

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет»

На правах рукописи

ЛАПИЧ Андрей Олегович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АЛГОРИТМЫ
ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ
ПО ИЗМЕРЕНИЯМ РАССЕЯННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ (технические науки)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Смирнов Юрий Геннадьевич

Пенза - 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ И ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ.....	12
1.1. Прямые и обратные задачи	12
1.2. Методы неразрушающего контроля	17
1.3. СВЧ-Томография	29
1.4. Обзор известных устройств	32
Основные результаты и выводы по главе 1.....	35
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ.....	37
2.1. Прямые задачи дифракции.....	37
2.1.1. Скалярная двумерная задача дифракции	38
2.1.2. Скалярная трехмерная задача дифракции.....	43
2.1.3. Векторная задача дифракции	46
2.2. Обратная задача дифракции в полушаре.....	49
Основные результаты и выводы по главе 2.....	52
ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ.....	53
3.1. Общая схема метода коллокации	53
3.2. Метод коллокации в прямоугольной и цилиндрической системах координат	55
3.3. Методы коллокации для прямой и обратной задач в сферической системе координат	57
3.4. Применение явного и неявного метода для решения нелинейных задач ...	62
Основные результаты и выводы по главе 3.....	64

ГЛАВА 4. КОМПЛЕКС ПРОГРАММ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ	66
4.1. Описание комплекса программ	66
4.2. Применение параллельных вычислений	67
4.3. Результаты расчетов для двумерного случая.....	72
4.4. Результаты расчетов для трехмерного случая	79
4.5. Применение программного пакета COMSOL Multiphysics.....	84
4.6. Результаты натуральных измерений	95
4.7. Сравнение результатов натуральных измерений с результатами математического моделирования	107
Основные результаты и выводы по главе 4.....	109
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	111
ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	113
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	114
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ	129
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Акты внедрения результатов диссертации.....	133
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Описание макета измерительной установки и объектов исследования.....	136

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Дефектоскопия, медицинская диагностика и задачи неразрушающего контроля требуют разработки и применения передовых технологий для надежного обнаружения и точного описания дефектов (неоднородностей) в различных материалах и структурах. Для этого необходимо эффективное использование современных численных методов, вычислительных алгоритмов и специализированных программных комплексов, позволяющих анализировать данные измерений (например, рассеяние электромагнитных волн) и получать параметры, описывающие размер, форму и расположение дефектов. Такие задачи называются обратными в электродинамике.

Одной из перспективных технологий решения указанного круга задач является микроволновая томография, позволяющая реконструировать небольшие (не более 1 см) неоднородности, расположенные внутри тел, с высоким контрастом. Для решения этой задачи требуется комплексный подход, включающий построение адекватных математических моделей для описания исследуемых процессов, а также эффективное применение методов решения обратной задачи для извлечения необходимой информации или определения неизвестных параметров. Таким образом, постановка обратной задачи требует решения векторного объемного сингулярного интегрального уравнения первого рода. Через его решение восстанавливается комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Одна из главных проблем заключается в том, что исходной информации, как правило, оказывается недостаточно: измерения всегда ограничены по числу точек, по набору ракурсов или по частотному диапазону. Это приводит к неустойчивости решения, неединственности получаемых оценок и требует применения регуляризирующих алгоритмов или априорных ограничений на искомые параметры. В связи с этим требуется разработка или адаптация

существующих математических моделей, чтобы они могли успешно работать с небольшим объемом информации.

Микроволновая томография обладает потенциалом для использования в медицине, промышленности и безопасности. Среди ключевых ее преимуществ: высокая чувствительность к изменениям диэлектрических свойств материалов, компактность оборудования, безопасность, скорость и доступность, которые делают ее конкурентоспособной альтернативой традиционным методам визуализации. В современных исследованиях значительное внимание уделяется перспективам использования СВЧ-технологий в медицинской диагностике, с акцентом на их применение для выявления опухолей. Уникальная способность микроволновой томографии выявлять различия в диэлектрических свойствах здоровых и пораженных тканей делает ее перспективным инструментом для ранней диагностики рака молочной железы, головного мозга и других онкологических заболеваний. Это обусловлено тем, что злокачественные новообразования часто имеют более высокую диэлектрическую проницаемость по сравнению с окружающими здоровыми тканями, что позволяет их выявлять с помощью микроволновой томографии с высокой чувствительностью. Разработка эффективных алгоритмов реконструкции изображений и методов обработки данных для микроволновой томографии является актуальной задачей, направленной на улучшение диагностики и повышение выживаемости пациентов.

Рак молочной железы (РМЖ) представляет собой злокачественное новообразование, развивающееся из клеток молочной железы. Согласно данным Всемирной организации здравоохранения, это заболевание занимает первое место среди всех онкологических патологий у женщин, составляя 16 % от общего числа случаев рака [1]. Ежегодно в мире диагностируется около 1,5 миллиона новых случаев РМЖ [2]. По данным российских исследователей, в период с 2004 по 2020 годы заболеваемость РМЖ в России увеличилась на 112 % [3]. Согласно официальной статистике, смертность от РМЖ составляет 17,3 % от всех злокачественных новообразований у женщин [4]. Стандартизированный

показатель смертности в 2017 году составил 16,5 на 100 тысяч женского населения [5].

Цель исследования состоит в математическом моделировании для обнаружения неоднородностей в диэлектрических телах по измерениям ближнего электромагнитного поля с помощью решения задачи СВЧ-томографии.

Для достижения поставленной цели необходимо решить **научную задачу**, состоящую в разработке численных методов и вычислительных алгоритмов для обнаружения неоднородностей в диэлектрических телах по данным измерений ближнего поля на основе решения обратной задачи.

Для достижения поставленной цели и решения научной задачи сформулированы следующие частные научные **задачи**:

1. Выбрать математические модели и на основе математического моделирования определить неоднородности в двумерных и трехмерных диэлектрических телах с помощью решения задачи дифракции волн на объекте, которые по данным ближнего поля позволяют идентифицировать дефекты и неоднородности.

2. Разработать численный итерационный метод решения нелинейных задач и применить двухшаговый метод для решения обратных электромагнитных задач дифракции волн на полушаре.

3. Разработать численные методы и вычислительные алгоритмы решения прямой нелинейной и векторной обратной задач дифракции волн на объекте.

4. Создать программный комплекс, реализующий численные методы для решения прямых и обратных задач.

Объектом исследования является процесс переотражения электромагнитных волн от неоднородных объектов.

