Стокса структурированных вихревых пучков на основе моментов интенсивности второго порядка в оптической системе первого рода с последующим отображением состояний пучков на орбитальную сферу Пуанкаре.

Для достижения поставленной цели необходимо решить три **задачи**:

1. Разработать и экспериментально реализовать метод измерения орбитальных параметров Стокса структурированных вихревых пучков Лагерра–Гаусса, представленных в базисе мод Эрмита–Гаусса, в оптической системе первого порядка.
2. На основе прямого измерения моментов интенсивности второго порядка построить отображение эволюции состояния пучка на орбитальной сфере Пуанкаре и установить связь формы траектории с параметрами наблюдаемого эллипса интенсивности.
3. С использованием компьютерного моделирования и прямых измерений орбитальных параметров Стокса определить положения критических плоскостей в оптической системе, состоящей из двух сферических линз и расположенной между ними цилиндрической линзы, а также измерить астигматическую фазу Гуи.

Научная новизна

В диссертационной работе впервые получены следующие результаты:

1. Разработан и экспериментально реализован метод определения орбитальных параметров Стокса структурированных пучков Лагерра–Гаусса по моментам интенсивности второго порядка, вычисляемым по двум зарегистрированным распределениям интенсивности в фокусе сферической линзы и в двойном фокусе цилиндрической линзы, с последующим представлением состояния пучка на орбитальной сфере Пуанкаре.
2. В оптической системе, состоящей из двух сферических линз и расположенной между ними цилиндрической линзы выявлены две плоскости, в которых происходит преобразование пространственной структуры пучка. Установлено, что на орбитальной сфере Пуанкаре этим плоскостям соответствуют поворот траектории состояния пучка на 90° и её последующее обратное вращение.
3. Получено выражение для астигматической фазы Гуи, определяющей эволюцию состояния пучка при астигматическом преобразовании, через орбитальные параметры Стокса: $\arctan(S_3/S_2)$, где S_2, S_3 – второй и третий орбитальные параметры Стокса.
4. Выявлено, что при астигматическом преобразовании структурированных пучков Лагерра–Гаусса величина их орбитального углового момента определяется не только топологическим зарядом, но и радиальным числом. Установлено сохранение инварианта астигматического преобразования $\sqrt{S_2^2 + S_3^2}$, где S_2, S_3 – второй и третий орбитальные параметры Стокса.

Методы исследований

В работе использован метод моментов интенсивности второго порядка для определения орбитальных параметров Стокса. Теоретический анализ выполнен в рамках параксиальной

волновой оптики с применением матричного ABCD-формализма распространения лазерных пучков. Численное моделирование проводилось с использованием математических пакетов Maple и Wolfram Mathematica. Полученные результаты подтверждены теоретическими расчётами и экспериментальными исследованиями. Дополнительно выполнено моделирование астигматического преобразования и восстановления структуры сЛГ-пучка при распространении вдоль оптической оси, а также построено отображение параметризованных состояний сЛГ-пучков на орбитальной сфере Пуанкаре.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке метода измерения орбитальных параметров Стокса на основе численного анализа моментов интенсивности второго порядка в оптических системах первого рода, который расширяет существующие подходы к диагностике сложных структурированных пучков. Введённое описание эволюции состояний структурированных пучков через отображение на орбитальную сферу Пуанкаре позволяет интерпретировать динамику тонкой структуры интенсивности в терминах непосредственно измеряемых характеристик. Обоснована связь орбитальных параметров Стокса с астигматической фазой Гуи, что открывает возможность строгого анализа преобразований состояния пучков при их распространении через астигматические элементы. Показано, что радиальное число оказывает влияние на орбитальный угловой момент пучка при астигматическом преобразовании, что дополняет современные представления о структуре световых полей, обладающих орбитальным угловым моментом.

Практическая значимость работы состоит в экспериментальной реализации метода, позволяющего определять орбитальные характеристики пучков без необходимости использования сложных интерферометрических или дифракционных систем, что значительно упрощает экспериментальные процедуры и повышает их надёжность. Возможность восстановления эволюции состояния пучка на основе двух снимков распределения интенсивности существенно снижает требования к измерительному оборудованию и повышает устойчивость результатов к внешним возмущениям. Разработанные подходы могут быть использованы для оптимизации систем оптической связи с использованием структурированных пучков, для диагностики параметров лазерных пучков в системах обработки материалов, в микроманипуляционных технологиях, а также при исследовании квантовых систем, где контроль орбитальных степеней свободы имеет принципиальное значение.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 24-22-00278, что подтверждает её актуальность и практическую значимость.

Положения, выносимые на защиту:

1. Орбитальные параметры Стокса структурированных пучков Лагерра–Гаусса экспериментально определяются по моментам интенсивности второго порядка, вычисляемым по двум зарегистрированным распределениям интенсивности: в фокусе сферической линзы и в двойном фокусе цилиндрической линзы, что позволяет представить состояние пучка на орбитальной сфере Пуанкаре.

2. В оптической системе, состоящей из двух сферических линз и расположенной между ними цилиндрической линзы, существуют две выделенные плоскости, в которых структурированный пучок Лагерра–Гаусса претерпевает преобразование пространственной структуры. На орбитальной сфере Пуанкаре этим плоскостям соответствует поворот траектории состояния пучка на 90° и её последующее обратное вращение, что позволяет использовать указанные плоскости для прямого измерения орбитальных параметров Стокса.

3. Астигматическая фаза Гуи, определяющая эволюцию состояния пучка при астигматическом преобразовании, выражается соотношением $\arctan(S_3/S_2)$, где S_2 , S_3 – второй и третий орбитальные параметры Стокса.

4. При астигматическом преобразовании структурированных пучков Лагерра–Гаусса величина их орбитального углового момента определяется не только топологическим зарядом, но и радиальным числом, инвариантом астигматического преобразования является величина $\sqrt{S_2^2 + S_3^2}$, где S_2 , S_3 – второй и третий орбитальные параметры Стокса.

Достоверность результатов работы обеспечивается использованием строгих математических моделей описания распространения структурированных вихревых пучков через оптические системы первого рода, применением общепринятых методов анализа моментов интенсивности второго порядка, а также сопоставлением экспериментальных данных с результатами численного моделирования. Разработанный метод измерения орбитальных параметров Стокса прошёл экспериментальную проверку для различных состояний структурированного пучка, что подтвердило его воспроизводимость и устойчивость к внешним возмущениям. Соответствие полученных результатов теоретическим прогнозам и независимым расчётам дополнительно подтверждает достоверность выводов работы.

Апробация материалов научно-квалификационной работы проводилась на следующих научных конференциях и школах: Международной конференции и молодёжной школе «Информационные технологии и нанотехнологии» (г. Самара, 2022–2025 гг.), Международной конференции по фотонике и информационной оптике (г. Москва, 2023, 2024 гг.), XXI Всероссийской молодёжной Самарской конкурс-конференции научных работ по оптике и лазерной физике, посвящённой 300-летию РАН (г. Самара, 14–18 ноября 2023 г.), XXXII Международной школе-симпозиуме по голографии, когерентной оптике и фотонике (г. Санкт-Петербург, 30 мая–3 июня 2022 г.), Международной конференции «Цифровая сингулярная оптика» (DSO2021) (г. Ялта, 6–10 сентября 2021 г.).

Публикации

По теме данной диссертационной работы было опубликовано 15 научных работ, из которых 13 статей индексируются в базах данных Scopus и Web of Science и опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК. Кроме того, по результатам исследований зарегистрированы две программы для ЭВМ.

Личный вклад автора

Вклад соискателя заключается в проведении численного моделирования распространения структурированных вихревых пучков через оптические системы первого рода, разработке и реализации метода измерения орбитальных параметров Стокса на основе анализа моментов интенсивности второго порядка, а также в обсуждении полученных результатов. Автором самостоятельно проведены экспериментальные исследования по измерению орбитальных характеристик структурированных пучков, выполнена обработка экспериментальных данных и осуществлена апробация разработанного метода. Все основные выводы и положения диссертационной работы сформулированы автором лично.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения, списка литературы, включающего 165 наименований. Работа изложена на 138 листах машинописного текста, содержит 37 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность выбранной темы научно-квалификационной работы, развернуто приведен обзор основополагающих и современных работ, сформулирована цель и поставлены задачи исследования, научная новизна, приведены положения, выносимые на защиту, описана структура диссертации.

