

На правах рукописи

**Иванов Дмитрий Владимирович**

**МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ**

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Самара – 2026

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» на кафедре безопасности информационных систем.

**Научный консультант:**

**Жданов Александр Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет», профессор кафедры «Прикладная математика и информатика».

**Официальные оппоненты:**

**Ташлинский Александр Григорьевич**, доктор технических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский государственный технический университет», директор научно-исследовательского центра обработки цифровых изображений и сигналов «Сигнал»;

**Цыганова Юлия Владимировна**, доктор физико-математических наук, доцент, автономная некоммерческая организация высшего образования «Университет Иннополис», профессор Центра образовательных программ топ-уровня в сфере искусственного интеллекта;

**Щербаков Павел Сергеевич**, доктор физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук», главный научный сотрудник Лаборатории № 7 «Адаптивных и робастных систем им. Я. З. Цыпкина».

**Ведущая организация:**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет», г. Воронеж.

Защита состоится 9 октября 2026 г. в 10 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.379.08, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева», по адресу: 443086, Россия, г. Самара, ул. Московское шоссе, д. 34.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»: [https://ssau.ru/resources/dis\\_protection/ivanov](https://ssau.ru/resources/dis_protection/ivanov).

Автореферат разослан « » июля 2026 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук, доцент

А.В. Дорошин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Идентификация систем является одной из важнейших и активно развивающихся областей науки. Это подтверждается большим числом публикаций по данной тематике.

Основоположниками теории идентификации являлись Р.Т. Андерсен, Дж. Бокс, Р. Калман, К. Острем, П. Эйкхофф. В СССР развитие теории идентификации начали Н.С. Райбман и Я.З. Цыпкин.

В дальнейшем большой вклад в развитие теории идентификации внесли Л. Льюнг, Б.Т. Поляк, П. Стойка, Б. Фридландер, В.Н. Фомин и многие другие.

С начала 80-х годов XX века активно развиваются методы идентификации моделей динамических систем с ошибками по всем переменным, большой вклад в развитие методов идентификации таких систем внесли Дж. Голуб, А.И. Жданов, А.А. Ломов, И. Марковский, Б. де Мур, Т. Седерстрем, С. ван Хуффель и другие.

Тем не менее, в области идентификации существует большое количество нерешенных задач. Одна из таких задач – разработка методов идентификации для новых классов моделей. Одним из таких классов являются модели динамических систем дробного порядка. Известно, что многие реальные процессы и явления точнее описываются дифференциальными и разностными уравнениями дробного порядка. В связи с этим развитие методов идентификации систем дробного порядка является актуальной темой.

Развитием методов идентификации динамических систем дробного порядка занимались М. Aoun, J.-L. Battaglia, L.L. Lay, J. Lin, R. Malti, A. Oustaloup, S. Victor и другие.

Подавляющее число работ предполагает, что динамическая система дробного порядка не подвергается влиянию возмущений либо возмущение представляет собой ошибку в уравнении.

Реальные данные всегда являются неполными. Под неполными данными обычно понимаются данные с возмущениями, а также данные с пропусками. В диссертационном исследовании не рассматриваются проблемы, связанные с пропущенными данными.

Неполнота данных, связанная с возмущениями, может быть вызвана следующими причинами:

1. Неконтролируемыми возмущениями внешней среды.
2. Погрешностями в измерениях.
3. Неточностями используемых моделей.
4. Погрешностями округлений машинной арифметики.

Для систем дробного порядка при наличии помех во входных и выходных сигналах в настоящее время известны лишь методы на основе высших статистик (М. Chetoui), накладывающие значительные ограничения на сигналы и помехи. В связи с этим возникает задача создания новых методов

идентификации моделей систем дробного порядка при наличии помех во входных и выходных сигналах.

Идентификация систем дробного порядка связана с дополнительными вычислительными трудностями. Так как в таких системах наблюдается сильная долговременная зависимость от прошлых данных, задача идентификации обычно плохо обусловлена. Поэтому задача повышения вычислительной устойчивости созданных методов идентификации для моделей динамических систем дробного порядка является важнейшей задачей.

Данные задачи составляют научную проблему, имеющую важную теоретическую и практическую ценность. Решение этой проблемы приведет к расширению класса решаемых задач математического моделирования в различных областях.

**Целью** диссертационной работы является создание, теоретическое обоснование и реализация новых моделей дискретных стохастических систем дробного порядка и вычислительно устойчивых методов их идентификации. В соответствии с поставленной целью работы основными задачами исследований являются:

1. Разработка новых моделей дискретных динамических систем дробного порядка, обобщающих ранее известные модели.
2. Создание метода идентификации моделей линейных и нелинейных систем дробного порядка с использованием подхода на основе обобщенных полных наименьших квадратов.
3. Создание метода идентификации моделей линейных систем дробного порядка с использованием подхода на основе обобщенных инструментальных переменных.
4. Разработка рекуррентных алгоритмов идентификации моделей динамических систем, описываемых уравнениями с разностями дробного порядка при наличии помех наблюдений.
5. Разработка численно устойчивых вычислительных схем методов идентификации, нахождения оценок моделей линейных и нелинейных систем дробного порядка.
6. Создание комплекса программ, реализующего созданные методы идентификации, и исследование эффективности представленных в диссертации методов, алгоритмов и программ с помощью тестового статистического моделирования.

**Методы исследования.** В работе использованы теория вероятностей, в том числе теория оценивания, математическая статистика, теория оптимизации, вычислительная линейная алгебра, прикладное программирование.

**Научная новизна.** Все основные научные результаты диссертации являются новыми.

1. Предложены новые модели дискретных динамических систем дробного порядка:

– Модель дискретной линейной динамической системы дробного порядка на основе разностей дробного порядка и операторов сдвига назад целого порядка, обобщающая известные модели на произвольное число разностей и операторов сдвига назад.

– Модель дискретной билинейной динамической системы дробного порядка на основе разностей дробного порядка и операторов сдвига целого порядка, обобщающая модель дискретной билинейной динамической системы для случая разностей дробного порядка.

– Впервые предложен комплекс моделей дискретных динамических систем дробного порядка со следующими моделями шума:

– Модель ARX (Autoregression with exogenous input – авторегрессионная с экзогенными входными данными) дробного порядка с ошибками в переменных, обобщающая модели ошибки в переменных и модели ошибки в уравнении.

– Линейная модель дробного порядка с дробно-дифференцированными ошибками в переменных, обобщающая известную модель, где ошибки в переменных моделируются белым шумом.

– ARX-модель Винера дробного порядка с шумом во входном сигнале, обобщающая ARX-модель Винера дробного порядка.

2. Создан и теоретически обоснован метод на основе обобщенных полных наименьших квадратов для идентификации параметров моделей линейных и некоторых классов нелинейных (Гаммерштейна, Винера, билинейных) систем, описываемых уравнениями с разностями дробного порядка, для шумов различных классов: мартингал-разностей, белого шума, автокоррелированных помех, дробного шума.

Созданы методы для различных частных случаев данных систем и помех. Доказана сильная состоятельность получаемых оценок параметров.

Предложенный метод позволяет с помощью единого подхода проводить идентификацию различных классов моделей динамических систем дробного порядка с разными моделями шума, в том числе для ранее не рассматриваемых моделей.

3. Создан и теоретически обоснован метод на основе обобщенных инструментальных переменных для идентификации моделей линейных динамических систем, описываемых уравнениями с разностями дробного порядка, при неполной информации об автокорреляционных функциях помех. Доказана сильная состоятельность получаемых оценок параметров.

Предложенный метод позволяет проводить идентификацию параметров моделей динамических систем дробного порядка с ранее не рассматриваемыми моделями шума.

4. Впервые разработан алгоритм для идентификации параметров авторегрессии с разностями дробного порядка с аддитивным шумом в наблюдениях при отсутствующей информации о дисперсии аддитивного шума и отношении дисперсий помех.

5. Разработаны рекуррентные алгоритмы идентификации моделей динамических систем на основе обобщенных полных наименьших квадратов. Доказана сильная состоятельность получаемых оценок параметров.

6. Созданы численно устойчивые алгоритмы для разработанных методов идентификации на основе новой расширенной системы уравнений, эквивалентной смещенной нормальной системе уравнений, отличающейся от известной расширенной системы меньшей размерностью и отсутствием комплексных коэффициентов.

7. Разработана неявная итерационная схема регуляризации задачи полных наименьших квадратов, имеющая меньшее число обусловленности, чем регуляризация Тихонова, для задачи полных наименьших квадратов.

Предложенный подход позволяет заменить задачу полных наименьших квадратов на последовательность задач, обусловленных лучше, чем задача обыкновенных наименьших квадратов. Исследованы условия сходимости метода.

8. Разработан программный комплекс, реализующий предложенные модели и методы идентификации моделей динамических систем дробного порядка.

**Теоретическая и практическая значимость.** Теоретическая значимость заключается в том, что предложен единый подход для идентификации линейных и нелинейных моделей систем различных классов, описываемых уравнениями с разностями дробного порядка при наличии помех наблюдений. На основе предложенного подхода построены и реализованы методы идентификации для различных классов помех, в том числе нестационарных. Доказана сильная состоятельность оценок параметров для предложенных рекуррентных и не рекуррентных методов идентификации.

Практическая значимость результатов диссертации заключается в том, что полученные алгоритмы и созданное на их основе программное обеспечение могут применяться при решении практических задач в самых разных областях науки и техники, таких как: химия, эконометрика, машиностроение, экология, геофизические исследования, системы передачи информации, анализ временных рядов, компьютерная безопасность, автоматизированные системы управления технологическими процессами.

Разработанные в диссертации методы идентификации успешно применялись для оценивания параметров моделей нагрева экструдера, различных типов электродвигателей, беспилотников, линий электропередачи, рельсовых цепей. Эти результаты в диссертационную работу не включены, но свидетельствуют о практической применимости разработанных методов идентификации.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Новые модели дискретных динамических систем дробного порядка [14, 19, 54, 57].

2. Метод на основе обобщенных полных наименьших квадратов для идентификации параметров моделей линейных и некоторых классов

нелинейных (Гаммерштейна, Винера, билинейных) систем, описываемых уравнениями с разностями дробного порядка, для шумов различных классов [2, 3, 6, 57-60].

3. Метод на основе обобщенных инструментальных переменных для идентификации моделей линейных динамических систем, описываемых уравнениями с разностями дробного порядка, при неполной информации об автокорреляционных функциях помех [12].

4. Численно устойчивая вычислительная схема для разработанных методов идентификации на основе предложенной расширенной эквивалентной нормальной системы уравнений для решения задачи полных наименьших квадратов [1, 2, 8, 40].

5. Неявная итерационная схема регуляризации задачи полных наименьших квадратов [7].