Предметом исследования являются математические модели дифракции волн на объектах и вычислительные алгоритмы для обнаружения неоднородностей в диэлектрических объектах.

Методология и методы исследования. В работе применены методы решения задач электродинамики, теории сингулярных интегральных уравнений, численные методы, методы математического моделирования и информационных технологий.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Разработан неитерационный двухшаговый метод для решения обратной задачи дифракции волны на полушаре, отличающийся сведением краевой задачи к решению объемного интегрального уравнения по области неоднородности, позволяющий повысить точность определения неоднородностей малого размера по результатам измерения ближнего поля.

2. Разработан итерационный метод решения объёмного интегрального уравнения для нелинейной задачи дифракции на неоднородных объектах, отличительной особенностью которого является учёт нелинейности диэлектрической проницаемости в задаче дифракции, а также модифицирован метод коллокации для решения интегрального уравнения, отличающийся новыми базисными функциями.

3. На основе предложенных численных методов созданы новые алгоритмы, реализованные в программном комплексе и позволяющие определять геометрические и электродинамические параметры неоднородностей в диэлектрическом теле для решения обратных задач дифракции.

Теоретическая значимость. Результаты математического моделирования, разработанные численные методы и эффективные алгоритмы создают основу для прорывных технологий обнаружения неоднородностей и дефектов, с учетом специфики имеющегося у разработчиков оборудования и измерительной аппаратуры, что позволит значительно улучшить существующие системы неразрушающего контроля и неинвазивной диагностики.

Практическая значимость. Предоставляется разработчикам комплекс программ для решения ряда сложных прямых и обратных задач электродинамики.

Разработанные методы отличаются от известных точностью определения и локализации неоднородностей при зашумлении входных данных на уровне 10 %. В частности, программный комплекс позволяет существенно продвинуться в улучшении качества медицинской диагностики, дефектоскопии и задачах неразрушающего контроля за счет повышения точности, надежности и скорости получения информации. Создан макет измерительной установки для получения входных данных – значений ближнего поля, рассеянного объектом, необходимых для решения обратной задачи, что позволяет провести проверку точности моделирования.

Соответствие диссертации научной специальности. Диссертация выполнена в соответствии с требованиями специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Области исследования: пункт 2 – Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий; пункт 3 – Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента; пункт 8 – Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Степень достоверности полученных результатов, сформулированных в диссертации, подтверждается корректным применением математического аппарата, верификацией моделей на тестовых задачах и экспериментальных данных, корректной реализацией численных алгоритмов, использованием современного программного обеспечения и сопоставлением с данными других исследований по этой тематике. Полученные результаты прошли апробацию на научно-технических конференциях международного и всероссийского уровня.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Неитерационный двухшаговый метод решения векторной обратной задачи на диэлектрическом неоднородном полушаре, позволяющий повысить

точность выявления неоднородностей малого размера по результатам измерения ближнего поля.

2. Итерационный метод для решения прямой нелинейной задачи дифракции волн на объекте, позволяющий при восстановлении параметров неоднородностей учитывать влияние нелинейности поля на процесс дифракции волн.

3. Программный комплекс, реализующий численные методы и разработанные на их основе вычислительные алгоритмы, для решения прямой нелинейной задачи дифракции и векторной обратной задачи для определения геометрических и электродинамических параметров неоднородностей в диэлектрическом теле.

4. Положительные результаты экспериментального исследования возможности определения неоднородности в объектах методом микроволновой томографии с помощью данных, полученных на макете измерительной установки.

Реализация работы и внедрение результатов. Результаты и разработанный комплекс программ использовались при выполнении проектов: грант РНФ № 20-11-20087 (исполнитель), Госзадание Минобрнауки РФ № 124020200015-7 (исполнитель), ректорский грант для молодых кандидатов наук и аспирантов №ХП-480/24 (руководитель). Предложенные методы и алгоритмы восстановления параметров неоднородных объектов используются в разработках и исследованиях:

1. ФГБОУ ВО Пензенского государственного университета в рамках учебного процесса по направлению подготовки 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика» кафедры «Математика и суперкомпьютерное моделирование».

2. ООО «Ромб» при проверке диэлектрических комплектующих на предмет наличия дефектов и неоднородностей (имеется акт о внедрении).

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных и всероссийских научных конференциях:

- «Матричные методы и интегральные уравнения» (8–12 августа 2026 г., ФТ Сириус, Научно-технологический университет Сириус);
- «Квазилинейные уравнения, обратные задачи и их приложения» QIPRA2025 (6–10 октября 2025 г., ФТ Сириус, Научно-технологический университет Сириус);
- «Суперкомпьютерные дни в России 2025» (29–30 сентября 2025 г., Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова);
- «Матричные методы и интегральные уравнения» (28 июля–1 августа 2025 г., ФТ Сириус, Научно-технологический университет Сириус);
- «Photonics and Electromagnetics Research Symposium» PIERS2025 (3–8 мая 2025 г., Абу-Даби);
- XXIV Международная научно-техническая конференция «Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике» (22–23 ноября 2024 г., Пенза, ФГБОУ ВО Пензенский государственный университет);
- VII научный форум «Телекоммуникации: теория и технологии» ТТТ-2024 конференции «Физика и технические приложения волновых процессов» ФиТПВП-2024 (6–8 ноября 2024 г., Самара, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики ПГУТИ);
- XVI Международной научно-технической конференции с элементами научной школы и конкурсом научно-исследовательских работ для студентов, аспирантов и молодых ученых (6–7 ноября 2024 г., Пенза, ФГБОУ ВО Пензенский государственный университет);
- «Суперкомпьютерные дни в России 2024» (23–24 сентября 2024 г., Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова);
- «Матричные методы и интегральные уравнения» (12–16 августа 2024 г., ФТ Сириус, Научно-технологический университет Сириус);
- VI научный форум «Телекоммуникации: теория и технологии» ТТТ-2023 конференции «Физика и технические приложения волновых процессов»

ФиТПВП-2023 (22–24 ноября 2023 г., Казань, Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева КНИТУ-КАИ).