Первая глава посвящена теоретическому и экспериментальному описанию сЛГ-пучка и анализу его параметров при астигматическом преобразовании в оптических системах первого порядка. Исходная модель сЛГ-пучка представлена в виде суперпозиции ЭГ-мод с амплитудно-фазовым возмущением $\varepsilon_k(\varepsilon, \theta)$:

$$sLG_{n,\pm\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \sum_{k=0}^{2n+\ell} (\pm 2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(0) \varepsilon_k(\varepsilon, \theta) HG_{2n+\ell-k,k}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $n, \pm\ell$ – радиальный и азимутальный индекс ЛГ-моды соответственно, $\mathbf{r} = (x, y)$, $P_k^{(n,m)}(x)$ – многочлен Якоби, $HG_{2n+\ell-k,k}(\mathbf{r})$ – комплексная амплитуда ЭГ-моды, $\varepsilon_k(\varepsilon, \theta) = 1 + \exp(ik\theta)$, где ε и

θ – амплитудный и фазовый параметры соответственно. Эквивалентная запись (с выделением моды ЭЛГ) имеет вид:

$$sLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) = LG_{n,\ell}(\mathbf{r}) + \varepsilon \frac{e^{-3\pi i \ell/4}}{2^{n+\ell} n!} e^{i(2n+\ell)\theta/2} HLG_{n,n+\ell} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{y-x}{\sqrt{2}} \middle| \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (2)$$

$$HLG_{n,m}(\mathbf{r}|\pi/4) = (-1)^{\min} 2^{\max} (\min)! LG_{\min, n-m}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где $HLG_{n,m}(\mathbf{r}|\alpha)$ – ЭЛГ мода с управляющим параметром $\alpha = \frac{1}{2}(\theta - \frac{1}{2}\pi)$, $\min = \min(n, m)$, $\max = \max(n, m)$ [Abramochkin E.G., 2010]. Благодаря одинаковым сдвигам фазы Гуй у всех мод в разложении (1) сЛГ-пучок сохраняет структурную устойчивость при распространении.

Для сЛГ-пучка получено выражение удельного ОУМ ℓ_z как функции ε и θ :

$$\ell_z = \ell \cdot \frac{1 + 2\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}(2n+\ell)\theta\right) \cos^\ell\left(\frac{1}{2}\theta\right) P_n^{(0,\ell)}(\cos\theta) + \varepsilon^2 \cos\theta}{1 + 2\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}(2n+\ell)\theta\right) \cos^\ell\left(\frac{1}{2}\theta\right) P_n^{(0,\ell)}(\cos\theta) + \varepsilon^2}. \quad (4)$$

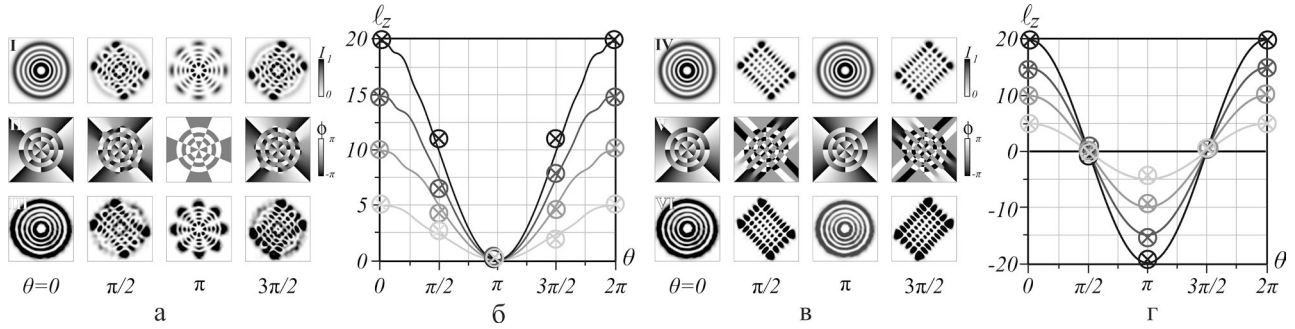


Рисунок 1 – (а, в) Теоретические (I, IV) и экспериментальные (III, VI) распределения интенсивности, а также соответствующие фазовые распределения (II, V) сЛГ-пучка с параметрами $n = 4$, $\ell = 4$ при изменении фазового параметра $\theta \in (0, 3\pi/2)$ для (а) $\varepsilon = 1$ и (в) $\varepsilon = 100$. (б, г) Зависимости ОУМ $\ell_z(\theta)$ от фазового параметра $\theta \in (0, 2\pi)$ для сЛГ-пучков с $n = 0$ и $\ell = 5, 10, 15$ и 20 при (б) $\varepsilon = 1$ и (г) $\varepsilon = 100$

На рисунке 1б,г показаны зависимости ОУМ сЛГ-пучка от фазового параметра, рассчитанные по (4), для двух режимов: $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 100$ при $n = 0$. Для $\varepsilon = 1$ ОУМ обращается в нуль при $\theta = \pi$ (см. рисунок 1б) и достигает максимума при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$. Как только $\varepsilon > 1$, этот нуль расщепляется на две симметричные точки (см. рисунок 1г). По мере роста ε они смещаются к $\theta = \pi/2$ и $3\pi/2$. В то же время значения ОУМ стремятся к максимуму при $\theta = 0$ и 2π . Для $n \neq 0$ появляются выраженные осцилляции $\ell_z(\theta)$ (см. рисунок 3а). Её частота возрастает при увеличении расхождения между радиальным n и азимутальным ℓ числами [1].

Во второй части главы рассматривается преобразование сЛГ-пучка после цилиндрической линзы с фокусным расстоянием f_{CL} (простой астигматизм), как показано на рисунке 2а.

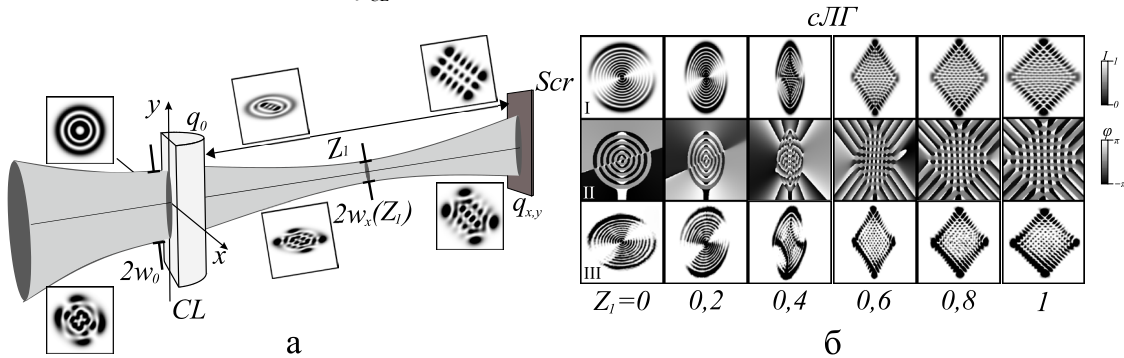


Рисунок 2 – (а) Эскиз астигматической оптической системы с цилиндрической линзой (CL). (б) Распределение интенсивности сЛГ пучка: (I) теоретические и (III) экспериментальные, а также соответствующие (II) фазовые распределения, иллюстрирующие эволюцию пучка при астигматическом преобразовании пучка с $n = 10$, $\ell = 1$, $\varepsilon = 1$, $\theta = 0,99\pi$ и $z_0 = 1$ м, $f_{CL} = 0,5$ м