6. Прикладное программное обеспечение, реализующее разработанные методы [64, 65].

### **Соответствие диссертации паспорту научной специальности.**

Содержание диссертации соответствует пунктам паспорта 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (физико-математические науки).

2. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

**Степень достоверности.** Достоверность и обоснованность результатов обоснована представленными математическими доказательствами теоретических результатов. Теоретические положения подтверждены результатами вычислительных экспериментов.

**Апробация работы** Результаты основных положений диссертации доложены, обсуждены на XV, XVI, XVII международных конференциях «Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON-2013, SIBCON-2015, SIBCON-2017)» (г. Красноярск, 2013, г. Томск 2015, Астана 2017); международных конференциях «East-West Design & Test Symposium (EWDTS-2013, EWDTS-2017, EWDTS-2018, EWDTS-2020)» (г. Ростов-на-Дону, 2013, г. Нови Сад (Сербия), 2017, г. Казань, 2018, г. Варна (Болгария), 2020); VI, VII и VIII международных (43-й, 44-й и 45-й всероссийских) молодежных школах-конференциях «Современные проблемы математики» (г. Екатеринбург, 2012, 2013, 2014); Всероссийской научно-практической конференции «Анализ Изображений, Сетей и Текстов» (АИСТ-2012) (г. Екатеринбург, 2012); Всероссийской молодежной конференции «Информационно-телекоммуникационные системы и технологии» (г. Кемерово, 2012); Научно-практической конференции «Молодежная

математическая наука – 2012» (г. Саранск, 2012); II и III всероссийских научных конференциях молодых ученых с международным участием «Теория и практика системного анализа» (г. Рыбинск, 2012, 2014); Международной молодежной конференции «Прикладная математика, управление и информатика» (г. Белгород, 2012); IV и V международных научно-практических конференциях «Молодые ученые в решении актуальных проблем науки» (г. Владикавказ, 2013, 2014); Научно-практической интернет-конференции «Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики» (г. Ульяновск, 2013); международных научно-технических конференциях «Перспективные информационные технологии» (ПИТ-2013, ПИТ-2016) (г. Самара, 2013, 2016); VI, VII и IX международных научно-практических конференциях «Наука и образование транспорту» (г. Самара, 2013, 2014, 2016); XII Всероссийском совещании по проблемам управления (ВСПУ-2014) (г. Москва, 2014); XV Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Тюмень, 2014); IX Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (г. Пенза, 2016); международных конференциях «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2015, ИТНТ-2016, ИТНТ-2017, ИТНТ-2019, ИТНТ-2021) (г. Самара, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2021); IV Всероссийской научной конференции молодых ученых с международным участием «Информатика, управление и системный анализ» (г. Тверь, 2016); III Всероссийской научно-практической заочной конференции «Достижения и приложения современной информатики, математики и физики» (г. Нефтекамск, 2016 г.); IX и XI международных научно-технических конференциях «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (г. Пенза, 2014, 2016); Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Инновационные технологии в промышленности: образование, наука и производство» (г. Уфа, 2016); VIII International congress of information and communication technology, ICICT 2018 (г. Сямынь (Китай), 2018); международных конференциях «Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency» (SUMMA-2020, SUMMA-2021, SUMMA-2022, SUMMA-2023) (г. Липецк, 2020, 2021, 2022, 2023); Международной Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (г. Воронеж, 2023), Общественном постоянном научном семинаре «Теория автоматического управления и оптимизации» (г. Москва, 2022, 2025).

Исследования по теме диссертации частично поддержаны грантами:

1. «Грант ИБ МТУСИ» соглашение №40469-02/2022-д от 30 июня 2022 г.

2. Программой развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (№ 075-02-2023-931, № 075-02-2024-1456, № 075-02-2025-179).

**Публикации.** По теме диссертационной работы автором опубликовано 120 работ, в том числе 9 работ в рецензируемых изданиях, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science, 25 работ в рецензируемых изданиях, входящих в перечень ВАК, 28 работ в материалах конференций, индексируемых базами данных Web of Science и Scopus, получено 5 свидетельств о государственной регистрации программы для ЭВМ.

**Объем и структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, выводов по главам, заключения, списка литературы и приложения. Объем работы: 271 стр.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, определены научная новизна и практическая значимость, приведены сведения об апробации.

В **главе 1** рассматриваются модели дискретных динамических систем дробного порядка и методы их идентификации. В настоящее время существует два неэквивалентных подхода для описания динамических систем дробного порядка. При первом подходе модель получается заменой разностей целых порядков в уравнении на разности дробных порядков:

$$z_i + a_1 \Delta^{\alpha_1} z_i + \dots + \Delta^{\alpha_r} a_r z_i = \Delta^{\beta_1} x_i + \Delta^{\beta_2} b_1 x_i + \dots + \Delta^{\beta_{r_1}} b_{r_1} x_i, \quad (1)$$

где

$$\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^i \binom{\alpha_m}{j} z_{i-j}, \quad \Delta^{\beta_m} x_i = \sum_{j=0}^i \binom{\beta_m}{j} x_{i-j},$$

$$\binom{\alpha_m}{j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha_m + 1)}{\Gamma(j+1) \Gamma(\alpha_m - j + 1)}, \quad \binom{\beta_m}{j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\beta_m + 1)}{\Gamma(j+1) \Gamma(\beta_m - j + 1)},$$

$$0 < \alpha_1 \dots < \alpha_r, \quad 0 < \beta_1 \dots < \beta_r, \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \text{ - Гамма-функция.}$$

При втором подходе применяемом в основном в анализе временных рядов используется одна разность дробного порядка

$$\Delta^{\alpha} (z_i + b_1 z_{i-1} + \dots + b_r z_{i-r}) = x_i + a_1 x_{i-1} + \dots + b_{r_1} x_{i-r_1}. \quad (2)$$

В диссертационной работе предложено обобщение подходов (1) и (2) на случай многих разностей дробного порядка и запаздываний:

$$\sum_{m=1}^r b_m \Delta^{\alpha_m} z_{i-f^{(m)}} = \sum_{m=1}^{r_1} a_m \Delta^{\beta_m} x_{i-f_1^{(m)}}, \quad (3)$$

и впервые предложена модель билинейной дискретной системы дробного порядка:

$$\sum_{m=1}^r b_m \Delta^{\alpha_m} z_{i-f_1(m)} = \sum_{m=1}^{r_1} a_m \Delta^{\beta_m} x_{i-f_1(m)} + \sum_{m=0}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3^{(m)}} c_{mk} \Delta^{\gamma_{mk}} x_{i-f_2(m)} z_{i-f_3(k)} \cdot (4)$$

В работе также впервые введены модели для новых классов возмущений: линейная модель дробного порядка с дробно-дифференцированными ошибками в переменных, ARX модель Винера дробного порядка с возмущением во входном сигнале, обобщающую ARX модель Винера дробного порядка и т.д.

Данные модели и методы их идентификации рассматриваются в **главе 2**.

**В главе 1** представлен обзор существующих методов параметрической идентификации моделей динамических систем с помехами во входных и выходных сигналах и авторегрессий с аддитивным шумом в наблюдениях. Рассмотрены методы идентификации, применяемые для динамических систем дробного порядка. Проведенный анализ показал, что в настоящее время для идентификации динамических систем, описываемых уравнениями с производными и разностями дробного порядка, при наличии помех во входных и выходных сигналах известны лишь методы на основе высших статистик, предполагающих значительные ограничения на сигналы и помехи.

В связи с этим возникает задача разработки новых методов идентификации, динамических систем, описываемых разностями дробного порядка с помехами во входных и выходных сигналах, которые бы отвечали следующим требованиям:

1. совмещали высокую точность оценивания и высокую численную устойчивость.
2. позволяли оценивать параметры в условиях коррелированных помех во входных и выходных сигналах.

В **п. 2.1.-2.4 Главы 2** разрабатывается и исследуется метод идентификации систем дробного порядка. на основе обобщенных полных наименьших квадратов для идентификации параметров моделей линейных и некоторых классов нелинейных (Гаммерштейна, Винера, билинейных) систем, описываемых уравнениями с разностями дробного порядка, для возмущений различных классов при известной корреляционной функции возмущений .

**В п. 2.1** предложен критерий для идентификации линейных ARX моделей систем дробного порядка при наличии помех наблюдения во входных и выходных сигналах. Доказана сильная состоятельность получаемых оценок.

Рассматривается модель стационарной устойчивой ARX системы, описываемой следующими уравнениями с разностями дробного порядка:

$$z_i = \sum_{m=1}^r b_m \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_m \Delta^{\beta_m} x_i + \zeta_i, \quad y_i = z_i + \xi_i, \quad w_i = x_i + \zeta_i, \quad (5)$$

где  $z_i, y_i$  – ненаблюдаемая и наблюдаемая выходные переменные в выходном сигнале;  $x_i, w_i$  – ненаблюдаемая и наблюдаемая переменные во входном сигнале;  $\xi_i$  – помеха наблюдения в выходном сигнале;  $\zeta_i$  – помехи наблюдения соответственно во входном сигнале.  $\varsigma_i$  – ошибка в уравнении;

Пусть для модели системы (5), входных сигналов и помех выполнены следующие неограничительные условия:

1. Множество  $\tilde{B}$ , которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой системы, является компактным.

2. Вектор входных переменных и истинные значения параметров удовлетворяет условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \varphi^{(i)} \right) \left( \varphi^{(i)} \right)^T = H \text{ п.н.},$$

где  $H$  – положительно определенная матрица,

$$\varphi^{(i)} = \left( \varphi_z^{(i)} \parallel \varphi_x^{(i)} \right)^T, \quad \varphi_z^{(i)} = \left( \Delta^{\alpha_1} z_{i-1}, \dots, \Delta^{\alpha_r} z_{i-1} \right), \quad \varphi_x^{(i)} = \left( \Delta^{\beta_1} x_i, \dots, \Delta^{\beta_r} x_i \right).$$

3. Случайные последовательности помех  $\{\xi_i\}, \{\varsigma_i\}, \{\zeta_i\}$ , удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} E\left(\xi_{i+1}/F_\xi^{(i)}\right) &= 0, \quad E\left(\varsigma_{i+1}/F_\varsigma^{(i)}\right) = 0, \quad E\left(\zeta_{i+1}/F_\zeta^{(i)}\right) = 0 \text{ п.н.}, \\ E\left(\xi_{i+1}^2 / F_\xi^{(i)}\right) &< W_\xi, \quad E\left(\varsigma_{i+1}^2 / F_\varsigma^{(i)}\right) < W_\varsigma, \quad E\left(\zeta_{i+1}^2 / F_\zeta^{(i)}\right) < W_\zeta \text{ п.н.}, \\ E\left(\varsigma_{i+1}^2\right) &< \infty, \quad E\left(\xi_{i+1}^2\right) < \infty, \quad E\left(\zeta_{i+1}^2\right) < \infty, \\ E\left(\varsigma_{i+1}^4\right) &< \infty, \quad E\left(\xi_{i+1}^4\right) < \infty, \quad E\left(\zeta_{i+1}^4\right) < \infty. \end{aligned}$$

где  $F_\xi^{(i)}, F_\varsigma^{(i)}, F_\zeta^{(i)}$  –  $\sigma$ -алгебры, индуцированные семействами случайных величин  $\{\varsigma_t, \xi_t, \zeta_t, t \in T_i\}, T_i = \{t; t \leq i, t \in Z_c\}$  – множество целых чисел;

$W_\varsigma, W_\xi, W_\zeta$  – случайные величины,  $E(W_\varsigma) < \infty, E(W_\xi) < \infty, E(W_\zeta) < \infty$ .