- «Матричные методы и интегральные уравнения» (25–31 августа 2023 г., ФТ Сириус, Научно-технологический университет Сириус);

Публикации. По теме исследования опубликовано 24 работы, отражающие основные положения исследования, среди которых – 3 публикации в журналах, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России, 10 публикаций в изданиях, индексируемых в международной базе данных SCOPUS, а также 4 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. Все основные представленные в диссертации результаты были получены автором лично, либо при его непосредственном участии. Результаты, опубликованные совместно с другими авторами, принадлежат авторам в равных долях. Постановка цели исследования и формулировка задач были проведены автором совместно с научным руководителем. Программная реализация численных алгоритмов и решение модельных примеров выполнены автором самостоятельно.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 126 источников и трех приложений. Диссертация изложена на 149 страницах машинописного текста, включая 74 рисунков и 5 таблиц, иллюстрирующих результаты исследования.

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ И ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ

1.1. Прямые и обратные задачи

Математическое моделирование широко применяется для изучения окружающего мира. Однако даже самые сложные модели являются упрощенными представлениями реальности, фокусируясь лишь на определенных аспектах изучаемого явления или процесса. В математическом моделировании исследователь целенаправленно идеализирует объект, отбрасывая несущественные факторы. Такое упрощение позволяет построить абстрактную модель, которая, тем не менее, сохраняет достаточную точность для практических нужд. Модель служит инструментом для вычислительных экспериментов, прогноза поведения системы и получения данных, недоступных прямому измерению. В данной методологии традиционно различают два класса задач – прямые и обратные. Хотя они тесно связаны и часто решаются совместно, их цели, подходы и сложности существенно отличаются.

Прежде чем перейти к рассмотрению обратных задач, необходимо четко определить понятие прямой задачи в математической физике. Прямая задача заключается в нахождении решения (аналитического или численного) уравнений математической физики, описывающих различные физические процессы, такие как распространение волн (звуковых, электромагнитных, сейсмических), теплоперенос, диффузия и др. Для однозначного решения прямой задачи необходима полная информация о геометрии области, физических свойствах среды (задаваемых коэффициентами уравнений), а также начальных и граничных условиях. Однако на практике мы почти никогда не располагаем полной информацией об изучаемом объекте. Зачастую неизвестными остаются не только точные значения физических параметров или геометрические характеристики

области, но даже сам вид определяющих соотношений. В сложившихся условиях классический подход становится неприменимым, и исследователю приходится обращаться к постановке обратных задач. В рамках прямых задач математической физики принято считать, что внешние воздействия, внутренняя структура среды и все коэффициенты моделей заданы априори. Исходя из этих предпосылок, основная цель расчетов сводится к прогнозированию эволюции системы и получению количественных оценок ее отклика на те или иные возмущения. Достигается это, как правило, путем применения численных схем, вывода аналитических формул или сочетания обоих подходов. Конечным продуктом решения прямой задачи выступает рассчитанное поведение объекта, которое в дальнейшем сопоставляется с натурными измерениями. Такое сравнение служит двум целям: во-первых, проверке адекватности самой модели, а во-вторых, извлечению скрытой информации о свойствах реального образца. При этом необходимо отдавать себе отчет о том, что достоверность получаемых результатов жестко привязана к качеству входных параметров и к тому, насколько точно выбранная математическая абстракция отражает суть происходящих процессов. Процедура формализации прямой задачи представляет собой многошаговую последовательность действий, каждое из которых логически вытекает из предыдущего и требует строгого обоснования. Формализация прямой задачи предполагает последовательное выполнение ряда этапов. На первом этапе формулируется задача: определяются объект или явление, их ключевые свойства и внутренние связи. Далее выбирается математический аппарат – система уравнений (дифференциальных, интегральных, алгебраических или их комбинаций), адекватная природе объекта и требуемой степени детализации. Затем задаются численные параметры модели (константы, коэффициенты), значения которых берутся из эксперимента, теоретических оценок или литературы. После этого ставятся начальные и граничные условия, описывающие состояние системы в начальный момент и на границах расчётной области. Следующий шаг – решение системы уравнений, которое при возможности

выполняется аналитически, а в сложных случаях – численно с применением методов конечных элементов, конечных разностей и др. Завершается процедура анализом полученного решения, интерпретацией результатов и их визуализацией в виде графиков, таблиц или иных форм.

К настоящему времени прямые задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрических телах исследованы очень подробно. Развиты численные методы их решения, созданы пакеты прикладных программ для проведения инженерных расчетов (COMSOL Multiphysics, HFSS, FEKO, CST Studio Suite). К основным методам решения таких задач дифракции относятся: метод конечных разностей во временной области (который в электродинамике обычно называют FDTD – Finite Difference Time Domain) [6], метод конечных элементов [7], метод интегральных уравнений [8–13], метод дискретных источников [14], асимптотические высокочастотные и низкочастотные методы [15]. Имеются классические монографии по численным методам решения электродинамических задач [16,17]. Здесь указаны только некоторые известные монографии по численным методам в электродинамике. В диссертации для решения прямых задач дифракции применяется метод объемных сингулярных интегральных уравнений [8,9], поскольку на его основе решается обратная задача дифракции.

Область обратных задач в математической физике получила известность, в немалой степени, благодаря новаторскому вкладу выдающихся российских математиков Андрея Николаевича Тихонова и Михаила Михайловича Лаврентьева. Их работы значительно продвинули теоретическое понимание и практическое применение этих сложных задач [18–25].

Обратные задачи классифицируются по уровню детализации моделируемой системы:

- Черный ящик: внутренняя структура системы полностью неизвестна. Задача заключается в определении параметров системы на основе только входных и выходных данных.

- Серый ящик: частично известна внутренняя структура системы. Задача заключается в определении неизвестных параметров системы на основе частичной информации о ее структуре, входных и выходных данных.

- Белый ящик: внутренняя структура системы полностью известна. Задача заключается в определении параметров системы на основе полной информации о ее структуре, входных и выходных данных.

Диагностика и идентификация обычно применяются к моделям «черного» и «серого» ящиков, управление – ко всем трем, а проектирование – к «белому». В 1960-х годах теория обратных задач находилась на начальной стадии развития. Исследования начались с простых задач, постепенно переходя к сложным нелинейным, многомерным и многофакторным задачам. Это потребовало разработки новых математических методов и вычислительных алгоритмов, способных справиться с некорректностью, многовариантностью и вычислительной сложностью таких задач. Усложнение моделей включало учет особенностей геометрии области решения (сложная форма, наличие неоднородностей), а также динамических процессов, таких как движение границ или изменение параметров системы во времени. Развитие вычислительной техники сыграло критическую роль в этом процессе, позволив решать все более сложные задачи численными методами.