В параксиальном приближении с использованием ABCD-матриц получено выражение для комплексной амплитуды астигматического сЛГ-пучка (далее асЛГ-пучок) [2, 3]:

$$asLG_{n,\ell}(x,y,Z_1|\varepsilon,\theta) = \frac{1}{\sqrt{\bar{w}_x(Z_1)\bar{w}_y(Z_1)}} \exp\left\{-i\left[(2n+\ell+1/2)\left[\Gamma_x(Z_1)+\Gamma_y(Z_1)\right]\right]\right\} \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2}n!} \times \\ \times \sum_{j=0}^{2n+\ell} C_j H_{2n+\ell-j}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\bar{w}_x(Z_1)}\right) H_j\left(\frac{\sqrt{2}y}{\bar{w}_y(Z_1)}\right) \exp\left(i\left[\frac{x^2}{\bar{q}_x(Z_1)}+\frac{y^2}{\bar{q}_y(Z_1)}\right]\right), \quad (5)$$

где H_m – многочлен Эрмита, $w_0 = \sqrt{2z_0/k}$, $Z_1 = z_1/z_0$, $\kappa_x = z_0/f_{CL}$, $x \rightarrow x/w_0$, $y \rightarrow y/w_0$, $C_j = (2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-\ell)}(0) \varepsilon_k \exp(ik\Gamma_{xy}(Z_1))$, $\bar{w}_x = w_x/w_0$, $\bar{w}_y = w_y/w_0$ и

$$\bar{q}_x = \frac{[Z_1(\kappa_x^2+1)-\kappa_x]-i}{\kappa_x^2+1}, \quad \bar{q}_y = Z_1-i, \quad (6)$$

$$\Gamma_{xy}(Z_1) = \Gamma_y(Z_1) - \Gamma_x(Z_1), \quad \Gamma_x(Z_1) = \frac{1}{2} \arg(1-\kappa_x Z_1 + i Z_1), \quad \Gamma_y(Z_1) = \frac{1}{2} \arg(1+i Z_1), \quad (7)$$

$$w_x^2(Z_1) = w_0^2[(1-Z_1\kappa_x)^2 + Z_1^2], \quad w_y^2(Z_1) = w_0^2(1+Z_1^2). \quad (8)$$

Выражение (5) для комплексной амплитуды асЛГ-пучка совпадает с результатами Бекшаева и соавторов для случая $n=0$ [Bekshaev A.Ya., 2004]. На рисунке 2 представлена эволюция распределения интенсивности ЛГ- и сЛГ-пучка. В плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы ЛГ-мода преобразуется в ЭГ-моду, при этом число нулей вдоль координатных осей позволяет определить топологический заряд (ТЗ) исходной ЛГ-моды, как показано на рисунке 2 [Volyar A.V., 2020; Kotlyar V.V., 2022].

На рисунке 3 представлены зависимости ОУМ $\ell_z(\theta)$ сЛГ-пучка от управляющего фазового параметра θ . При $\varepsilon=1$ в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы формируются два резких всплеска ОУМ при $\theta \approx 0,97$ и $\theta \approx 1,03\pi$, в областях которых ОУМ стремится к половине радиального числа $\ell_z \rightarrow n/2$ (см. рисунок 3б) [3–5]. При увеличении амплитудного параметра зависимость ОУМ $\ell_z(\theta)$ асЛГ-пучка сглаживается (см. рисунок 3г), принимая нулевые значения при $\theta = 0, \pi, 2\pi$ и достигая максимума и минимума при $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/4$ соответственно.

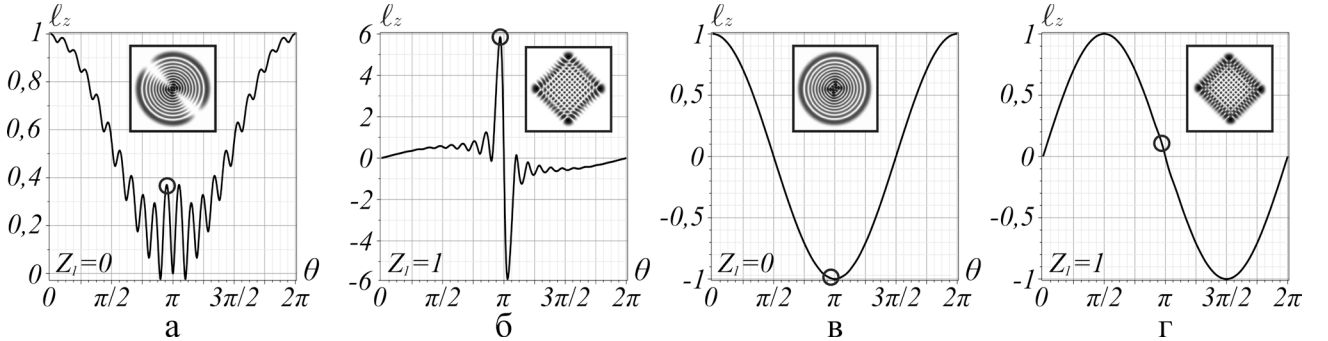


Рисунок 3 – Зависимости ОУМ $\ell_z(\theta)$ от управляющего фазового параметра θ для сЛГ-пучков с $n=10$, $\ell=1$ и $z_0=1$ м при амплитудных параметрах: (а, б) $\varepsilon=1$ и (в, г) $\varepsilon=10^3$. Графики (а, в) соответствуют входной плоскости при $Z_1=0$, а графики (б, г) плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы при $Z_1=1$ ($z_1=2f_{CL}=1$ м) с $f_{CL}=0,5$ м

В третьей части главы рассматривается общий астигматизм, возникающий при повороте оптических осей линзы относительно осей пучка. В такой системе появляется дополнительная степень свободы, позволяющая управлять как ОУМ, так и пространственной структурой пучка. Благодаря этому становится возможной реализация условий, при которых ОУМ достигает значения $\ell_z^{\max} = n + \ell$ при сохранении устойчивой структуры пучка.

Рассмотрим случай прохождения пучка через цилиндрическую линзу с фокусным расстоянием f_{CL} , повернутую на угол β . Действие линзы описывается фазовым множителем:

$\exp\left(-\frac{ik'}{2f_{CL}}[x\cos\beta - y\sin\beta]^2\right)$. При $\alpha = -\beta$ амплитуда сЛГ-пучка (1) после цилиндрической линзы принимает вид:

$$asLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta, \beta) = (-1)^n / (2^{n+\ell} n!) \frac{1}{\sqrt{\bar{w}_x \bar{w}_y}} \times \\ \times \sum_{j=0}^{2n+\ell} (-1)^j \left\{ \sum_{k=0}^{2n+\ell} (-i)^k c_k^{(n,n+\ell)} (\pi/4) \varepsilon_k c_j^{(2n+\ell-k,k)} (-\beta) \exp(ik\Gamma_{xy}) \right\} HG_{2n+\ell-j,j}(\mathbf{R}_\phi \mathbf{r}), \quad (9)$$

где $\mathbf{r} = (x/\bar{w}_x, y/\bar{w}_y)$, $\bar{w}_x$, $\bar{w}_y$ – безразмерные радиусы перетяжки пучка вдоль осей x и y , рассчитанные по формулам (8), Γ_{xy} – разность фаз Гуи, определяемая в формулах (7), а $\bar{q}_x(Z_1)$ и $\bar{q}_y(Z_1)$ – комплексные параметры пучка, выраженные через матрицы ABCD, как указано в формулах (6).

Выражение для удельного ОУМ:

$$\ell_z(\varepsilon, \theta, \phi, Z_1) = 2 \sum_{j=0}^{2n+\ell-1} (j+1)!(2n+\ell-j)! C_j^* C_{j+1} / \sum_{j=0}^{2n+\ell} j!(2n+\ell-j)! C_j^* C_j. \quad (10)$$

где амплитуды мод $C_j = (-1)^j \sum_{k=0}^{2n+\ell} (-i)^k c_k^{(n,n+\ell)} (\pi/4) \varepsilon_k c_j^{(2n+\ell-k,k)} (-\beta) \exp(ik\Gamma_{xy})$.