4.  $\{x_i\}$  статистически не зависит от  $\{\xi_i\}, \{\varsigma_i\}, \{\zeta_i\}$ ;

5. Помехи  $\{\xi_i\}, \{\varsigma_i\}, \{\zeta_i\}$  и параметры системы  $\alpha_m, \beta_m$  удовлетворяют условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \varphi_{\xi\zeta}^{(i)} \right) \left( \varphi_{\xi\zeta}^{(i)} \right)^T = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[ E \sum_{i=1}^N \varphi_{\xi\zeta}^{(i)} \left( \varphi_{\xi\zeta}^{(i)} \right)^T \right] = H_{\xi\zeta} \text{ п.н.},$$

где  $H_\xi, H_\zeta$  положительно определенные матрицы;

$$H_{\xi\zeta} = \begin{pmatrix} H_{\xi} & 0 \\ 0 & H_{\zeta} \end{pmatrix}, h_{\xi}^{(mk)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ j \end{pmatrix} \xi_{i-j-1} \xi_{i-j-1},$$

$$h_{\zeta}^{(mk)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} \begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_k \\ j \end{pmatrix} \zeta_{i-j} \zeta_{i-j}.$$

Требуется оценить неизвестные коэффициенты динамической системы, описываемой уравнением (1) по наблюдаемым последовательностям  $z_i, x_i$  при известных порядках  $r_1, r, \alpha_m, \beta_m$ .

Оценки параметров могут быть найдены как минимум целевой функции обобщенных полных наименьших квадратов:

$$\min_{\theta} \frac{\|Y - \Phi\theta\|_2^2}{\bar{\sigma}_{\xi}^2 + \bar{\sigma}_{\zeta}^2 + \theta^T H_{\xi\zeta} \theta}, \quad (6)$$

где  $\bar{\sigma}_{\xi}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \xi_i^2$ ,  $\bar{\sigma}_{\zeta}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \zeta_i^2$ ,  $Y = (y_1, \dots, y_N)^T$ ,

$$\theta = (b \mid a)^T = (b_1, \dots, b_r \mid a_1, \dots, a_r)^T, \tilde{\varphi}^{(i)} = \left( \varphi_y^{(i)} \mid \varphi_w^{(i)} \right)^T, \Phi = \left( \tilde{\varphi}^{(1)}, \dots, \tilde{\varphi}^{(N)} \right)^T.$$

*Теорема 2.1.* Пусть некоторый случайный процесс  $\{y_i, i = \dots -1, 0, 1, \dots\}$  описывается уравнением (5) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1-5. Тогда оценка  $\hat{\theta}(N)$ , определяемая выражением (6), с вероятностью 1 при  $N \rightarrow \infty$  существует, единственная и является сильно состоятельной оценкой, т.е.  $\hat{\theta}(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{н.н.}} \theta$ .

Теорема доказана при нулевых начальных условиях. Стоит отметить, что в общем случае для того, чтобы корректно инициализировать динамическую систему дробного порядка необходимо знать все значения на интервале  $i \in (-\infty, -1]$  для того, чтобы восстановить значения дробных разностей в  $i = 0$ . Для реальных задач это невыполнимое условие. Можно показать, что теорема 2.1. будет верна при более слабом предположение: динамическая система имеет нулевые начальные условия в некоторый конечный момент времени  $i = -N_0$ . Так как для конечного момента времени  $i = -N_0$  предположения 5 и 6 также будут выполняться:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=-N_0}^N \varphi_{\xi}^{(i)} \left( \varphi_{\xi}^{(i)} \right)^T = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=-N_0}^N E \left( \varphi_{\xi}^{(i)} \left( \varphi_{\xi}^{(i)} \right)^T \right) = H_{\xi},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=-N_0}^N \varphi_{\zeta}^{(i)} \left( \varphi_{\zeta}^{(i)} \right)^T = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=-N_0}^N E \left( \varphi_{\zeta}^{(i)} \left( \varphi_{\zeta}^{(i)} \right)^T \right) = H_{\zeta},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=-N_0}^N \left( \begin{array}{c} (\varphi_z^{(i)})^T \\ \vdots \\ (\varphi_x^{(i)})^T \end{array} \right)^T \left( \begin{array}{c} (\varphi_z^{(i)})^T \\ \vdots \\ (\varphi_x^{(i)})^T \end{array} \right) = H \text{ п.н.}$$

Данное замечание может быть распространено на остальные теоремы, доказанные в Главе 2.

Полученный критерий (6) требует априорного знания матрицы  $H_{\xi\zeta}$ , что является довольно ограничительным условием, т.к. требует знания мгновенных дисперсий помех. Для многих практических задач дисперсию помех можно считать постоянной. В этом случае возможно снизить требования к априорной информации.

Пусть выполняется следующее условие:

6. Случайные последовательности  $\{\xi_i\}, \{\zeta_i\}, \{\zeta_i\}$  независимы в совокупности и удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} E(\xi_{i+1}/F_\xi^{(i)}) &= 0, \quad E(\zeta_{i+1}/F_\zeta^{(i)}) = 0, \quad E(\zeta_{i+1}/F_\zeta^{(i)}) = 0 \text{ п.н.,} \\ E(\xi_{i+1}^2/F_\xi^{(i)}) &= \sigma_\xi^2, \quad E(\zeta_{i+1}^2/F_\zeta^{(i)}) = \sigma_\zeta^2, \quad E(\zeta_{i+1}^2/F_\zeta^{(i)}) = \sigma_\zeta^2 \text{ п.н.,} \\ E(\zeta_{i+1}^4) &< \infty, \quad E(\zeta_{i+1}^4) < \infty, \quad E(\zeta_{i+1}^4) < \infty. \end{aligned}$$

7. Априорно известны отношения дисперсий помех:

$$\gamma_\zeta = \sigma_\zeta^2 / \sigma_\xi^2, \quad \gamma_\zeta = \sigma_\zeta^2 / \sigma_\xi^2.$$

Оценки  $\hat{\theta}(N)$  неизвестных параметров  $\theta$  могут быть определены из критерия

$$\min_{\theta} \frac{\|Y - \Phi\theta\|_2^2}{1 + \gamma_\zeta + \theta^T H \theta}, \quad (7)$$

где  $H = \begin{pmatrix} H_\alpha & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \gamma_\zeta H_\beta \end{pmatrix}$ ,  $h_\alpha^{(mm')} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{m'} \\ j \end{pmatrix} \frac{N-j}{N}$ ,

$$h_\beta^{(mm')} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} \begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{m'} \\ j \end{pmatrix} \frac{N-j}{N}.$$

*Теорема 2.2.* Пусть некоторый случайный процесс  $\{y_i, i = \dots -1, 0, 1, \dots\}$  описывается уравнением (5) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1, 2, 4-7. Тогда оценка  $\hat{\theta}(N)$ , определяемая выражением (7), с вероятностью 1 при  $N \rightarrow \infty$ , существует, единственная

и является сильно состоятельной оценкой, т.е.  $\hat{\theta}(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \theta$ .

**В п. 2.2** рассмотрена идентификация моделей динамических системы дробного порядка с коррелированными помехами.

8. Случайные последовательности  $\{\xi_i\}$ ,  $\{\varsigma_i\}$ ,  $\{\zeta_i\}$  имеют нулевое математическое ожидание

$$E\{\xi_i\} = 0, \quad E\{\varsigma_i\} = 0, \quad E\{\zeta_i\} = 0,$$

постоянную и ограниченную дисперсию

$$E(\xi_i^2) = \sigma_\xi^2, \quad E(\varsigma_i^2) = \sigma_\varsigma^2, \quad E(\zeta_i^2) = \sigma_\zeta^2,$$

и удовлетворяют условиям:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N+g} \xi_i \xi_{i+g} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} h_\xi(g) < \infty, \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N+g} \zeta_i \zeta_{i+g} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} h_\zeta(g) < \infty,$$

$$\sum_{g=1}^N |h_\xi(g)| < \infty, \quad \sum_{g=1}^N |h_\zeta(g)| < \infty, \quad g = \overline{0, \infty},$$

где  $h_\xi(g)$ ,  $h_\zeta(g)$  – автокорреляционные функции;

9. Помехи  $\{\xi_i\}$ ,  $\{\zeta_i\}$  взаимнокоррелированы между собой:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=i_0}^{N+g} \xi_i \zeta_{i+g} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} h_{\xi\zeta}(g) < \infty, \quad \sum_{m=1}^N |h_{\xi\zeta}(g)| < \infty, \quad g = \overline{0, \infty},$$

где  $h_{\xi\zeta}(g)$  – взаимные корреляционные функции;

Оценки параметров могут быть найдены из условия минимума критерия:

$$\min_{\theta} \frac{\|Y - \Phi\theta\|_2^2}{\sigma_\xi^2 + \sigma_\varsigma^2 + \theta^T H \theta - 2\tilde{h}_\alpha b}, \quad (8)$$

$$\text{где } H = \begin{pmatrix} H_{\alpha\alpha} & H_{\alpha\beta} \\ H_{\alpha\beta}^T & H_{\beta\beta} \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_\alpha = (h_\alpha(1), \dots, h_\alpha(r)),$$

$$h_\alpha^{(mk)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{g=0}^{N-j} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{\alpha_m}{j} \binom{\alpha_k}{j} h_{\xi\xi}(g) \frac{N-j-g}{N},$$

$$h_\beta^{(mk)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{g=0}^{N-j} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{\beta_m}{j} \binom{\beta_k}{j} h_{\zeta\zeta}(g) \frac{N-j-g}{N},$$

$$h_{\alpha\beta}^{(mk)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{g=0}^{N-j} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{\alpha_m}{j} \binom{\beta_k}{j} h_{\xi\zeta}(g) \frac{N-j-g}{N},$$

$$\tilde{h}_\alpha^{(m)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{g=0}^{N-j} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{\alpha_m}{j} h_{\xi\zeta}(g) \frac{N-j-g}{N}.$$

*Теорема 2.3.* Пусть некоторый случайный процесс  $\{y_i, i = \dots -1, 0, 1, \dots\}$  описывается уравнением (5) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1, 2, 4-5, 8-9. Тогда оценка  $\hat{\theta}(N)$ , определяемая выражением (8), с вероятностью 1 при  $N \rightarrow \infty$  существует, единственная и является сильно состоятельной оценкой, т.е.

$$\hat{\theta}(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \theta.$$

В общем случае для получения состоятельных оценок необходимо знать все значения корреляционных и взаимокорреляционных функций для каждого момента наблюдения.