Обратные задачи используют косвенные наблюдения для определения параметров математической модели, описывающей исследуемый объект. Поскольку реальные процессы внутри объекта неизвестны, цель состоит в подборе параметров модели, которые наилучшим образом соответствуют наблюдаемым данным. Этот процесс называется идентификацией математической модели и включает сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными. Задача идентификации часто не имеет единственного решения и требует применения методов оптимизации и регуляризации для получения устойчивых и физически значимых результатов.

Теория и практика решения обратных задач математической физики имеют богатую историю, основы которой были заложены работами выдающихся ученых. Среди них следует отметить А. Н. Тихонова [22–25], А. С. Алексеева [26,27], В. Г. Романова [28–29], М. М. Лаврентьева [18–21], В. А. Амбарцумяна [30,31], Г. Борга [32], И. М. Гельфанда [33], Б. М. Левитана [34] и М. Г. Крейна [35], а также многих других исследователей. Основной идеей решения подобных задач заключалась в ограничении пространства поиска решений. Это достигается путем введения множества корректности – ограниченного и компактного подмножества пространства решений, в котором гарантированно существует решение и обеспечивается устойчивость вычислительного процесса. Работы этих авторов послужили отправной точкой для дальнейших исследований. Разработанные ими методы и подходы были успешно применены многими учеными (а также их учениками и последователями) для решения разнообразных обратных задач. Среди них: Ю. Е. Аниконов [36], А. В. Баев [37], А. С. Барашков, С. П. Белинский, А. С. Благовещенский [38], Б. А. Бубнов, А. Л. Бухгейм [39], Н. П. Волков, В. И. Дмитриев, С. И. Кабанихин [40,41], А. Д. Искендеров, А. Л. Карчевский, В. С. Корнилов [42], М. В. Клибанов [43], А. М. Денисов, С. В. Мартаков, Б. С. Парийский, В. И. Прийменко, А. И. Прилепко, Т. П. Пухначева, М. Г. Савин, А. М. Федотов, В. А. Чеверда, В. Г. Чередниченко, В. Г. Яхно, L. Veilina, R. Novikov, D. Colton, R. Kress и многие другие [44–51]. Совместные усилия этих исследователей привели к существенному прогрессу в понимании и решении обратных задач, что нашло широкое применение в различных областях науки и техники.

Обратные задачи математической физики отличаются рядом трудностей, делающих их решение сложной вычислительной задачей. Во-первых, они обычно нелинейны, что усложняет применение стандартных методов решения уравнений. Нелинейность часто приводит к появлению множества локальных экстремумов в функционалах, используемых для поиска решения, затрудняя поиск глобального минимума, соответствующего истинному решению. Во-вторых, решения часто

неединственны, требуя избыточной информации для обеспечения единственности. Например, в задачах определения формы полости по отраженным волнам необходимо измерение в широком диапазоне частот; ограничение этого диапазона на практике приводит к неоднозначности и появлению «фантомных» решений – артефактов, не соответствующих реальной геометрии. В-третьих, и это наиболее существенно, обратные задачи часто некорректны в смысле Адамара: решение может не существовать, быть неединственным или неустойчивым к малым изменениям входных данных (экспериментальных измерений, которые всегда содержат погрешности). Отсутствие непрерывности обратного оператора означает, что малые ошибки в данных могут привести к большим ошибкам в решении, делая результаты ненадежными.

Значительный прогресс в методах решения некорректных задач был достигнут в 1960-х годах благодаря работам А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова и других ученых.

1.2. Методы неразрушающего контроля

Обратные задачи дифракции составляют основу неинвазивных методов исследования и неразрушающего контроля, позволяя восстанавливать внутреннюю структуру и свойства материалов по измеренному полю рассеянного излучения. В отличие от прямых задач, где по заданным параметрам объекта вычисляется дифракционная картина, обратные задачи направлены на реконструкцию характеристик объекта по экспериментальным данным. Такие задачи относятся к классу некорректно поставленных: их решение крайне чувствительно к погрешностям измерений и часто неединственно, что существенно осложняет интерпретацию результатов. Несмотря на эти трудности, развитие эффективных методов решения обратных задач дифракции имеет

критическое значение для прогресса во многих научных и инженерных дисциплинах.

В соответствии с Общероссийским классификатором продукции (ОКПД2), приборы неразрушающего контроля материалов и изделий (код 26.51.66.120) классифицируются по следующим типам: акустические (26.51.66.121), капиллярные (26.51.66.122), магнитные (26.51.66.123), оптические и тепловые (26.51.66.124), радиационные (26.51.66.125), радиоволновые (26.51.66.126), электромагнитные (вихретоковые) и электрические (26.51.66.127), а также прочие методы неразрушающего контроля (26.51.66.129).

В соответствии с ГОСТ 18353 (ГОСТ Р 56542-2015) [52], неразрушающий контроль объектов основан на различных физических явлениях и включает следующие основные методы:

- Акустический контроль: использует анализ параметров упругих волн, генерируемых или возникающих в объекте контроля. В том случае, если применяются упругие волны ультразвукового диапазона (с частотой выше 20 кГц), термин «ультразвуковой контроль» является допустимой альтернативой термину «акустический контроль» (рисунок 1).

- Вихретоковый контроль: использует анализ взаимодействия виброакустических сигналов, генерируемых работающим объектом.

- Магнитный контроль: использует анализ взаимодействия магнитного поля с объектом для выявления дефектов.

- Оптический контроль: совокупность методов исследования объектов и материалов, основанных на использовании оптического излучения.

Также стоит отметить и другие методы: контроль проникающих веществ (выявляет дефекты по проникновению вещества в их полости), радиоволновой контроль (РВНК) (основанный на использовании радиоволн (рисунок 2)), тепловой контроль (основанный на анализе их тепловых характеристик (рисунок 3)), радиационный контроль (основанный на применении ионизирующего излучения (рисунок 4)).