Максимумы ОУМ для различных n , ℓ и фазового параметра θ достигаются при повороте цилиндрической линзы $\beta = \pi/4$, причём первый всплеск возникает уже при малых $\theta \approx 0$ (рисунок 4а). На рисунке 4а показано смещение резких всплесков с θ : так, при $n = \ell = 4$ всплеск наблюдается при $\theta = 0,236$, а при $n = \ell = 12$ при $\theta = 0,062$. Это означает, что даже незначительное нарушение осевой симметрии ЛГ-моды, вызванное общим астигматизмом, приводит к нарушению баланса между положительными и отрицательными вихревыми ТЗ в диполях, ОУМ резко возрастает, становится порядка суммы радиального и азимутального чисел: $\ell_z \sim n + \ell$ [5-7].

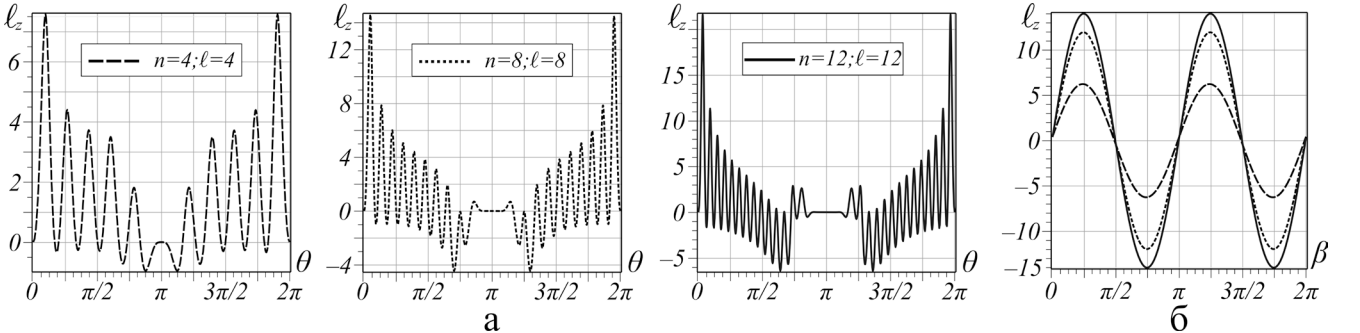


Рисунок 4 – Кривая ОУМ $\ell_z(\theta)$ аСЛГ-пучка: (а) $\ell_z(\theta, \beta = \pi/4, Z_1 = 1)$ для одинаковых квантовых чисел $n = \ell = 4, 8, 12$; (б) $\ell_z(\beta, Z_1 = 1)$ при $n = \ell = 4$, $\theta = 0,236$; $n = \ell = 8$, $\theta = 0,12$ и $n = \ell = 12$, $\theta = 0,078$. Во всех случаях использованы параметры: $z_0 = 1$ м, $f_{CL} = 0,5$ м

Согласно рисунку 4б, поворот осей цилиндрической линзы на $\Delta\beta = \pi/2$ приводит к инверсии знака ОУМ, что согласуется с ранее полученными результатами [6].

При простом астигматизме ($\beta = 0$ или $\pi/2$) аСЛГ-пучок сохраняет внутреннюю структуру при строгом согласовании параметров пучка и системы. В общем астигматизме ($\beta \neq 0$) такое согласование недостижимо, нарушается подобие масштабов по осям x и y , что приводит к потере осевой симметрии. Однако реализуется случай адиабатического следования [6,7]: деформированная картина интенсивности в ограниченном диапазоне β поворачивается вслед за осью астигматического элемента, а характер отклика задают фазовый параметр θ и направление вращения.

На рисунке 5 представлены ключевые проявления этого случая: при согласованном сочетании знака ТЗ ℓ и направления изменения β структура пучка сохраняется, что

подтверждается ростом коэффициента корреляции η . При противоположных знаках наблюдается ускоренная перестройка картины интенсивности и уменьшение η . В окрестности критических значений $\theta = 3\pi/4$ и $3\pi/4$ перестройка выражена сильнее, и структура пучка стремится к распределению ЭГ-моды, однако ориентация структуры интенсивности продолжает следовать за осью астигматизма до границы соответствующего диапазона β .

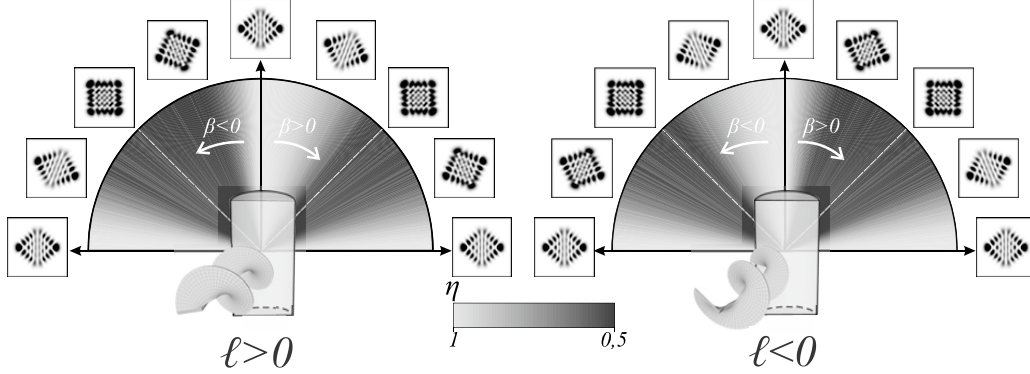


Рисунок 5 – Моделирование структуры асЛГ-пучка после вращения цилиндрической линзы для $n = 4; \ell = \pm 1$. Картина интенсивности (инверсия) повторяет вращение оси цилиндрической линзы для $\ell > 0, \beta > 0$ и $\ell < 0, \beta < 0$, в то время как при $\ell > 0, \beta < 0$ и $\ell < 0, \beta > 0$ картина интенсивности быстро изменяется

Во второй главе получены явные выражения для матрицы моментов интенсивности второго порядка сЛГ пучка, разработан экспериментальный метод измерения орбитальных параметров Стокса. В качестве исходного объекта вводится 4D матрица моментов интенсивности:

$$\mathbf{P}_{sLG} = \frac{1}{J_{00}} \int \begin{pmatrix} \mathbf{r}\mathbf{r}^T & \mathbf{r}\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p}\mathbf{r}^T & \mathbf{p}\mathbf{p}^T \end{pmatrix} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r} d\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & M_{x\xi} & M_{x\eta} \\ W_{xy} & W_{yy} & M_{y\xi} & M_{y\eta} \\ M_{x\xi} & M_{y\xi} & U_{\xi\xi} & U_{\xi\eta} \\ M_{x\eta} & M_{y\eta} & U_{\xi\eta} & U_{\eta\eta} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где J_{00} – полная интенсивность пучка, а $\mathbf{W}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{U}$ – координатная субматрица, субматрица кручения пучка и субматрица расходимости пучка, соответственно. Выявлено, что для сЛГ-пучков выполняются простые соотношения симметрии. Субматрица $\mathbf{U}$ коллинеарна $\mathbf{W}$ и в нормированных единицах пропорциональна ей, а ненулевые элементы $\mathbf{M}$ локализованы поперёк главной диагонали, явные выражения для матрицы моментов (11) можно записать как:

$$\mathbf{P}_{sLG} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}K_x & \text{Re } M & 0 & 2\text{Im } M \\ \text{Re } M & \frac{1}{2}K_y & -2\text{Im } M & 0 \\ 0 & -2\text{Im } M & 2K_x & 4\text{Re } M \\ 2\text{Im } M & 0 & 4\text{Re } M & 2K_y \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$K_x = \frac{\pi}{2^{\ell+1}n!} \sum_{k=0}^{2n+\ell} \left(2n+\ell-k+\frac{1}{2}\right) (2n+\ell-k)! k! \left| c_k^{(n,n+\ell)}(\pi/4) \right|^2, \quad (13)$$

$$K_y = \frac{\pi}{2^{\ell+1}n!} \sum_{k=0}^{2n+\ell} \left(k+\frac{1}{2}\right) (2n+\ell-k)! k! \left| c_k^{(n,n+\ell)}(\pi/4) \right|^2, \quad (14)$$

$$M = -i \frac{\pi}{2^{\ell+2}n!} \sum_{k=0}^{2n+\ell-1} (2n+\ell-k)(k+1)! c_k^{(n,n+\ell)*}(\pi/4) c_{k+1}^{(n,n+\ell)*}(\pi/4), \quad (15)$$