Рассмотрен ряд частных случаев для коррелированных помех.

**Случай 1.** Дробно-дифференцированный белый шум.

$$z_i = \sum_{m=1}^r b_m \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_m \Delta^{\beta_m} x_i + \zeta_i, y_i = z_i + \Delta^{\phi} \xi_i, w_i = x_i + \Delta^{\psi} \xi_i, \quad (9)$$

Пусть последовательности  $\{\xi_i\}$ ,  $\{\zeta_i\}$  удовлетворяют предположению 6.

Критерий для оценивания параметров принимает вид:

$$\min_{\theta} \frac{\|Y - \Phi \theta\|_2^2}{1 + \gamma_{\zeta} + \theta^T H \theta - 2h_{\alpha\phi}^T b}. \quad (10)$$

где

$$H = \begin{pmatrix} H_{\alpha+\phi} & 0 \\ 0 & \gamma_{\zeta} H_{\beta+\psi} \end{pmatrix}, \quad h_{\alpha+\phi}^{(mk)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \sum_{j=0}^{N-1} \binom{\alpha_m + \phi}{j} \right) \binom{\alpha_k + \phi}{j} \cdot \frac{N-j}{N},$$

$$h_{\beta+\psi}^{(mk)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{\beta_m + \psi}{j} \binom{\beta_k + \psi}{j} \frac{N-j}{N}, \quad h_{\alpha\phi} = \left( h_{\alpha\phi}^{(1)} \quad \dots \quad h_{\alpha\phi}^{(r)} \right)^T,$$

$$h_{\alpha\phi}^{(n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \sum_{j=0}^{N-1} \binom{\phi}{j+1} \right) \binom{\alpha_n + \phi}{j} \cdot \frac{N-j}{N}.$$

*Теорема 2.4.* Пусть некоторый случайный процесс  $\{y_i, i = \dots -1, 0, 1, \dots\}$  описывается уравнением (9) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1, 2, 4-7. Тогда оценка  $\hat{\theta}(N)$ , определяемая выражением (10), с вероятностью 1 при  $N \rightarrow \infty$  существует, единственная

и является сильно состоятельной оценкой, т.е.  $\hat{\theta}(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \theta$ .

Также в п. 2.2 получены целевые функции для частных случаев системы (9) если помехи являются дробно-дифференцированными белыми шумами.

**Случай 2.** Идентификация FARARX (Fractional differencing autoregressive with autoregressive exogenous input) модели

$$\Delta^\alpha \left( z_i + \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} z_{i-m} \right) = \sum_{m=0}^{\eta} a_0^{(m)} x_{i-m} + v_i, \quad (11)$$

$$y_i = z_i + \xi_i, \quad w_i = x_i + \zeta_i, \quad \vartheta_i = \sum_{m=1}^{r_2} c^{(m)} v_{i-m} + \zeta_i.$$

Предложена трехшаговая процедура идентификации параметров системы (11). На первом шаге для оценивания параметров расширенной модели используется критерий схожий с (6).

В п. 2.3 рассматриваются рекуррентные алгоритмы идентификации типа стохастической аппроксимации, минимизирующие рассмотренные выше критерии. Доказывается состоятельность получаемых с помощью рекуррентной реализации методов.

Рекуррентная оценка  $\hat{\theta}(i)$  может быть определена с помощью градиентного метода:

$$\hat{\theta}(i+1) = \hat{\theta}(i) - \delta_i \nabla_{\theta} \frac{\left( y_i - \left( \phi^{(i)} \right)^T \hat{\theta}(i) \right)^2}{1 + \gamma_{\zeta} + \hat{\theta}^T(i) H \hat{\theta}(i)}. \quad (12)$$

*Теорема 2.5.* Пусть некоторый случайный процесс  $\{y_i, i = \dots -1, 0, 1, \dots\}$  описывается уравнением (5) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1, 2, 4-7. Стягивающий множитель и помехи удовлетворяют следующим предположениям:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i = \infty, \quad \delta_i \geq \delta_{i+1} \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i^l < \infty \quad \text{для} \quad l > 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \xi_i < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \zeta_i < \infty \quad \text{п.н.}$$

Тогда оценка  $\hat{\theta}(i)$ , определяемая выражением (12), с вероятностью 1 при  $i \rightarrow \infty$  существует, единственная и является сильно состоятельной оценкой, т.е.  $\hat{\theta}(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \theta$  п.н.

В п. 2.4. разработаны критерии и доказана сильная состоятельность получаемых оценок, для следующих классов нелинейных систем:

2.4.1 Билинейных ARX – систем при наличии помех во входных сигналах и выходных сигналах.

$$\sum_{m=1}^r b_m \Delta^{\alpha_m} z_{i-f_1^{(m)}} = \sum_{m=1}^{r_1} a_m \Delta^{\beta_m} x_{i-f_1^{(m)}} + \sum_{m=0}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3^{(m)}} c_{mk} \Delta^{\gamma_{mk}} x_{i-f_2^{(m)}} z_{i-f_3^{(k)}} \quad (13)$$

$$y_i = z_i + \xi_i, \quad w_i = x_i + \zeta_i,$$

где  $b_m = 1$ ,  $f^{(m)}$ ,  $f_1^{(m)}$ ,  $f_2^{(m)}$ ,  $f_3^{(k)}$  неотрицательные значения запаздываний.

Пусть выполнены следующие предположения:

10. Дискретная билинейная система устойчивая, наблюдаемая и управляемая.

11. Структура системы  $r, r_1, r_2, r_3^{(k)}$   $f^{(m)}, f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, f_3^{(k)}$ ,  $\alpha_m, \beta_m, \gamma_{mk}$  известна априорно.

12. Истинный входной сигнал  $x_i$  с нулевым средним и постоянной дисперсией  $E(x_i) = 0, E(x_i^2) = \sigma_x^2 \leq \infty$  удовлетворяет условию постоянного возбуждения:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_x^{(i)} \left( \varphi_x^{(i)} \right)^T = H, \text{ п.н.,}$$

$$\varphi_x^{(i)} = \left( \Delta^{\beta^{(1)}} x_{i-f_1^{(1)}}, \dots, \Delta^{\beta^{(n)}} x_{i-f_1^{(n)}} \right)^T,$$

матрица  $H$  положительно определена.

Будем определять оценки параметров из условия минимума критерия

$$\min_{a,b,c} \sum_{i=1}^N \frac{\left( a^T \varphi_y^{(i)} - b^T \varphi_w^{(i)} - c^T \varphi_{wy}^{(i)} \right)^2}{\sigma_\zeta^2 + \sigma_\xi^2 b^T H_\alpha b + \sigma_\zeta^2 a^T H_\beta a + c^T H_\gamma c}, \quad (14)$$

где

$$h_\alpha^{(mk)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \sum_{j=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j - f^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ j - f^{(k)} \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{N-j}{N},$$

$$h_\beta^{(mk)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \sum_{j=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \beta_m \\ j - f_1^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_k \\ j - f_1^{(k)} \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{N-j}{N},$$

$$H_\gamma = E \left[ \sum_{i=1}^N \left( \varphi_{\zeta y}^{(i)} \left( \varphi_{\zeta y}^{(i)} \right)^T + \varphi_{w\xi}^{(i)} \left( \varphi_{w\xi}^{(i)} \right)^T - \varphi_{\zeta\xi}^{(i)} \left( \varphi_{\zeta\xi}^{(i)} \right)^T \right) \right] = \begin{pmatrix} H_\gamma^{(11)} & \dots & H_\gamma^{(1r_2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_\gamma^{(r_2 1)} & \dots & H_\gamma^{(r_2 r_2)} \end{pmatrix},$$

$$H_\gamma^{(mm'kk')} = \begin{pmatrix} h_\gamma^{(11kk')} & \dots & h_\gamma^{(1r_3^{(k')}kk')} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\gamma^{(r_3^{(k)}1kk')} & \dots & h_\gamma^{(r_3^{(k)}r_3^{(k')}kk')} \end{pmatrix},$$

$$h_{\zeta y}^{(mm'kk')} = \sigma_\zeta^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \sum_{j=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \gamma_{mk} \\ j - f_2^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{m'k'} \\ j - f_2^{(k')} \end{pmatrix} \right) h_y^{\left| f_3^{(k)} - f_3^{(k')} - f_2^{(m)} + f_2^{(m')} \right|} \frac{N-j}{N}.$$

$$h_{w\xi}^{(mm'kk')} = \sigma_\xi^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \sum_{j=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \gamma_{mk} \\ g - f_3^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{m'k'} \\ j - f_3^{(k')} \end{pmatrix} \right) h_w^{\left| f_3^{(k)} - f_3^{(k')} - f_2^{(m)} + f_2^{(m')} \right|} \frac{N-j}{N}$$

$$h_{\zeta\zeta}^{(mm'kk')} = \sigma_{\zeta}^2 \sigma_{\zeta'}^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \sum_{j=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \gamma_{mk} \\ j - f_2^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{m'k'} \\ j - f_2^{(k')} \end{pmatrix} \frac{N-j}{N} \right).$$

$$h_y^{[m]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N y_i y_{i+m}, \quad h_w^{[m]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N w_i w_{i+m}.$$

**Теорема 2.6.** Пусть некоторый случайный процесс  $\{y_i, i = \dots -1, 0, 1, \dots\}$  описывается уравнением (13) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 4, 6 и 10, 11, 12. Тогда оценки,  $\hat{a}(N), \hat{b}(N), \hat{c}(N)$  определяемые выражением (14) с вероятностью 1 при  $N \rightarrow \infty$ , существуют, единственные и являются сильно состоятельными оценками, т.е.  $\hat{a} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} a$  п.н.,  $\hat{b} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} b$  п.н.,  $\hat{c} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} c$  п.н.