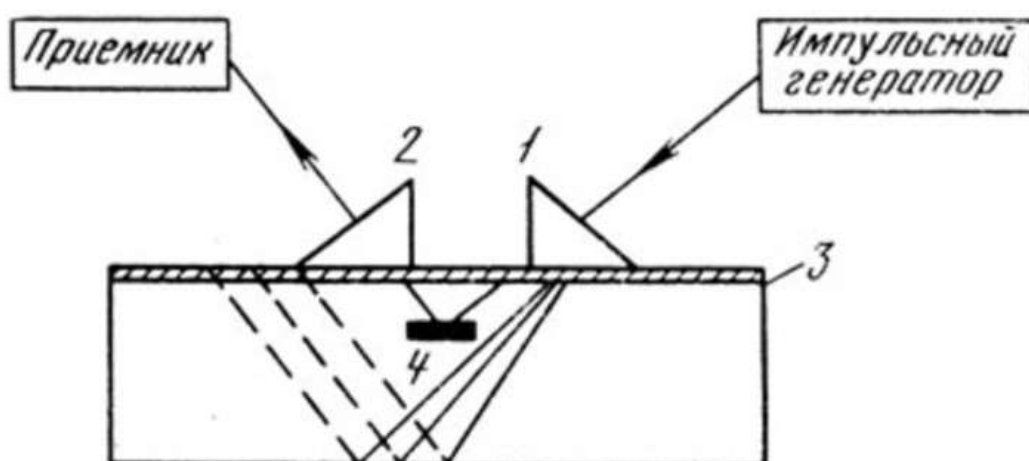


Рисунок 1 – Схема ультразвукового контроля: 1 и 2 – датчики (щупы) с пьезоэлектрическим материалом, 3 – среда контроля, 4 – дефект

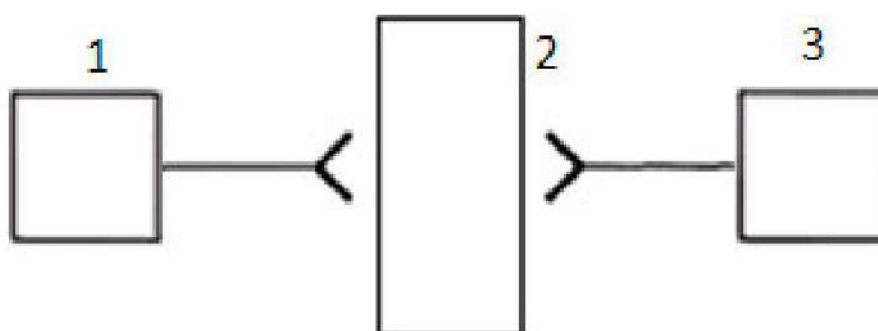


Рисунок 2 – Схема проведения радиоволнового контроля: 1 – СВЧ-генератор, 2 – объект исследования, 3 – СВЧ-приемник

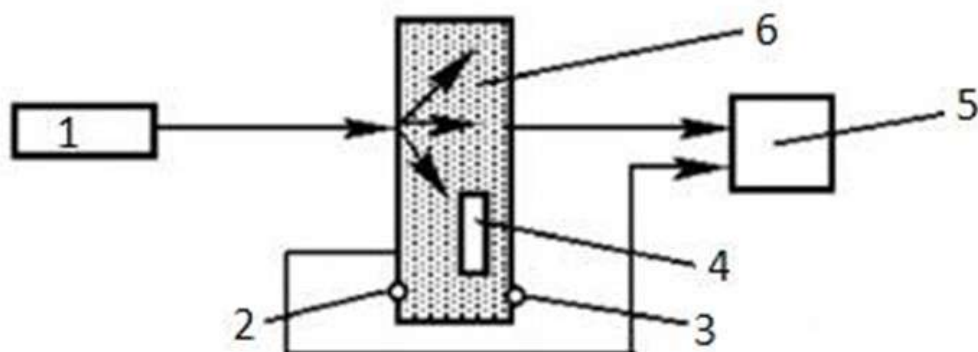


Рисунок 3 – Схема проведения тепловой дефектоскопии: 1 – источник теплового нагружения, 2 – передняя поверхность, 3 – задняя поверхность, 4 – дефект, 5 – устройство контроля (детектор), 6 – объект дефектоскопии

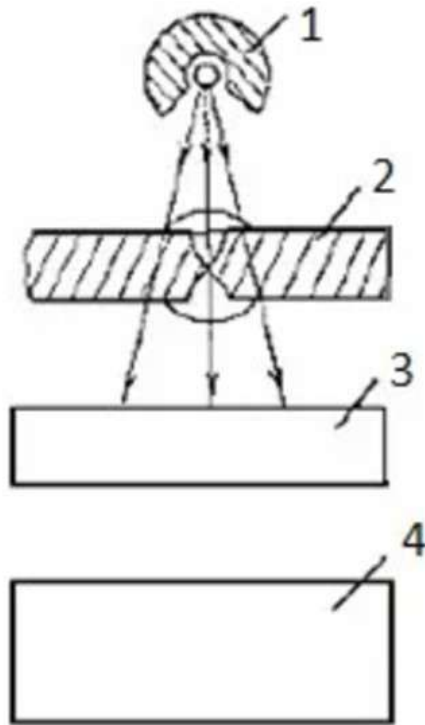


Рисунок 4 – Схема проведения радиационного контроля: 1 – источник излучения, 2 – объект контроля, 3 – детектор (приемник) излучения, 4 – средство расшифровки результатов и их оценки

Методы НК существуют уже много десятилетий, их развитие тесно связано с прогрессом в различных областях физики и техники. Классификация методов НК по степени проникновения в материал подразделяется на два вида: объемные и поверхностные.

Объемные методы НК позволяют обнаруживать внутренние дефекты в материале, проникая на значительную глубину. К объемным методам относятся:

- Ультразвуковая дефектоскопия (УЗД): волны проникают в материал и отражаются от дефектов, создавая эхо-сигналы (рисунок 5). Глубина проникновения зависит от частоты ультразвука и свойств материала.
- Рентгеновская и гамма-дефектоскопия: излучение проходит через материал, и его ослабление на выходе регистрируется (рисунок 6). Различия в

интенсивности позволяют обнаружить дефекты, имеющие разную плотность по сравнению с основным материалом.

- Компьютерная томография (КТ): позволяет создавать трехмерные изображения внутренней структуры объекта, давая возможность детально изучить расположение и форму дефектов. В основе лежит принцип рентгеновской дефектоскопии, но со значительно большей детализацией.