а коэффициенты определяются как:

$$c_k^{(n,n+\ell)}(\pi/4) = (2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(\pi/4) \varepsilon_k(\varepsilon, \theta). \quad (16)$$

Такая структура матрицы (12) существенно сокращает число независимых степеней свободы и позволяет экспериментально определить её элементы. Орбитальные параметры Стокса, введённые в работе Алиевой и Бастиаанса [Alieva T., 2009], в рассматриваемом случае могут быть выражены через измеряемые моменты интенсивности следующим образом:

$$S_0 = \frac{1}{2}(W_{xx}(z=0) + W_{yy}(z=0)) = \frac{1}{J_{00}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} x^2 I(x, y, z=0) dx dy + \int_{\mathbb{R}^2} y^2 I(x, y, z=0) dx dy \right), \quad (17)$$

$$S_1 = \frac{1}{2}(W_{xx}(z=0) - W_{yy}(z=0)) = \frac{1}{J_{00}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} x^2 I(x, y, z=0) dx dy - \int_{\mathbb{R}^2} y^2 I(x, y, z=0) dx dy \right), \quad (18)$$

$$S_2 = W_{xy}(z=0) + W_{yx}(z=0) = \frac{1}{J_{00}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (x+y)^2 I(x, y, z=0) dx dy - \int_{\mathbb{R}^2} (x-y)^2 I(x, y, z=0) dx dy \right). \quad (19)$$

Параметр S_0 характеризует общую перетяжку пучка, S_1 – асимметрию распределения интенсивности вдоль осей x и y , а S_2 – асимметрию вдоль диагональных направлений $\varphi = \pm \pi/4$.

Третий орбитальный параметр Стокса S_3 определяется по второму распределению интенсивности, зарегистрированному в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы, на основе принципа взаимности между ОУМ и W_{xy} [8, 9]:

$$S_3 = \ell_z = \frac{1}{J_{00}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (x+y)^2 I(x, y, z=2f_{CL}) dx dy - \int_{\mathbb{R}^2} (x-y)^2 I(x, y, z=2f_{CL}) dx dy \right). \quad (20)$$

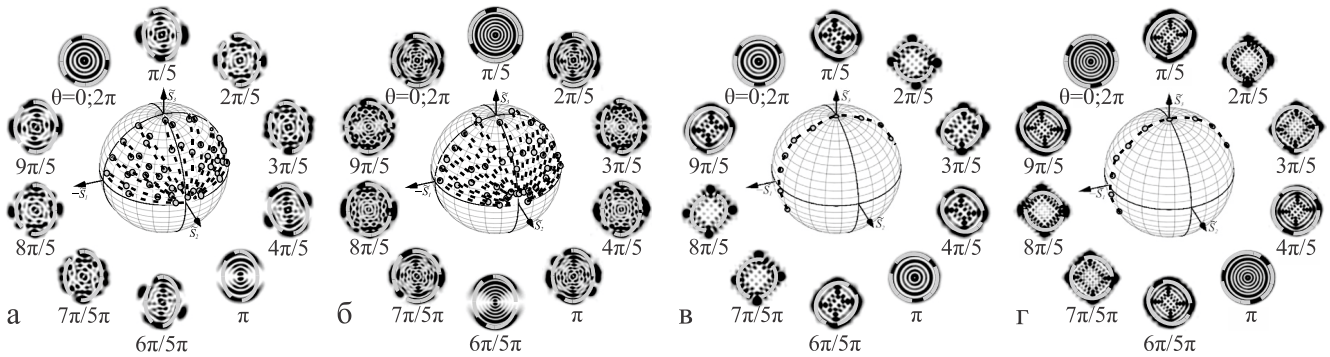


Рисунок 6 – Пространственное отображение параметризованных состояний сЛГ-пучков на орбитальной сфере Пуанкаре: экспериментальные траектории, (а,в) $n=4$, $\ell=1$, $\varepsilon=1$; (б,г) $n=6$, $\ell=1$, $\varepsilon=10^4$. Для каждой точки приведены соответствующие распределения интенсивности. На фоне показаны ассоциированные эллипсы субматрицы $\mathbf{W}$ (серая пунктирная), построенные при помощи программ для ЭВМ [10,11]

С физической точки зрения цилиндрическая линза в плоскости двойного фокуса реализует орбитальный аналог фазового сдвига порядка $\pi/2$, связанного с накоплением разности фаз Гуи по ортогональным координатам, что функционально эквивалентно действию четвертьволновой пластинки в поляризационной оптике. В результате фазовая информация пучка преобразуется в измеряемую координатную корреляцию. Тем самым все четыре параметра (S_0, S_1, S_2, S_3) однозначно определяются по двум изображениям интенсивности, при этом не требуется восстановление фазового фронта и предварительной информации о модовом составе. Нормированный вектор $\mathbf{s} = (S_1, S_2, S_3)/S_0$ задаёт точку на орбитальной сфере Пуанкаре. Радиус $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ инвариантен для всех систем первого порядка. Геометрическая интерпретация задаётся сферическими координатами:

$$S_1 = S \cos \beta \cos 2\phi, \quad S_2 = S \cos \beta \sin 2\phi, \quad S_3 = S \sin \beta, \quad (21)$$

где ϕ описывает поворот картины интенсивности, а β определяет величину и знак ОУМ. Угол поворота характеристического эллипса:

$$\tan 2\varphi = \frac{2S_2}{S_1} = \frac{2J_{00}W_{xy}}{J_{00}(W_{xx} - W_{yy})}. \quad (22)$$

Третья глава посвящена астигматическому преобразованию сЛГ-пучков в оптической системе «сферическая – цилиндрическая – сферическая линза» и экспериментальному измерению орбитальных параметров Стокса. Схема такой установки показана на рисунке 7.

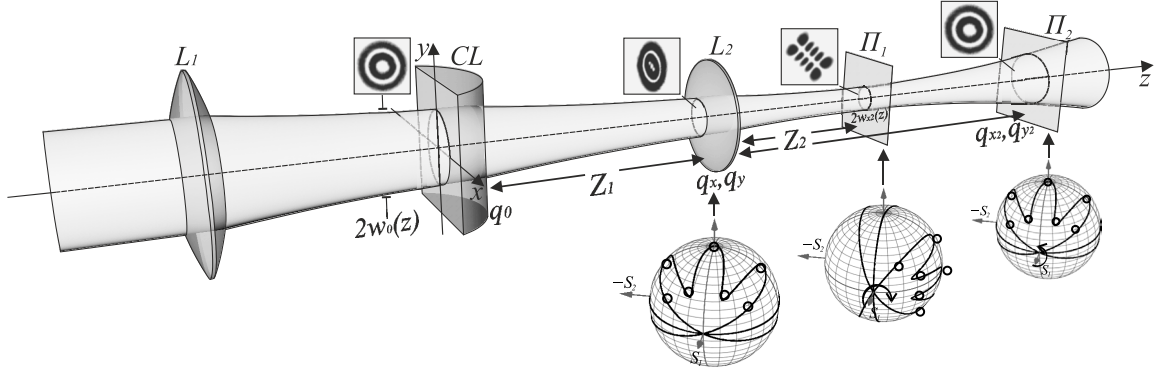


Рисунок 7 – Эскиз оптической системы, состоящей из двух сферических линз L_1 , L_2 и цилиндрической линзы CL , расположенной между ними [2,12]