**2.4.2** ARX – систем класса Гаммерштейна при наличии помех в выходных сигналах:

$$z_i = \sum_{m=1}^r b_m \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_m \Delta^{\beta_m} \eta_m(x_i) + \zeta_i, \quad y_i = z_i + \xi_i, \quad (15)$$

где  $\eta_m(\bullet)$  – ограниченная функция с конечным числом разрывов;

**2.4.3** ARX – систем класса Винера при наличии помех во входных сигналах:

$$z_i = \sum_{m=1}^r b_m \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_m \Delta^{\beta_m} x_i + \zeta_i, \quad y_i = f(z_i). \quad (16)$$

**В п. 2.5** разрабатывается и исследуется метод идентификации систем дробного порядка на основе обобщенных инструментальных переменных для идентификации параметров моделей линейных систем, описываемых уравнениями с разностями дробного порядка, при неполной информации о корреляционных функциях возмущений.

При использовании формулы (8) требуется знание всех отсчетов корреляционных функций, что является трудновыполнимой задачей.

13. Пусть для вектора инструментальных переменных

$$\Psi^{(i)} = \begin{pmatrix} \psi_y^{(i)} \\ \vdots \\ \psi_w^{(i)} \end{pmatrix}^T$$

выполняются следующие условия:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_y^{(i)} (\varphi_{\zeta}^{(i)})^T = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_w^{(i)} (\varphi_{\zeta}^{(i)})^T = H_{\psi_w \varphi_{\zeta}} \text{ п.н.,}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{i=1}^N \psi_z^{(i)} (\varphi_z^{(i)})^T = H_{\psi_z \varphi_z} \text{ п.н.,} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{i=1}^N \psi_x^{(i)} (\varphi_x^{(i)})^T = H_{\psi_x \varphi_x} \text{ п.н.,}$$

причем  $H_{\psi_z \varphi_z}, H_{\psi_x \varphi_x}$  положительно определены.

Оценки параметров из условия минимума целевой функции:

$$\min_{\theta} \left\| h_{\Psi y} - (H_{\Psi y} - H_{\Psi \varepsilon}) \theta \right\|_2^2. \quad (17)$$

*Теорема 2.7.* Пусть некоторый случайный процесс  $\{y_i, i = \dots -1, 0, 1, \dots\}$  описывается уравнением (5) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1-4, 6 и 13. Тогда оценка,  $\hat{\theta}(N)$  определяемая выражением (17) с вероятностью 1 при  $N \rightarrow \infty$ , существует, единственная и является сильно состоятельной оценкой, т.е.  $\hat{\theta}(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.п.}} \theta$ .

В качестве вектора инструментальных переменных может быть использован вектор со следующими значениями:

$$\Psi_{y'}^{(i)} = \left( \Delta^{\alpha^{(1)}} w_{i-1}, \dots, \Delta^{\alpha^{(r)}} w_{i-1} \right)^T, \quad \Psi_w^{(i)} = \Phi_w^{(i)}. \quad (18)$$

**Глава 3** посвящена проблемам реализации методов идентификации динамических систем дробного порядка. В п. 3.1 рассматриваются вычислительно устойчивые реализации предложенных методов идентификации. Представленные критерии путем замены переменных могут быть сведены к задаче полных наименьших квадратов

$$\min_{\theta'} \frac{\|Y' - \Phi' \theta'\|_2^2}{1 + \theta'^T H' \theta'}. \quad (19)$$

Существует несколько подходов к минимизации полных наименьших квадратов (ПМНК). Первый подход основан на том, что решение задачи (ПМНК) требует вычисления минимального сингулярного числа расширенной матрицы  $(\Phi', Y')$  и соответствующего этому числу правого сингулярного вектора. Численное решение задачи поиска сингулярного вектора сопряжено со значительными трудностями. Второй подход основан на решении смещенной нормальной системы

$$(\Phi'^T \Phi' - \sigma^2 I) \theta' = \Phi'^T Y. \quad (20)$$

При решении системы (20), нелинейной остается лишь скалярная задача поиска минимального сингулярного числа  $\sigma = \sigma_{\min}(\Phi', Y')$ . Однако система (20) имеет значительно большее число обусловленности, чем решение задачи на основе правого сингулярного вектора

$$\kappa_2(\Phi'^T \Phi' - \sigma^2 I) = \frac{\sigma_{\max}^2(\Phi') - \sigma^2}{\sigma_{\min}^2(\Phi') - \sigma^2}.$$

В диссертации предложена расширенная эквивалентная нормальной смещенная система уравнений:

$$\bar{A} \bar{\theta} = \bar{Y}. \quad (21)$$

где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \sigma I & \Phi' \\ \Phi'^T & \sigma I \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\theta} = \begin{pmatrix} \sigma^{-1} \varepsilon \\ \theta' \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = Y - \Phi' \theta.$$

*Теорема 3.1. Спектральное число обусловленности системы уравнений (21) определяется как*

$$\kappa_2(\bar{A}) = \frac{\sigma_{\max}(\Phi') + \sigma}{\sigma_{\min}(\Phi') - \sigma}, \quad (22)$$

если  $\sigma_{\min}(\Phi') < 2\sigma$  или  $\Phi'$  квадратная матрица полного ранга, иначе

$$\kappa_2(\bar{A}) = \frac{\sigma_{\max}(\Phi') + \sigma}{\sigma}.$$

Из теоремы 3.1 следует, что предложенная расширенная система особенно предпочтительна при малом зазоре между наименьшими сингулярными числами перед системой (19). Кроме того, не требуется нахождения матрицы  $\Phi'^T \Phi' - \sigma^2 I$ .

На Рисунке 1 представлены логарифмы чисел обусловленности смещенной нормальной системы, расширенной комплекснозначной системы и предложенной расширенной системы при  $\sigma_{\min}(\Phi') < 2\sigma$ .

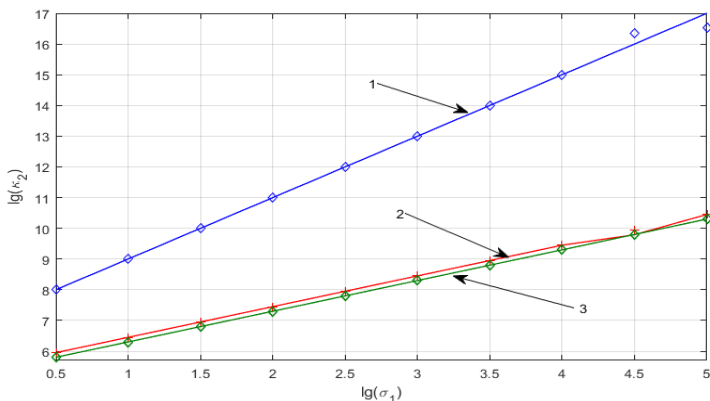


Рисунок 1 – Логарифмы чисел обусловленности: 1 – смещенная нормальная система; 2 – комплекснозначная расширенная система; 3 – расширенная система (21)

Из Рисунка 1 видно, что число обусловленности системы (21) при  $\sigma_{\min}(\Phi') < 2\sigma$ , у предложенной расширенной системы (22) меньше, чем смещенной нормальной системы и расширенной комплекснозначной системы.

В п. 3.2 предложен неявная итерационная схема для решения задач регуляризованных полных наименьших квадратов

$$\theta_{k+1} = (\sigma_{\min}^2 + \mu^{-1}) \sum_{i=1}^{r+\eta} \frac{v_i v_i^T}{\sigma_i^2 + \mu^{-1}} \theta_k + \sum_{i=1}^{r+\eta} \frac{\sigma_i u_i^T v_i}{\sigma_i^2 + \mu^{-1}} Y, \quad k = 0, 1, \dots \quad (23)$$

где  $\sigma_1(\Phi') \geq \sigma_2(\Phi') \geq \dots \geq \sigma_{r+\eta}(\Phi')$  сингулярные числа матрицы  $\Phi'$ ;  $u_i$  и  $v_i$  левые и правые сингулярные векторы матрицы  $\Phi'$ ,  $\mu^{-1}$  малое положительное число.

Число обусловленности для задачи полных наименьших квадратов с регуляризацией Тихонова не может быть меньше числа обусловленности метода наименьших квадратов  $\kappa_2 = \sigma_{\max}(\Phi') / \sigma_{\min}(\Phi')$ .

При применении неявной итерационной схемы (23) необходимо решать последовательности задач, имеющих числа обусловленности меньше числа обусловленности метода наименьших квадратов.

*Теорема 3.2. Спектральное число обусловленности для неявной итерационной схемы (23) определяется как*

$$\kappa_2 = \sqrt{\frac{\sigma_{\max}^2(\Phi') + \mu^{-1}}{\sigma_{\min}^2(\Phi') + \mu^{-1}}}. \quad (24)$$

На Рисунке 2 представлены логарифмы чисел обусловленности смещенной нормальной системы, теоретический предел регуляризации Тихонова и число обусловленности на каждой итерации предложенного алгоритма.

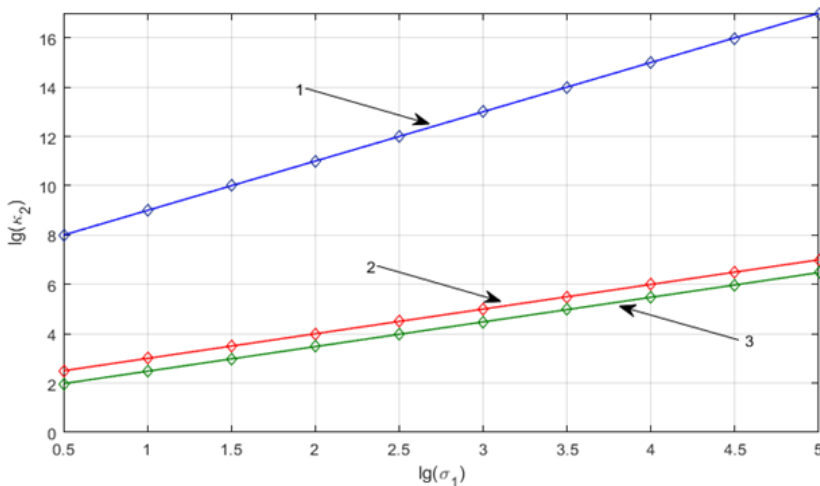


Рисунок 2 – Логарифмы чисел обусловленности: 1 – смещенная нормальная системы; 2 – теоретический предел регуляризации Тихонова; 3 – предложенная схема (23)

Из Рисунка 2 видно, что число обусловленности (24) оказывается, меньше теоретического предела для числа обусловленности задачи полных наименьших квадратов с регуляризацией Тихонова.

**В п. 3.3.** для случая, когда порядки  $\bar{r}$ ,  $r$ ,  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  неизвестны, предложен итерационный метод, включающий в себя разработанные методы для оценивания линейных коэффициентов модели и генетический алгоритм для оценивания нелинейных коэффициентов  $\bar{r}$ ,  $r$ ,  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$ .

**В п. 3.4.** предложен метод идентификации авторегрессии дробного порядка с аддитивным шумом в наблюдениях, когда отношение сигнал-шум и дисперсия аддитивного шума неизвестны.