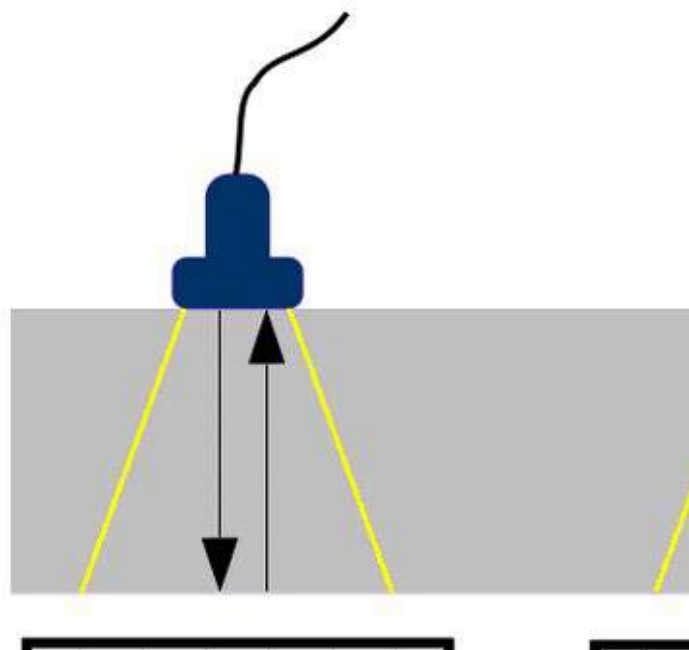


Рисунок 5 – Схема НК (Ультразвуковая дефектоскопия)

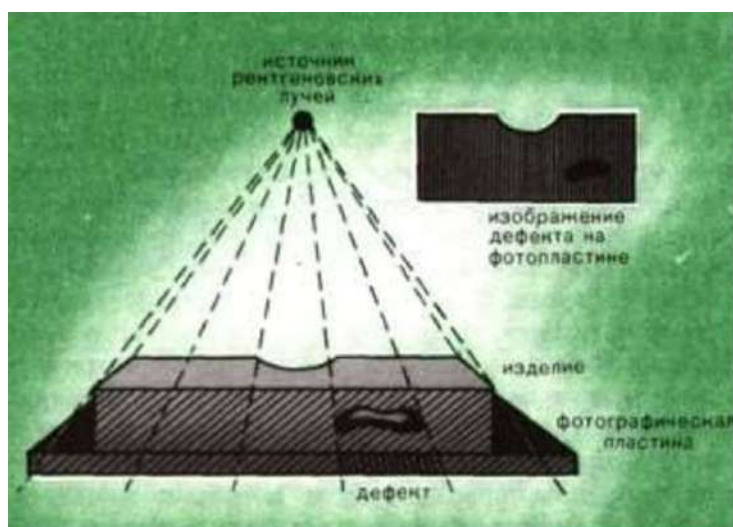


Рисунок 6 – Схема НК (Рентгеновская дефектоскопия)

Методы неразрушающего контроля поверхностного типа ориентированы преимущественно на выявление дефектов, которые выходят на внешнюю границу материала – трещин, пор, раковин, рисок и других нарушений, доступных снаружи. Физически такие методики основаны на взаимодействии зондирующего поля с приповерхностным слоем и не рассчитаны на сколько-нибудь глубокое проникновение в толщу образца. Соответственно, для обнаружения внутренних неоднородностей, залегающих на значительной глубине, они непригодны – здесь их чувствительности оказывается недостаточно и требуются другие, объёмные способы диагностики, такие как ультразвуковая томография или радиографический контроль. К поверхностным методам относятся:

- Визуальный контроль: простейший метод, основанный на осмотре поверхности материала.
- Капиллярный метод: обнаружение дефектов по проникновению жидкости в капилляры дефекта.
- Магнитопорошковый метод: обнаружение дефектов в ферромагнитных материалах по накоплению магнитного порошка в местах нарушения магнитного поля.

Неинвазивные подходы занимают особое место среди всех неразрушающих методик. Их ключевое отличие заключается в том, что они полностью исключают какое-либо вмешательство, способное нарушить целостность объекта или повлиять на его исходные характеристики. Самым ранним и очевидным примером здесь служит обычный визуальный осмотр. В наши дни арсенал таких средств значительно расширился: активно применяются различные зондирующие поля – ультразвук, рентгеновское излучение, радиоволны. При этом контакт с образцом либо сведён к минимуму, либо отсутствует вовсе, а само обследование проходит без малейшего ущерба для материала. Хронологически появление каждой новой неинвазивной техники тесно связано с прогрессом в смежных областях – физике твёрдого тела, приборостроении и схемотехнике.

Особенно широкое распространение такие методы получили в клинической практике. И это неудивительно: они дают врачу возможность получить необходимую информацию о состоянии пациента, обходясь без разрезов, проколов и внедрения инструментов внутрь организма. Как следствие, заметно снижается дискомфорт для больного, практически исчезает риск послеоперационных осложнений или ятрогенных повреждений, которые нередко сопутствуют классическим инвазивным вмешательствам. В итоге диагностическая процедура становится не только более безопасной. В таблице 1 приведены примеры применения неинвазивных технологий в медицине.

Таблица 1 – сравнительная таблица применения различных методов НК и неинвазивной диагностики в онкологии с указанием примерных показателей эффективности

Метод	Применение в медицине	Точность (%)	Чувствительность (%)	Глубина сканирования
Маммография	Скрининг рака молочной железы	85–93	80–88	До 6 см
УЗИ	Исследование щитовидной железы, печени и др.	75–85	70–82	До 10 см
МРТ	Оценка опухолей мозга	92–98	95–99	Без ограничений
КТ	Стадирование рака молочной железы	88–95	85–93	Без ограничений
ПЭТ-КТ	Исследование печени	90–96	92–98	Без ограничений
СВЧ	Диагностика рака легких	80–90	85–92	До 10 см
Термография	Оценка распространенности опухолей брюшной полости	60–75	65–80	Поверхностные слои
Эластография	Выявление метастазов	85–92	83–90	До 5 см

Ультразвуковое исследование (УЗИ) является широко распространенным методом медицинской визуализации, который использует высокочастотные звуковые волны для создания изображений внутренних органов. Метод основан на преобразовании электрического тока в высокочастотные звуковые волны, направляемые в тело. Эти волны отражаются от границ между различными тканями, и отраженные волны принимаются кристаллами и преобразуются обратно в электрические сигналы.

К преимуществам УЗИ в неинвазивной диагностике можно отнести:

- **Безопасность:** УЗИ считается одним из наиболее безопасных методов, который не использует ионизирующее излучение. Поэтому его можно применять многократно без вреда для здоровья.
- **Доступность и портативность:** УЗИ-аппараты относительно недороги и портативны (по сравнению с другими), что позволяет проводить исследования в различных условиях, включая амбулаторные клиники и даже полевые условия.
- **Быстрота исследования:** исследование обычно занимает сравнительно короткое время.
- **Возможность осмотра в режиме реального времени:** УЗИ позволяет наблюдать движение органов и тканей в реальном времени.
- **Относительно низкая стоимость:** по сравнению с другими методами визуализации, экономически выгодно.
- **Многофункциональность:** позволяет использовать различные режимы сканирования для получения более полной информации.