Получена комплексная амплитуда пучка после прохождения такой системы, которая описывается ABCD-формализмом:

$$asLG_{n,\ell}(x,y,z|\varepsilon,\theta) = \frac{1}{\sqrt{\bar{w}_{x2}\bar{w}_{y2}}} \exp\left(i\left[\frac{x^2}{\bar{q}_{x2}} + \frac{y^2}{\bar{q}_{y2}}\right]\right) e^{i\Phi_{n,\ell}} \sum_{k=0}^{2n+\ell} C_k H_{2n+\ell-k}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\bar{w}_{x2}}\right) H_k\left(\frac{\sqrt{2}y}{\bar{w}_{y2}}\right), \quad (23)$$

где $x, y \rightarrow x/w_0, y/w_0$, $C_k = (2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-\ell)}(0) \varepsilon_k \exp(ik\Gamma_{xy})$, $\Phi_{n,\ell} = (2n+\ell+1/2)\Gamma_x/2 + \Gamma_y/2$, $Z_2 = z_2/z_0$

$$\bar{q}_{x2} = \frac{\bar{q}_x}{-\kappa_{sh}\bar{q}_x + 1} + Z_2, \quad \bar{q}_{y2} = \frac{(1 - Z_2\kappa_{sh})(Z_1 - i) + Z_2}{1 + i\kappa_{sh}(iZ_1 + 1)}, \quad \kappa_{sh} = z_0/f_{L2},$$

$$\frac{1}{\bar{w}_{x2}^2} = -\operatorname{Re}\left(\frac{i}{\bar{q}_{x2}}\right), \quad \frac{1}{\bar{w}_{y2}^2} = -\operatorname{Re}\left(\frac{i}{\bar{q}_{y2}}\right), \quad (24)$$

$$\Gamma_x = \arg\sqrt{\frac{1}{\bar{q}_{x2}}}, \quad \Gamma_y = \arg\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{q}_{y2}}}\right), \quad \Gamma_{xy} = \Gamma_x - \Gamma_y. \quad (25)$$

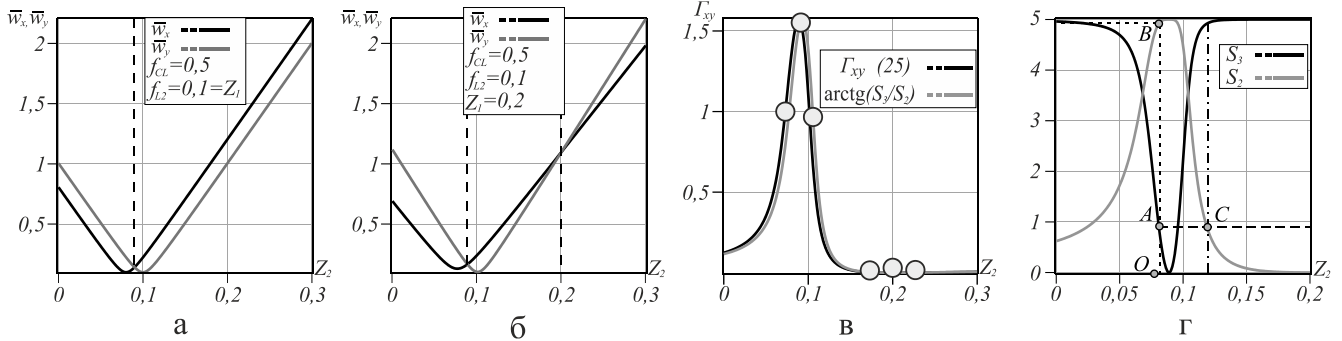


Рисунок 8 – Зависимость: (а, б) радиусов перетяжек $\bar{w}_x$ и $\bar{w}_y$ как функции Z_2 при разных Z_1 сферической линзы; (в) фаза Гуй Γ_{xy} : чёрная кривая по формуле (25) и серая как $\arctg(S_3/S_2)$;

(г) пунктирные и точечные линии в точках пересечения с кривыми S_2 и S_3 показывают положения первой и второй плоскостей измерения $S_3 = \ell_z$ и $S_2 = 4W_{xy}$ для $n=3$, $\ell=5$

При условии, когда $Z_1 > f_{L2}$, формируются две критические плоскости $Z_2 = \Pi_{1,2}$, определяемые одновременным выполнением условий равенства перетяжек $\bar{w}_x(Z_2 = \Pi_{1,2}) = \bar{w}_y(Z_2 = \Pi_{1,2})$ (24) и разностью фазы Гуй Γ_{xy} (25), как показано на рисунке 8а-в. В первой плоскости $Z_2 = \Pi_1$ наблюдается узкий всплеск, при этом фаза Гуй

$\Gamma_{xy}(Z_2 = \Pi_1 = 0,09) = \pi/2$, и реализуется преобразование ЛГ-моды в ЭГ-моду. Во второй плоскости $Z_2 = \Pi_2$ выполняется $\Gamma_{xy}(Z_2 = \Pi_2 = 0,2) = 0$, и исходная структура ЛГ-пучка восстанавливается (см. рисунки 7, 8) [12].

В этих условиях траектория состояний на орбитальной сфере Пуанкаре для сЛГ-пучка (для $n=3$, $\ell=5$) при $Z_2=0$ имеет форму «трёхлистника» (см. рисунок 7). Центральный лепесток имеет максимум ОУМ. При переходе в первую критическую плоскость $Z_2 = \Pi_1$ траектория плавно поворачивается вокруг оси S_1 на угол равный $\pi/2$. Центральный лепесток выходит к экватору и $S_3 \rightarrow 0$. При этом W_{xy} достигает максимума. Наблюдается эффект самосогласования: $\ell_z \rightarrow 4W_{xy}$. При переходе от первой $Z_2 = \Pi_1$ ко второй $Z_2 = \Pi_2$ критической плоскости происходит обратный поворот траектории, приводящий к её полному совпадению с исходной, что соответствует самовосстановлению структуры [13]. Выполняются инварианты:

$$Inv_1 = S_1(Z_1, Z_2) = const, \quad (26)$$

$$Inv_2 = S_2^2(Z_1, Z_2) + 16W_{xy}^2(Z_1, Z_2) = const. \quad (27)$$

На основе перечисленных свойств оптической системы разработан модифицированный метод измерения орбитальных параметров Стокса, который опирается на выбор критических плоскостей Π_1 и Π_2 . Для сЛГ-пучка параметры S_1 и S_2 измеряют во второй критической плоскости $Z_2 = \Pi_2$. Для этого достаточно одного снимка картины интенсивности и расчёта по формулам (18-19). Параметр $S_3 \equiv \ell_z$ определяют в первой плоскости $Z_2 = \Pi_1$ из соотношения взаимности $\ell_z = 4W_{xy}$ (20) [12,14].

Для асЛГ-пучка, пользуясь эффектом самовосстановления перед цилиндрической линзой и в её двойном фокусе, критические плоскости меняются местами: S_1 и S_2 измеряют в $Z_2 = \Pi_1$ по (18-19), а S_3 в $Z_2 = \Pi_2$ по (20). Для нахождения плоскостей использовали программу для ЭВМ [11], в которой согласно ISO 11146-2:2021 вычислялись параметры эллипса интенсивности, включая угол наклона его главной оси. Первая плоскость расположена в окрестности фокуса сферической линзы, где выполняется условие разности фаз Гуй $\Gamma_{xy}(Z_2 = \Pi_1) = \pi/2$. Во второй плоскости эллипс интенсивности переходит в окружность и равен $Q(Z_2 = \Pi_2) = 1$ [12,13].

Численно и экспериментально установлено существование инварианта:

$$LW(\varepsilon, \theta, Z_2) = \pm \sqrt{[S_2(\varepsilon, \theta, Z_2)]^2 + [S_3(\varepsilon, \theta, Z_2)]^2} = const, \quad (28)$$

Инвариант сохраняется при вариациях амплитудного и фазового параметров сЛГ-пучка (рисунок 9) [15].