**Глава 4** посвящена описанию программного комплекса для проведения вычислительных экспериментов и полученных с его помощью результатов. Все разработанные во второй и третьей главе методы и алгоритмы реализованы в виде скриптов на языке Matlab, объединенных в программный комплекс.

**В п. 4.1** приведено описание и структура программного комплекса. Программный комплекс состоит из следующих блоков:

1. Блок генерации исходных данных:

1.1 Генерация входного сигнала (белый шум, сигнал с дробно-рациональной спектральной плотностью, сигнал с дробно-иррациональной спектральной плотностью, детерминированные сигналы).

1.2 Генерация возмущений во входном и выходных сигналах (белый шум, шум с дробно-рациональной спектральной плотностью, сигнал с дробно-иррациональной спектральной плотностью, детерминированные сигналы).

1.3 Генерация отклика динамической системы дробного порядка (линейная динамическая система дробного порядка, авторегрессия с разностями дробного порядка, билинейная динамическая система дробного порядка, динамическая система Винера дробного порядка, динамическая система Гаммерштейна дробного порядка).

2. Блок идентификации параметров динамической системы дробного порядка, включающий в себя:

2.1. Метод наименьших квадратов (нормальная система уравнений).

2.2. Метод обобщенных полных наименьших квадратов (смещенная нормальная система)

2.3. Метод инструментальных переменных (нормальная система уравнений, смещенная нормальная система)

2.4. Метод обобщенных инструментальных переменных (нормальная система уравнений, смещенная нормальная система уравнений).

3. Блок обработки результатов идентификации:

3.1. Расчет погрешности оценивания параметров.

3.2. Расчет погрешности моделирования

3.3. Статистическая обработка серий вычислительных экспериментов

### 3.4. Визуализация полученных результатов.

В п. 4.2 представлены результаты имитационного моделирования идентификации систем различными методами, на основе разработанного программного комплекса. Динамическая система описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} z_i &= 0.5\Delta^{0.9} z_{i-1} - 0.2\Delta^{1.7} z_{i-1} + \Delta^{0.7} x_i^{(1)} - 0.2\Delta^{1.4} x_i^{(1)} + 0.4\Delta^{0.6} x_i^{(2)} - \\ &- 0.5\Delta^{1.2} x_i^{(2)} + 0.4\Delta^{0.6} x_i^{(3)} - 0.5\Delta^{1.1} x_i^{(3)}, \\ y_i &= z_i + \xi_i, w_i^{(j)} = x_i^{(j)} + \xi_i^{(j)}, \end{aligned} \quad (25)$$

Входные сигналы описываются уравнениями:

$$x_i^{(j)} - 0.5 \cdot x_{i-3}^{(j)} = \tau_i^{(j)} - 0.2 \cdot \tau_{i-1}^{(j)} - 0.75 \cdot \tau_{i-2}^{(j)} + \tau_{i-4}^{(j)},$$

где  $\tau_i^{(j)}$  – белый шум. Количество наблюдений  $N = 2000$ .

Методы сравнивались по следующим характеристикам:

1. относительная среднеквадратическая погрешность параметров:

$$\delta\theta = \left\| \hat{\theta} - \theta_0 \right\| / \left\| \theta_0 \right\| \cdot 100\%,$$

2. относительная среднеквадратическая погрешность моделирования:

$$\delta z = \left\| \hat{z} - z \right\| / \left\| z \right\| \cdot 100\%,$$

где  $z = (z_1, \dots, z_N)^T$  – вектор выходной ненаблюдаемой переменной,

$\hat{z} = (\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_N)^T$  – оценка вектора выходной ненаблюдаемой переменной.

В таблице 1 приведены средние значения и среднеквадратические отклонения относительных погрешностей (среднее±СКО), рассчитанные по 50 процедурам оценивания, для различных отношений “шум-сигнал”.

Таблица 1 – Результаты идентификации динамической системы с возмущениями по всем переменным

$\frac{\sigma_\xi}{\sigma_z}$	$\frac{\sigma_\xi^{(j)}}{\sigma_x^{(j)}}$	$\delta\theta$		$\delta z$	
		Предложенный метод, %	МНК, %	Предложенный метод, %	МНК, %
0.25	0.25	6.26±4.15	15.72±6.68	3.31±3.66	10.91±5.21
0.25	0.5	9.83±9.21	27.36±10.80	4.58±2.64	21.45±10.95
0.25	0.75	21.60±26.90	40.76±16.39	8.78±7.94	36.13±15.56
0.5	0.25	10.54±5.19	25.80±6.86	4.74±1.52	14.40±4.87
0.5	0.5	15.55±10.76	35.31±10.09	7.33±3.89	26.87±11.57
0.5	0.75	20.46±16.01	44.23±10.65	8.45±3.92	36.01±13.65
0.75	0.25	15.98±6.05	35.02±6.06	7.32±1.56	18.77±5.26
0.75	0.50	21.84±12.78	44.40±9.11	9.78±4.16	28.26±11.50
0.75	0.75	26.20±13.06	51.63±11.64	11.48±5.16	38.85±12.52

На Рисунке 3 представлены графики средних погрешностей оценивания параметров и относительных погрешностей моделирования для различных отношений сигнал шум. Результаты сравнений с методом наименьших квадратов показывают, эффективность разработанных методов.

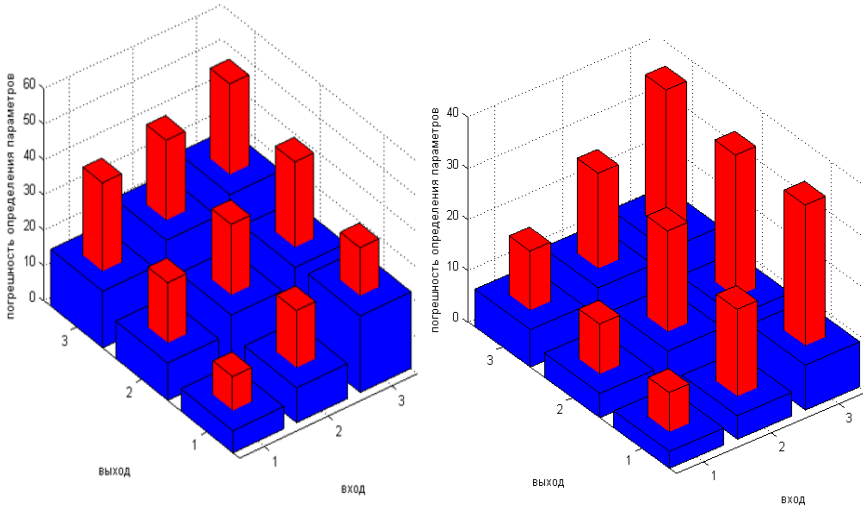


Рисунок 3 – График зависимости средних значений  $\delta\theta$  и  $\delta z$  при различных отношениях помеха-сигнал

Следующий пример демонстрирует преимущество предложенной расширенной системы (21) перед смещенной нормальной системой (20). Динамическая система описывается уравнениями:

$$z_i = 0.5\Delta^{0.2} z_{i-1} + 0.3\Delta^{0.199} z_{i-1} + \Delta^{0.2} x_i + 0.9\Delta^{0.15} x_i. \quad (26)$$

Отношение среднеквадратических отклонений помех

$$\sigma_{\xi} / \sigma_z = 10^{-14}, \sigma_{\zeta} / \sigma_x = 0.2.$$

Входной сигнал ступенчатая функция. Количество наблюдений  $N = 200$ .

Числа обусловленности для различных эквивалентных систем линейных алгебраических уравнений приведены в Таблице 2.

Таблица 2 – Числа обусловленности матриц

$\kappa_2(\Phi'^T \Phi' - \sigma^2 I)$	$3.46 \cdot 10^{35}$
$\kappa_2(\bar{A})$	$5.61 \cdot 10^{17}$

Результаты идентификации для различных эквивалентных систем линейных алгебраических уравнений приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты идентификации для (20) и (21)

Тип СЛАУ	$\delta\theta$ , %	$\delta z$ , %
СЛАУ (20)	235.58	0.77
СЛАУ (21)	0.1356	0.53

Следующий пример демонстрирует преимущество разработанного метода на основе обобщенных инструментальных переменных для случая неполной информации об автокорреляционной функции возмущения.

Динамическая система определяется уравнением:

$$z_i = 0.5\Delta^{0.9}z_{i-1} - 0.2\Delta^{1.7}z_{i-1} + \Delta^{0.6}x_i - 0.2\Delta^{1.2}x_i,$$

$$y_i = z_i + \xi_i, w_i = x_i + \xi_i. \quad (27)$$

Входной сигнал без шума определяется как

$$x_i + 0.8 \cdot x_{i-1} + 0.6 \cdot x_{i-2} = e_i + 1.7 \cdot e_{i-1} + 0.5 \cdot e_{i-2}, \quad (28)$$

где  $e_i$  — белый шум.

Результаты основаны на 50 независимых симуляциях Монте-Карло. Количество точек данных  $N$  в каждом эксперименте составило 2000.

Возмущения в выходной переменной описываются уравнением

$$\xi_i + 0.2\xi_{i-1} - 0.3\xi_{i-2} = v_i + 3v_{i-1} + 7v_{i-2} + 10v_{i-3}, \quad (29)$$

где  $v_i$  — белый шум.

Возмущения во входной переменной дробно-дифференцированный белый шум  $\Delta^{0.3}\zeta_i$ , где  $\zeta_i$  — белый шум.

В таблице 4 представлены результаты идентификации для случая, когда, автокорреляционная функция возмущения на выходе неизвестна.

Таблица 4 – Результаты идентификации

$\sigma_\xi/\sigma_z$	$\sigma_\zeta/\sigma_x$	$\delta\theta_{\text{ОПП}}$ , %	$\delta\theta_{\text{МНК}}$ , %	$\delta\theta_{\text{ГМНК}}$ , %
0.25	0.25	6.46±3.02	23.39±3.48	57.11±5.81
0.50	0.50	16.12±3.02	53.12±4.52	179.1±11.3
0.75	0.75	29.12±3.02	53.12±4.52	224.1±15.2

Как следует из результатов Таблицы 4, наилучший результат показывает предложенный метод на основе обобщенных инструментальных переменных.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках проведенных исследований в диссертации были предложены новые модели систем дробного порядка и созданы численно устойчивые методы идентификации линейных и нелинейных динамических систем

дробного порядка при наличии помех. В работе были получены следующие основные результаты:

1. Предложены новые модели дискретных динамических систем дробного порядка, обобщающие ранее известные модели.