Недостатки УЗИ в неинвазивной диагностике:

- **Ограниченная глубина проникновения:** УЗИ может иметь ограниченную глубину проникновения в ткани.
- **Зависимость от оператора:** качество изображения и точность диагностики в значительной степени зависят от квалификации и опыта врача-сонолога.

- Невозможность визуализации некоторых структур: некоторые структуры (такие как кости) плохо визуализируются с помощью УЗИ из-за сильного отражения ультразвуковых волн.
- Артефакты: на изображении могут возникать артефакты, которые могут затруднять интерпретацию результатов.
- Ограниченное разрешение: разрешение УЗИ ниже, чем у МРТ или КТ.

Частота ультразвука – ключевой параметр в УЗИ-диагностике. Низкие частоты (1–2 МГц, например, с конвексными датчиками) обеспечивают большую глубину проникновения, но меньшее разрешение. В медицинских УЗИ-сканерах частота обычно находится в диапазоне 2–10 МГц. Для увеличения глубины визуализации частоту снижают. Разрешающая способность УЗИ определяется минимальным расстоянием между объектами, при котором они отображаются отдельно. Это расстояние примерно равно 2–3 длинам волны ультразвука. Длина волны λ и частота ν любой периодической волны (электромагнитной, акустической и т.д.) являются обратно пропорциональными величинами. Это означает, что чем выше частота волны, тем короче ее длина, и наоборот. Эта связь описывается простой формулой:

$$\lambda = v / \nu,$$

где v – скорость распространения волны в данной среде (например, для электромагнитных волн в вакууме $v = c$ – скорость света). Из этой фундаментальной зависимости следует, что волны с высокой частотой (и, следовательно, малой длиной волны) имеют тенденцию к меньшей глубине проникновения в среду. Это объясняется тем, что короткие волны гораздо сильнее взаимодействуют с мелкими частицами и неоднородностями в среде (испытывая большее рассеяние) и часто более интенсивно поглощаются, что приводит к быстрому затуханию их энергии. И наоборот, низкочастотные волны (с большой длиной волны) проникают глубже, но за счет более низкого пространственного разрешения.

В ультразвуковой диагностике разрешающая способность напрямую связана с длиной волны: чем она меньше, тем выше детализация изображения. Однако на практике приходится искать компромисс. Если соседние объекты расположены ближе 2–3 длин волн друг к другу, их эхосигналы накладываются, и на сонограмме они сливаются в единое пятно. При расстоянии более 2–3 длин волн, напротив, сигналы приходят отдельно, но при этом между ними может возникать интерференционная картина или геометрическое искажение, связанное с различием скоростей распространения ультразвука в тканях. Поэтому окончательный выбор рабочей частоты датчика и, соответственно, пространственного разрешения всегда остаётся за врачом-исследователем и определяется конкретной клинической задачей: для поверхностных структур используют высокие частоты, для глубоких органов – низкие, с учётом требуемой глубины проникновения и необходимой чёткости изображения.

Рентгенография – один из первых современных и наиболее распространенных методов неинвазивной диагностики, основанный на использовании рентгеновского излучения для получения изображений внутренних органов и структур организма. Преимуществами рентгенографии являются:

- Широкая доступность: рентгеновские аппараты относительно распространены, что делает этот метод доступным для большинства пациентов.
- Быстрота исследования: процедура занимает считанные секунды.
- Простота выполнения: процедура проста и не требует сложной подготовки пациента.
- Высокая информативность в отношении костей и некоторых органов: рентгенография отлично визуализирует костную ткань, а также позволяет оценить состояние легких и некоторых других органов.
- Обнаружение некоторых патологий: рентгенография эффективна для обнаружения переломов, инородных тел, пневмонии, некоторых опухолей и других патологических изменений.

Недостатки рентгенографии:

- Рентгеновское излучение является ионизирующим, что может оказывать вредное воздействие на организм при чрезмерном облучении. Поэтому рентгенография не рекомендуется для частого применения.
- Рентгенография плохо визуализирует мягкие ткани, такие как мышцы, сухожилия, внутренние органы (за исключением некоторых).
- По сравнению с другими методами визуализации, рентгенография имеет сравнительно низкое разрешение.
- Могут появляться артефакты на снимках, затрудняющие интерпретацию изображения.
- Результат рентгенографии представляет собой двухмерное изображение, что может затруднять анализ сложных объектов.

Рентгенография является важным, но не универсальным методом диагностики. Следует учитывать риски, связанные с ионизирующим излучением, и ограничения метода по разрешению и визуализации мягких тканей. Рентгенография часто используется в качестве начального этапа обследования или для подтверждения диагноза, установленного другими методами.

Компьютерная томография – неинвазивный метод медицинской визуализации, который использует рентгеновское излучение для создания послойных изображений внутренних органов и тканей. В отличие от обычной рентгенографии, КТ позволяет получить трехмерное изображение, значительно улучшая детализацию и диагностическую ценность.

КТ – мощный метод визуализации с высоким разрешением и возможностью трехмерной реконструкции, но с риском, связанным с ионизирующим излучением, и ограничением по стоимости. КТ применяется тогда, когда необходима детальная информация о внутренней структуре органов и тканей, которая недоступна при использовании других методов.

Магнитно-резонансная томография (МРТ): использует сильное магнитное поле и радиоволны для получения высококачественных изображений внутренних органов и тканей.

Недостатки МРТ в неинвазивной диагностике:

- Высокая стоимость: МРТ-исследования стоят дороже, чем другие методы визуализации, такие как УЗИ или рентгенография.
- Длительность исследования: процедура МРТ может занимать от 30 минут до часа и более, что может быть неудобно для пациентов.
- Клаустрофобия: многие пациенты испытывают дискомфорт или клаустрофобию в замкнутом пространстве аппарата МРТ.
- Противопоказания: МРТ имеет противопоказания для пациентов с некоторыми металлическими имплантатами (например, кардиостимуляторы, некоторые типы сосудистых клипс), ферромагнитными инородными телами в глазах или других органах.
- Артефакты движения: движения пациента во время исследования могут привести к искажению изображений.
- Не подходит для всех пациентов: МРТ менее эффективна для визуализации органов, содержащих воздух (например, легкие), или структур с высокой скоростью движения (например, пищевода).