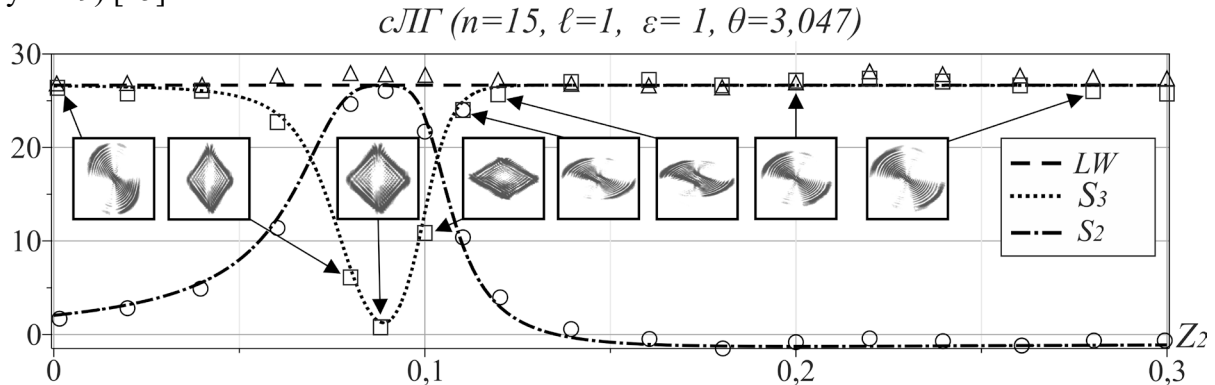


Рисунок 9 – Эволюция орбитальных параметров Стокса S_2 , S_3 и инварианта LW определяемого выражением (28), вдоль оси распространения сЛГ-пучка при $f_{CL} = 0,5$ м, $f_{L2} = 0,1$ м, $z_0 = 1$ м. На вставках приведены картины интенсивности пучков в соответственных плоскостях. Круги, квадраты и треугольники указывают на экспериментальные точки

Представлены условия, при которых полный ОУМ структурированного пучка сохраняется при распространении через астигматическую оптическую систему, с возможностью прямого измерения полученных теоретических предсказаний. В соответствии с работами Ананьева и Бекшаева [Анан'ев Ю.А., 1994; Bekshaev A.Ya., 2003] использование квадратичного фазового элемента корректирует действие астигматизма, а полный ОУМ представляется в виде суммы вихревой

$$\Lambda_V(z) = \ell \left[\left(z / z_0 \right)^2 + \left(1 - z / f_x \right) \left(1 - z / f_y \right) \right] / \Re \quad \text{и} \quad \text{астигматической}$$

$$\Lambda_A(z) = (\ell / 2) \left(z / f_x - z / f_y \right)^2 / \Re \quad \text{составляющих, где} \quad \Re(z) = (z / z_0)^2 + (1 - z / f_x)^2 / 2 + (1 - z / f_y)^2 / 2.$$

При этом полный ОУМ является инвариантом распространения и удовлетворяет соотношению:

$$\ell_{total}(z) = \Lambda_V(z) + \Lambda_A(z). \quad (29).$$

Отображение состояний астигматического сЛГ-пучка на орбитальную сферу Пуанкаре показывает, что траектория на сфере вращается вокруг оси S_1 без изменения охватываемой площади. Отсюда следует сохранение инварианта (28). Сравнение этих двух подходов демонстрирует рисунок 10.

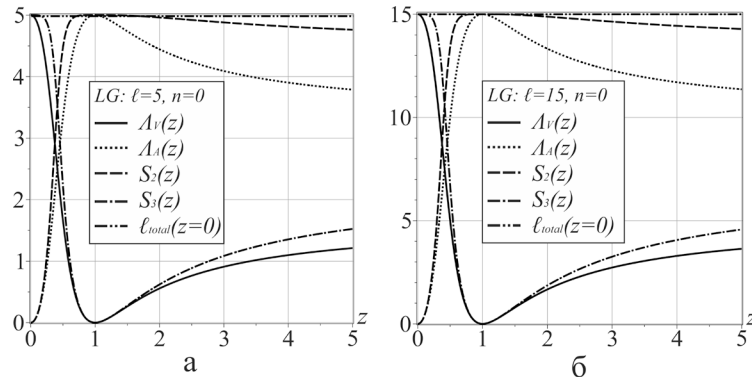


Рисунок 10 – Эволюция вихревого $\Lambda_V(z)$, астигматического $\Lambda_A(z)$, общего ОУМ $\ell_{total}(z=0)$ и их сравнение с $S_2(z)$, $S_3(z)$, после цилиндрической линзы с $f_{CL}=0,5$ м, $z_0=1$ м

Несмотря на различие в форме зависимостей $\Lambda_V(z)$, $\Lambda_A(z)$ и $S_2(z)$, $S_3(z)$, соотношения (28) и (29) показывают, что соответствующие инварианты сохраняются и равны полному ОУМ пучка на входе в цилиндрическую линзу. Однако это не значит, что поперечный момент интенсивности $S_2(z)=4W_{xy}(z)$ и астигматическая составляющая ОУМ $\Lambda_A(z)$ описывают один и тот же астигматический процесс, хотя величина $W_{xy}(z)$ характеризует асимметрию пучка [Nemes G., 1994]. С нашей точки зрения, более надёжным методом определения полного ОУМ является коррекция с помощью сферической линзы, реализующей Фурье-преобразование [12].

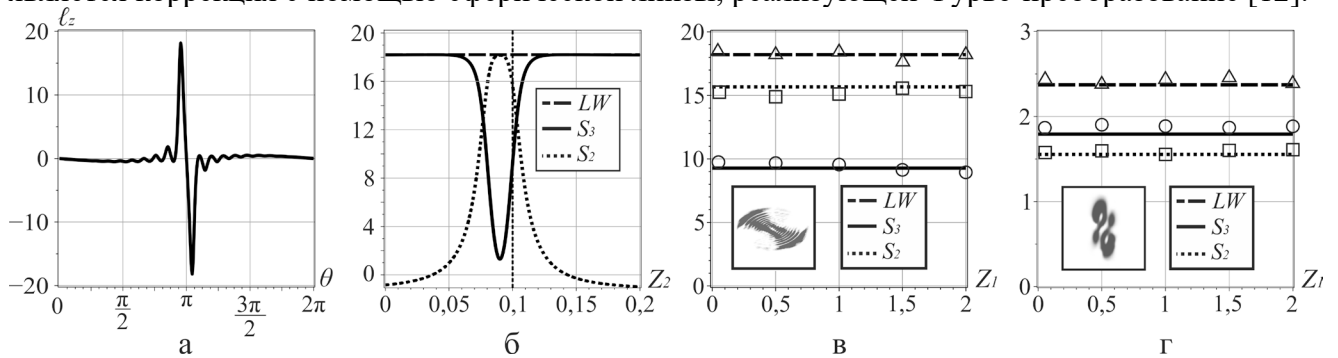


Рисунок 11 – Фурье-инварианты астигматического преобразования сЛГ пучка: (а) кривая ОУМ от фазового θ -параметра; (б) эволюция орбитальных параметров Стокса $S_2(Z_2)$, $S_3(Z_2)$ и полного ОУМ $LW(Z_2)$, где пунктирная линия указывает на Фурье-плоскость; Фурье-инварианты ОУМ для (в) $n=10$, $\ell=1$, $\varepsilon=-1$, $\theta=3$ и (г) $n=1$, $\ell=1$, $\varepsilon=1$, $\theta=3,045$, где круги, квадраты и треугольники обозначают экспериментальные точки. На выноске – картины интенсивности при первом всплеске ОУМ для $Z_1=Z_2=f_{sh}=0,1$

В работе [Fang X., 2020] предложен особый вид структурированного пучка, содержащий вихревую эллиптическую и астигматическую безвихревую моды с согласованными радиусами перетяжек. Установлено сохранение суммы вихревого и астигматического ОУМ в дальней зоне дифракции, что стало основанием термина «Фурье-инвариантные гауссовы пучки».