2. Создан метод на основе обобщенных полных наименьших квадратов для идентификации параметров моделей линейных и некоторых классов нелинейных (Гаммерштейна, Винера, билинейных) систем, описываемых уравнениями с разностями дробного порядка, доказана сильная состоятельность оценок для шумов различных классов. Применение предложенного метода позволяет уменьшить в среднем погрешность оценивания параметров на 9-22 %, по сравнению с методом наименьших квадратов.

3. Создан метод идентификации моделей линейных систем дробного порядка с использованием подхода на основе обобщенных инструментальных переменных, доказана сильная состоятельность получаемых оценок параметров. Применение предложенного метода позволяет уменьшить в среднем погрешность оценивания параметров на 5-28 %, по сравнению с методом наименьших квадратов и разработанным методом на основе обобщенных полных наименьших квадратов для случая неизвестной автокорреляционной функции помехи.

4. Разработаны рекуррентные алгоритмы идентификации моделей динамических систем дробного порядка, доказана сильная состоятельность получаемых оценок параметров. Применение разработанных алгоритмов позволяет уменьшить в среднем погрешность оценивания параметров на 8-27 %, по сравнению с рекуррентным методом наименьших квадратов.

5. Созданы численно устойчивые алгоритмы для разработанных методов идентификации на основе новой расширенной системы уравнений, эквивалентной смещенной нормальной системе уравнений, отличающейся от известной расширенной системы меньшей размерностью и отсутствием комплексных коэффициентов. Применение предложенной расширенной системы уравнений позволяет сократить время решения в 1.5-1.8 раза по сравнению с комплекснозначной расширенной системой.

6. Разработана неявная итерационная схема регуляризации задачи полных наименьших квадратов, имеющая меньшее число обусловленности, чем регуляризация Тихонова, для задачи полных наименьших квадратов. Применение разработанной неявной итерационной схемы регуляризации задачи полных наименьших позволяет уменьшить погрешность в среднем на 1.5-2.0 % по сравнению с регуляризацией Тихонова задачи полных наименьших квадратов.

7. Разработан программный комплекс, реализующий предложенные модели и методы идентификации моделей динамических систем дробного порядка.

**ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**  
**Публикации в рецензируемых периодических изданиях, индексируемых**  
**реферативными базами данных Web of Science, Scopus**

1. Ivanov D.V. Symmetrical augmented system of equations for the parameter identification of discrete fractional systems by generalized total least squares / D.V. Ivanov, A.I. Zhdanov // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, No. 24. – P. 3250. ([Web of Science](#) JCR **Q1**, [Scopus](#) CiteScore **Q1**, SJR **Q2**)
2. Ivanov D.V. Identification of Fractional Models of an Induction Motor with Errors in Variables / D.V. Ivanov // Fractal and Fractional. – 2023. – Vol. 7, No. 6. – P. 485. ([Web of Science](#) JCR **Q1**, [Scopus](#) CiteScore **Q1**, SJR **Q2**)
3. Yakoub Z. Unbiased Identification of Fractional Order System with Unknown Time-Delay Using Bias Compensation Method / Z. Yakoub, O. Naifar, D.V. Ivanov // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, No. 16. – P. 3028. ([Web of Science](#) JCR **Q1**, [Scopus](#) CiteScore **Q1**, SJR **Q2**)
4. Ivanov D.V. Overview of Identification Methods of Autoregressive Model in Presence of Additive Noise / D.V. Ivanov, Z. Yakoub // Mathematics. – 2023. – Vol. 11, No. 3. – P. 607. ([Web of Science](#) JCR **Q1**, [Scopus](#) CiteScore **Q1**, SJR **Q2**)
5. Ivanov D.V. Design of  $\ell_1$  new suboptimal fractional delays controller for discrete non-minimum phase system under unknown-but-bounded disturbance / D.V. Ivanov, O.N. Granichin, V. Pankov, Z. Volkovich // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, No. 10. – P.69. ([Web of Science](#) JCR **Q1**, [Scopus](#) CiteScore **Q1**, SJR **Q2**)
6. Ivanov D.V. Identification of dynamical systems with time-varying disturbances and fractional errors-in-variables. Application example to a drone model / D.V. Ivanov, A.I. Zhdanov, I.L. Sandler // Cybernetics and Physics. – 2024. – Vol. 13, No. 1. – P. 49-56. ([Scopus](#) SJR **Q3**).
7. Ivanov, D. Stabilizing  $\ell_1$ -semioptimal fractional controller for discrete non-minimum phase system under unknown-but-bounded disturbance / D. Ivanov, O. Granichin, V. Pankov, O. Granichina // Cybernetics and Physics. – 2023. – Vol. 12, No. 2. – P. 121-128. ([Scopus](#) SJR **Q3**).
8. Ivanov D.V. Identification of models of long lines on the basis of adaptive filters with fractional-order differences / D.V. Ivanov, O.A. Katsyuba, A.E. Dubinin // Russian Electrical Engineering. – 2017. – Vol. 88. – No 3. – P. 120-122. ([Scopus](#) CiteScore **Q3** SJR **Q3**)
9. Ivanov D.V. Determination of frequency in three-phase electric circuits with autocorrelated noise / D.V. Ivanov, O.A. Katsyuba, B.K. Grigorovskiy // Russian Electrical Engineering. – 2017. – Vol. 88. – No 3. – P. 123-126. ([Scopus](#) CiteScore **Q3** SJR **Q3**)

**Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК**

10. Иванов Д.В. Идентификация параметров асинхронного двигателя с автокоррелированной ошибкой по скорости/ Иванов Д.В., Сандлер И.Л., Макаров, С.И. // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2024. – Т. 26, № 3. – С. 130-139.
11. Иванов Д.В. Регуляризованный алгоритм идентификации параметров асинхронных двигателей с ошибками в переменных /Д.В. Иванов, И.Л. Сандлер, С.И. Макаров // Южно-Сибирский научный вестник. – 2024. – № 4. – С. 31-37.
12. Ivanov D.V. Estimation of parameters of autoregressive models with fractional differences in the presence of additive noise / D.V. Ivanov //Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2023. – Т. 29, №3. – С. 93–99.

(приравнивается к изданиям категории ВАК посредством индексирования в базах [ZbMath Open](#), [MathSciNet](#))

13. Ivanov, D. V. Implicit iterative algorithm for solving regularized total least squares problems / D. V. Ivanov, A. I. Zhdanov // Вестник Самарского государственного технического университета. серия: Серия «Физико-математические науки» – 2022. – Т. 26, №. 2. – С. 311–321. (приравнивается к изданиям категории ВАК посредством индексирования в базах [Web of Science](#), [Scopus](#) SJR Q3, [ZbMath Open](#))

14. Ivanov D. V. Identification of linear dynamic systems of fractional order with errors in variables based on an augmented system of equations/ D.V. Ivanov // Вестник Самарского государственного технического университета. серия: Серия «Физико-математические науки» – 2021. – Т. 25, №. 3. – С. 508–518. (приравнивается к изданиям категории ВАК посредством индексирования в базах [Web of Science](#), [Scopus](#) SJR Q3, [ZbMath Open](#)).

15. Иванов Д.В. Идентификация систем Гаммерштейна дробного порядка с полиномиальной нелинейностью при наличии дробного белого шума / Д.В. Иванов, А.В. Иванов // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2018. – 23 (123). – С. 395–401.

16. Иванов Д.В. Идентификация модели разогрева экструдера для полимеров/ Д.В. Иванов, А.В. Иванов, И.Л. Сандлер, Н.В. Чертыковцева // Журнал Средневолжского математического общества. – 2017 – Т. 19, №3.– С. 82–89. (приравнивается к изданиям категории ВАК посредством индексирования в базах [ZbMath Open](#))

17. Иванов Д.В. Идентификация параметров рельсовой линии при наличии помех измерений / Д.В. Иванов, Е.А. Сандлер, А.В. Иванов, О.А. Дранец // Вестник транспорта Поволжья. – 2017. – № 3 (63). – С. 78-83.

18. Иванов Д.В. Идентификация тяговых асинхронных электродвигателей по переходной характеристике при наличии ошибок измерений / Д.В. Иванов, Е.А. Сандлер, И.И. Султанов, Т.И. Михеева // Вестник транспорта Поволжья. – 2017. № 4 (64). – С. 67-71.

19. Иванов Д.В. Идентификация ARX систем Винера дробного порядка при наличии помехи во входном сигнале / Иванов Д.В. // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т.18. № 2. – С. 41-46. (приравнивается к изданиям категории ВАК посредством индексирования в базах [ZbMath Open](#))

20. Иванов Д.В. Идентификация авторегрессии, описываемой уравнениями с разностями дробного порядка, с  $1/f$  шумом в выходном сигнале// Д.В. Иванов, А.Ю. Серебряков, А.В. Иванов // Вестник транспорта Поволжья. – 2016. – № 5 (59). – С. 93-99.

21. Иванов Д.В. Рекуррентная идентификация линейных динамических систем с разностями дробного порядка с помехой в выходном сигнале/ Д.В. Иванов, И.Е. Салугин // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20. № 5. – С. 1167-1169.

22. Иванов Д.В. Идентификация многомерных по входу линейных динамических систем с разностями дробного порядка при наличии помех наблюдений/ Д.В. Иванов И.Р. Широков // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1169-1173.

23. Иванов Д.В. Идентификация билинейных динамических систем с помехой в выходном сигнале / Д.В. Иванов, О.А. Кацюба, О.В. Усков// Информационные технологии и вычислительные системы. – 2015. – № 3. – С. 81-91.

24. Шутов А.В. Идентификация линейных динамических систем с матричными коэффициентами на основе разностных уравнений дробного порядка при наличии помех во входных и выходных сигналах/ А.В. Шутов, Д.В. Иванов // Вестник транспорта Поволжья. – 2015. – № 4 (52). – С. 83-91.

25. Иванов Д.В., Идентификация многомерных линейных динамических систем на основе уравнений с разностями дробного порядка при наличии помех во входных и выходных сигналах/ Д.В. Иванов, Е.Н. Иванов // Вестник транспорта Поволжья. – 2015. – № 3 (51). – С. 72-80.

26. Иванов Д.В. Рекуррентный алгоритм идентификации линейных динамических систем на основе уравнений с разностями дробного порядка при наличии помех во входных и выходных сигналах / Д.В. Иванов, И.Е. Салугин // Вестник транспорта Поволжья. – 2015. – № 3 (51). – С. 80-85.

27. Иванов Д.В. Идентификация тяговых асинхронных электродвигателей при наличии ошибок измерений/ Д.В. Иванов, О.А. Кацюба // Вестник СамГУПС. – 2015. – № 3 (29). – С. 154-158.

28. Иванов Д.В. Оценивание параметров линейных ARX-систем дробного порядка с помехой наблюдения во входном сигнале/ Д.В. Иванов // Вестник Томского государственного университета. Управление. Вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 2 (27). – С. 30-38.