Нами показано, что Фурье-преобразование сЛГ-пучка подавляет астигматическую составляющую ОУМ и восстанавливает в Фурье-плоскости исходный пучок с тем же распределением интенсивности и значением ОУМ. Стандартное Фурье-преобразование с помощью сферической линзы реализуется при таком положении линзы, когда объект и его Фурье-образ располагаются на расстояниях, равных фокусному расстоянию линзы, т.е. для нашего случая на рисунке 7 это значит $Z_1 = Z_2 = f_{L2}$ [Bastiaans M.J., 2009].

Для наблюдения Фурье-инвариантов вдоль оси Z_1 после цилиндрической линзы необходимо зафиксировать положение плоскости наблюдения $Z_2 = f_{L2} = 0,1$ и перемещаться вдоль оси Z_1 . Оказалось, что Фурье-инвариантами являются не только общий ОУМ LW , но и второй S_2 и третий S_3 орбитальные параметры Стокса, как показано на рисунке 11в для $n=10$, $\ell=1$, $\varepsilon=1$, $\theta=3$ и на рисунке 11г для $n=1$, $\ell=1$, $\varepsilon=1$, $\theta=3,045$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены следующие основные научные результаты:

1. Разработан и экспериментально реализован метод прямого измерения орбитальных параметров Стокса структурированных пучков, основанный на анализе моментов интенсивности второго порядка в оптической системе первого рода. Метод требует регистрации двух распределений интенсивности – в фокусе сферической линзы и в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы – и позволяет определить все три орбитальных параметра Стокса. Полученный метод может быть использован для экспериментальной диагностики структурированных пучков света и анализа их орбитального углового момента.

2. В оптической системе первого порядка, состоящей из двух сферических линз и расположенной между ними цилиндрической линзы, выявлены две выделенные плоскости, в которых происходит преобразование пространственной структуры структурированных пучков Лагерра–Гаусса. Показано, что на орбитальной сфере Пуанкаре этим плоскостям соответствуют поворот траектории состояния пучка на 90° и её последующее обратное вращение, приводящее к восстановлению исходной структуры. Установлено, что при равенстве длины Рэлея гауссова пучка на входе цилиндрической линзы её удвоенному фокусному расстоянию указанные плоскости могут быть использованы для реализации модифицированного метода измерения орбитальных параметров Стокса. Полученные результаты могут быть использованы для экспериментальной диагностики структурированных пучков, контроля их орбитального углового момента, а также в задачах оптической связи, микроманипулирования и обработки информации.

3. Теоретически и экспериментально установлено, что астигматическая фаза Гуи определяет эволюцию состояния структурированного пучка при астигматическом преобразовании и выражается через орбитальные параметры Стокса соотношением $\arctan(S_3/S_2)$, где S_2 , S_3 – второй и третий орбитальные параметры Стокса. Установлено, что данная фаза является ключевой характеристикой, связывающей параметры интенсивности с орбитальными свойствами пучка, и может рассматриваться как фундаментальный инвариант астигматических преобразований.

4. Установлено, что при астигматическом преобразовании структурированных пучков Лагерра–Гаусса величина их орбитального углового момента определяется не только топологическим зарядом, но и радиальным числом. Показано, что астигматическое преобразование приводит к возникновению экстремальных значений орбитального углового момента, а поворот цилиндрической линзы позволяет управлять его величиной. Установлено сохранение инварианта астигматических преобразований $\sqrt{S_2^2 + S_3^2}$.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в изданиях, рекомендуемых ВАК РФ и индексируемых в международных базах данных Scopus и WoS

- [1] Bretsko, M.V. Orbital angular momentum of structured LG beams after astigmatic transformation / M.V. Bretsko, Ya.E. Akimova, A.V. Volyar, **S.I. Khalilov**, Yu.A. Egorov, A.O. Ivakhnenko // Optical Memory and Neural Networks. – 2023. – Vol. 32(Suppl. 1). – P. S75–S83.
- [2] Volyar, A.V. Orbital angular momentum burst control in astigmatic structured beams in ABCD-matrix transforms / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, Ya.E. Akimova // Computer Optics. – 2024. – Vol. 48(2). – P. 171–179.
- [3] Volyar, A.V. Structurally stable astigmatic vortex beams with super high orbital angular momentum (ABCD matrix approach) / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, Ya.E. Akimova // Photonics. – 2023. – Vol. 10(9). – 1048.
- [4] **Khalilov, S.I.** Astigmatic Laguerre–Gaussian beams with rapid oscillations of orbital angular momentum / **S.I. Khalilov**, M.V. Bretsko, S.I. Yakubov, S.N. Lapaeva, D.V. Maksimov, A.V. Volyar, Ya.E. Akimova // Optical Memory and Neural Networks. – 2024. – Vol. 33(Suppl. 1). – P. S189–S197.
- [5] Bretsko, M.V. Astigmatic structured Laguerre–Gaussian beams: Orbital angular momentum and its transformation / M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, S.I. Yakubov, D.V. Maksimov, A.V. Volyar, Ya.E. Akimova // Optical Memory and Neural Networks. – 2024. – Vol. 33(Suppl. 1). – P. S139–S145.
- [6] Volyar, A.V. Control of giant orbital angular momentum bursts of structured Laguerre–Gaussian beams in a medium with general astigmatism / A.V. Volyar, E.G. Abramochkin, M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, Ya.E. Akimova // Computer Optics. – 2024. – Vol. 48(1). – P. 35–46.
- [7] Volyar, A. General astigmatism of structured LG beams: Evolution and transformations of the OAM super-bursts / A. Volyar, E. Abramochkin, M. Bretsko, **S. Khalilov**, Ya. Akimova // Photonics. – 2023. – Vol. 10(7). – 727.
- [8] Volyar, A.V. Direct measurement of Stokes orbital parameters / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, Ya.E. Akimova // Computer Optics. – 2025. – Vol. 49(5). – P. 715–722.
- [9] Volyar, A. Simple direct measurement of the orbital Stokes parameters in structured vortex beams / A. Volyar, M. Bretsko, **S. Khalilov**, Ya. Akimova // Photonics. – 2024. – Vol. 11(11). – 1095.
- [10] Программа экспериментального определения орбитальных параметров Стокса лазерных пучков по двум распределениям интенсивности (сферический фокус / двойной фокус цилиндрической линзы) [Программа для ЭВМ] / М.В. Брецько, **С.И. Халилов**, Я.Е. Акимова, А.В. Воляр. – RU2025685861; заявл. 26.09.2025.
- [11] Программа определения эллипса интенсивности и угла его наклона по вторым моментам интенсивности лазерного пучка [Программа для ЭВМ] / М.В. Брецько, **С.И. Халилов**, Я.Е. Акимова, А.В. Воляр. – RU2025685862; заявл. 26.09.2025.
- [12] Volyar, A. Self-healing and self-matching effects in astigmatic structured beams as a basis for measuring orbital Stokes parameters / A. Volyar, M. Bretsko, **S. Khalilov**, Ya. Akimova // Applied Optics. – 2025. – Vol. 64(12). – P. 3241–3249.
- [13] Volyar, A.V. Measurement of the orbital Stokes parameters in structured astigmatic beams in critical planes of the first-order optical system / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, Ya.E. Akimova // Computer Optics. – 2025. – Vol. 49(6). – P. 876–884.
- [14] Khalilov, S.I. Measurement of orbital Stokes parameters of structured beams in critical planes of a first-order optical system / **S.I. Khalilov**, M.V. Bretsko, S.I. Yakubov, D.V. Maksimov, Ya.E. Akimova // Optical Memory and Neural Networks. – 2025. – Vol. 34(3). – P. S392–S401.
- [15] Volyar, A.V. Dynamics of the OAM in stable generalized structured Laguerre–Gaussian and rotated polygon beams in the astigmatic optical system / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, **S.I. Khalilov**, D.V. Maksimov // Optical Memory and Neural Networks. – 2025. – Vol. 34(3). – P. S543–S555.