29. Иванов Д.В. О состоятельности оценок параметров билинейных ARX систем с помехой наблюдения в выходном сигнале / Д.В. Иванов, В.С. Бармотина // Вестник транспорта Поволжья. – 2014. – № 2 (44). – С. 74-81.

30. Иванов Д.В. Рекуррентное оценивание билинейных ARX-систем с помехой наблюдения в выходном сигнале / Д.В. Иванов, О.В. Усков // Вестник Томского государственного университета. Управление. Вычислительная техника и информатика. – 2013. – №4 (25). – С. 43-50.

31. Иванов Д.В. Идентификация линейных динамических систем нецелого порядка с помехой в выходном сигнале/ Д.В. Иванов // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, № 5-2. – С. 2534-2536.

32. Иванов, Д. В. Идентификация многомерных по входу линейных динамических систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале / Д.В. Иванов, И.Р. Ширинов // Вестник Самарского муниципального института управления. – 2013. – № 4 (27). – С. 144-151.

33. Иванов Д.В. Рекуррентное оценивание билинейных динамических систем с помехами во входном и выходном сигналах/ Д.В. Иванов, О.В. Усков// Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 6 (131) – С.187-192.

34. Иванов Д.В. Рекуррентная идентификация билинейных ARX моделей с помехой наблюдения в выходном сигнале/ Д.В. Иванов, О.В. Усков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 96-105.

#### **Материалы конференций, индексируемые базами данных Web of Science и Scopus**

35. Ivanov D.V. Total Least Squares Based Identification for Permanent Magnet Synchronous Machine / D.V. Ivanov, I.L. Sandler, S.I. Makarov [et al.] // IEEE Proceedings of 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation

and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, 08–10 ноября 2023 года. – Lipetsk: Lipetsk State Technical University. – 2023. – P. 353-357. (Scopus)

36. Ivanov D.V. Identification of DC Motor Parameters by the Method of Extended Instrumental Variables / D.V. Ivanov, E.A. Polteva, O.S. Ivanova [et al.] // AIP conference proceedings. – 2023. – Vol. 2476 – P. 030032. (Scopus CiteScores 0.8 Q4, SJR 0.189)

37. Ivanov D.V. On Instrumental Variable-Based Method for Identification of Permanent Magnet Synchronous Machine by Noisy Data/ D.V. Ivanov, I.L. Sandler, Z. Yakoub, V.V. Antonova, M.A. Terekhin and L.A. Bezyazykova //2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, Russian Federation. – 2022. – P. 138-142. (Scopus)

38. Ivanov D.V. et al. Identification of parameters of induction motor with error of speed sensor // Journal of Physics: Conference Series. – 2022. – Vol. 2176. – P. 012027. (Scopus CiteScores Q4)

39. Ivanov D.V. Identification Ramsay Curve Total Instrumental //Lecture Notes in Networks and Systems – 2021. – Vol 139. – P. 437-442. (Scopus Citescore Q4, SJR Q4)

40. Ivanov D.V. Identification of Parameters of DC Motor of Independent Excitation by Noisy Data / D.V. Ivanov, I.L. Sandler, N.V. Chertykovtseva, D.I. Mitroshin, O.S. Ivanova, A.A. Kormakov // 2021 3rd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – 2021. – P. 194-198. (Scopus)

41. D. V. Ivanov, A. I Zhdanov. Numerically stable algorithm for identification of linear dynamical systems by extended instrumental variables // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1745. – P. 012077 (Scopus CiteScores Q4)

44. Ivanov D.V. Generalized total least squares for identification of electromagnetic parameters of an induction motor/ D.V. Ivanov, I.L. Sandler, N.V. Chertykovtseva // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 2032. – P. 012093. (Scopus CiteScores Q4)

45. Ivanov D.V. Structural-parametric identification of the sum of Hyperbolic functions with additive noise /D. V. Ivanov, I. L. Sandler, O. S. Ivanova [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 2032. – P. 012060. (Scopus CiteScores Q4)

46. Ivanov D.V. Estimation of Parameters of Hyperbolic Functions with Additive Noise / D.V. Ivanov, I.L. Sandler, N.V. Chertykovtseva // Advances in Science and Technology – 2021. – Vol.105. – P. 302-308. (Scopus)

47. Ivanov D.V. Estimation of Parameters of Hyperbolic Functions with Additive Noise / D.V. Ivanov, I.L Sandler, N.V. Chertykovtseva //Advances in Science and Technology, 105, 2021, pp. 302–308. (Scopus CiteScores Q4)

48. Sandler I.L. Identification of generalized Cobb-Douglass production functions with multiplicative errors in variables / Sandler I.L., Ivanov D.V. [et al.] // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2021. – Vol. 1064. – P. 012015. (Scopus CiteScores Q3)

49. Ivanov D.V. Identification of FARARX Models with Errors in Variables / D.V. Ivanov, I.L. Sandler, O.A. Katsyuba, V.N. Vlasova// Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2020. – Vol. 1006. – P. 481-487. (Scopus)

50. Ivanov D.V. Weighted Total Least Squares for Frequency Estimation of Real Sinusoids Based on Augmented System / D.V. Ivanov, A.I. Zhdanov // 2020 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). – 2020, P. 1-5. (Web of Science, Scopus)

51. Ivanov D.V. Identification of Transmission Line Parameters Using Noisy PMU Measurements / D.V. Ivanov, I.L Sandler, N.V. Chertykovtseva // 2020 2nd International

- Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – 2020. – P. 886-890. (Scopus)
52. Ivanov D.V. Identification of slide valve dynamics with errors in variables / D. V. Ivanov, I.L. Sandler, E.A. Burtseva, V.N. Vlasova // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2019. – Vol. 560. – P. 012021. (Scopus CiteScores Q3)
53. D. V. Ivanov, Identification of exponential trend models with fractional white noise / D.V. Ivanov, N.V. Chertykovtseva, A.A. Terekhova Zharkova, E.A. Andreeva // Journal of Physics: Conference Series: – 2019. – Vol. 1368. – P. 042061. (Scopus CiteScores 0.8 Q4)
42. Ivanov D.V. Learning Algorithm for Fractional Dynamical Systems with Autocorrelated Errors-in-Variables / D.V. Ivanov, I.L. Sandler, N.V. Chertykovtseva, E.U. Bobkova // Procedia Computer Science. – 2019. – Vol. 154. – P. 311-318. (Scopus CiteScore Q2)
43. Ivanov D.V. Genetic algorithm of structural and parametric identification of Gegenbauer autoregressive with noise on output/ D.V. Ivanov, V.V. Engelgardt, I.L. Sandler // Procedia Computer Science. – 2018. – Vol. 131. – P. 619-625. (Scopus CiteScore Q2)
54. Ivanov D.V. Identification of Fractional Linear Dynamical Systems with Autocorrelated Errors in Variables by Generalized Instrumental Variables / D.V. Ivanov, I.L. Sandler, E.V. Kozlov // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, Is. 32. – P. 580-584. (Scopus CiteScore Q3, SJR Q3)
55. Ivanov D.V. Recursive Identification of Complex Valued Weights Linear Dynamical Systems of Fractional Order with Errors-in-Variables / D. V. Ivanov, S. A. Nikishchenkov, A. A. Zharkova [et al.] // 2018 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS) – 2018. – P. 1-6. (Web of Science, Scopus)
56. Ivanov D.V. Identification of dynamic errors-in-variables bilinear systems of fractional order / D.V. Ivanov, I.L. Sandler, N.V. Chertykovtseva // J. Phys.: Conf. Ser. – 2018. – Vol. 1096. – P. 012194. (Scopus CiteScores Q4)
57. Engelgardt, V. V. Structural and parametric identification of linear dynamic systems of fractional order with noise on input and output / V. V. Engelgardt, D.V. Ivanov, O. A. Katsyuba // 2017 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2017– Astana, 2017. – P. 7998556. (Scopus)
58. Ivanov D.V. Recursive identification of bilinear dynamical systems with noise in output signal / D. V. Ivanov, E. U. Bobkova, A. A. Zharkova // Proceedings of 2017 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTS 2017, Novi Sad, 27 сентября – 02 2017 года. – Novi Sad. – 2017. – P. 8110066. (Scopus)
59. Ivanov D.V. Identification fractional linear dynamic systems with fractional errors-in-variables / D.V. Ivanov, A.V. Ivanov// Journal of Physics: Conference Series, Tomsk, 21–26 сентября 2016 года. – Tomsk, 2017. – P. 012058. (Scopus CiteScores Q4)
60. Ivanov D.V. Identification discrete fractional order Hammerstein systems / D.V. Ivanov// 2015 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). – 2015. – P. 7147074. (Web of Science, Scopus)
61. Ivanov D.V. Identification discrete fractional order linear dynamic systems with errors-in-variables/ D.V. Ivanov // East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2013). – 2013. – P. 6673122. (Web of Science, Scopus)
62. Ivanov D.V. Identification discrete fractional order linear dynamic systems with output-error / D.V. Ivanov // 2013 International Siberian Conference on Control and

### **Интеллектуальная собственность**

63. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012660920. Рекуррентное оценивание параметров многомерных по входу линейных динамических систем с автокоррелированными помехами во входных и выходных сигналах методом расширенных инструментальных переменных. /Д.В. Иванов, Л.Я. Макаровский, Д.Л. Митрошин, И.Л. Сандлер. Заявитель и правообладатель – Самарский государственный университет путей сообщения; заявл. 16.10.2012; зарег. 30.11.2012 г.

64. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012619342. Рекуррентное оценивание параметров с локально автокоррелированной помехой в выходном сигнале методом нелинейных наименьших квадратов/Д.В. Иванов, Л.Я. Макаровский, Д.Л. Митрошин, И.Л. Сандлер. Заявитель и правообладатель – Самарский государственный университет путей сообщения; заявл. 27.09.2012; зарег. 16.10.2012 г.

65. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012613337. Оценивание параметров билинейных динамических систем с помехой в выходном сигнале методом нелинейных наименьших квадратов/ Д.В. Иванов, О.В. Усков Заявитель и правообладатель – Самарский государственный университет путей сообщения; заявл. 14.02.2013; зарег. 02.04.2013 г.

66. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013619290. Оценивание параметров динамической системы нецелого порядка при наличии помехи в выходном сигнале методом нелинейных наименьших квадратов /Д.В. Иванов. Заявитель и правообладатель – Самарский государственный университет путей сообщения; заявл. 13.08.2013; зарег. 01.10.2013 г.

67. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013617385. Оценивание параметров динамической системы нецелого порядка при наличии помех во входном и выходном сигнале методом нелинейных наименьших квадратов/ Д.В. Иванов Заявитель и правообладатель – Самарский государственный университет путей сообщения; заявл. 13.08.2013; зарег. 07.10.2013 г.