МРТ использует радиочастотные (РЧ) импульсы в диапазоне от 1 до 128 МГц. Конкретная частота зависит от силы магнитного поля аппарата. Чем выше сила поля, тем выше частота и тем лучше разрешение изображения.

Следует добавить более специфические методы:

- Электрокардиография (ЭКГ): регистрирует электрическую активность сердца.
- Электроэнцефалография (ЭЭГ): записывает электрическую активность головного мозга.

- Функциональная магнитно-резонансная томография: измеряет активность мозга, отслеживая изменения кровотока.
- Оптическая когерентная томография (ОКТ): создает высокоразрешающие изображения внутренних структур глаза и других тканей.

Эти и многие другие неинвазивные методы позволяют врачам диагностировать широкий спектр заболеваний, от переломов костей до опухолей и сердечнососудистых заболеваний, обеспечивая раннюю диагностику и своевременное лечение. Развитие неинвазивных методов постоянно продолжается, позволяя получать все более точную и детальную информацию о состоянии организма без хирургического вмешательства.

1.3. СВЧ-Томография

Различия в диэлектрических свойствах биологических тканей (таблица 2), обусловленные различными физиологическими состояниями или патологиями, позволяют создавать изображения внутренних органов человека с помощью методов, основанных на измерениях электромагнитного поля вне тела.

Таблица 2 – приблизительные диэлектрические параметры ε , $\text{tg}\delta$ и удельная плотность γ тканей в биологических объектах при частоте 2,45 ГГц

Биологическая ткань	ε	$\text{tg}\delta$	γ
Мышечная ткань	50	0,38	1,020
Жировая ткань	5	0,1	0,930
Печень	47	0,3	1,050
Почки	50	0,38	1,014
Кожа	38	0,34	0,3
Опухолевая ткань	65	0,42	1,2
Вода без примесей	78	1	1

Микроволновое излучение – это часть электромагнитного спектра с частотами от 0,1 ГГц до 300 ГГц, что соответствует длинам волн от 0,1 см до 100

см. Микроволновая томография, в отличие от рентгеновского обследования, использует неионизирующее СВЧ-излучение, что делает ее безопаснее [53,54].

Глубина проникновения микроволн в биологические ткани определяется содержанием воды: большее количество воды ведет к более высокой диэлектрической проницаемости (ϵ) и проводимости (σ), что уменьшает глубину проникновения. В отличие от других видов излучения (ИК, оптического, рентгеновского), взаимодействие микроволн с тканью главным образом определяется ее влажностью.

Микроволновая томография [55–64] – перспективный неинвазивный метод медицинской визуализации, позволяющий получать изображения биологических тканей на основе различий в их диэлектрических свойствах.

Для получения микроволновых изображений биологических тканей обычно используется диапазон частот от 300 МГц до 10 ГГц. Точный диапазон частот, используемый в конкретном приложении, зависит от таких факторов, как глубина проникновения, требуемое разрешение и тип ткани. Более высокие частоты обеспечивают лучшее разрешение, но меньшую глубину проникновения, в то время как более низкие частоты обеспечивают большую глубину проникновения, но меньшее разрешение.

СВЧ-томография – это не просто перспективный метод, а уже реальная альтернатива традиционным способам диагностики. Она не уступает маммографии, УЗИ и МРТ по ключевым показателям, а в некоторых аспектах (безопасность, стоимость, комфорт для пациента) даже опережает их. Преимущества комбинированного использования СВЧ-томографии:

- Скрининг в группах риска: сочетание СВЧ и УЗИ повышает точность диагностики РМЖ у женщин с плотной тканью груди, где маммография менее эффективна. Сочетание СВЧ и термографии может использоваться для раннего выявления поверхностных опухолей кожи (меланома, базалиома).
- Уточняющая диагностика: сочетание СВЧ и МРТ позволяет снизить количество ложноположительных результатов за счет сравнения

морфологических (МРТ) и функциональных (СВЧ) параметров опухоли. В экспериментальных моделях сочетание СВЧ и эластографии улучшает дифференциацию доброкачественных и злокачественных образований печени и щитовидной железы.

За последние пять лет микроволновая визуализация стала активно внедряться в пищевую промышленность для контроля качества и безопасности продукции. Это обусловлено ее ключевыми преимуществами: она представляет собой быстрый, неинвазивный и абсолютно безопасный метод контроля, который не наносит вреда продуктам, не требует использования ионизирующего излучения, а также может использоваться на всех этапах производственного цикла.

Принцип действия микроволновой визуализации основан на чувствительности диэлектрических свойств пищевых продуктов к их составу, плотности, влажности и наличию инородных включений. Различные материалы по-разному взаимодействуют с микроволновым излучением, что позволяет создавать «карты» внутренней структуры объектов. Его потенциал проявляется в различных практических задачах, например:

- В экспериментальных исследованиях для оценки качества фруктов, позволяя выявлять скрытые дефекты или степень зрелости без их разрезания [65].
- В эффективном обнаружении инородных тел (таких как пластик, стекло или металл, не всегда видимых другими методами) непосредственно в пищевых продуктах.
- При использовании специализированных систем микроволновых измерений для идентификации диэлектрических объектов в порошкообразных продуктах, где традиционные методы могут быть неэффективны.
- В неинвазивном поточном контроле пищевых продуктов непосредственно на производственной линии, что позволяет оперативно реагировать на отклонения и поддерживать высокие стандарты качества [66].

1.4. Обзор известных устройств

Технологии микроволновой томографии (2D, 3D) активно развиваются уже более двадцати лет, демонстрируя свою эффективность в медицинской визуализации, в частности для получения изображений внутренних органов и конечностей. В области микроволновой томографии выделяются несколько ведущих исследовательских групп. Группа Meaney и Paulsen (Dartmouth College) известна своими итеративными методами решения обратной задачи и разработкой прототипов томографов [67]. Группа Fedeli (University of Genoa) [56] также внесла значительный вклад, предложив альтернативный прототип и проведя экспериментальные исследования. Итальянские исследователи Scarpaticci и Vasquez (CNR и Politecnico di Torino) [68] сосредоточились на применении микроволновой томографии для диагностики заболеваний мозга и молочной железы, а также на неразрушающем контроле продуктов в пищевой промышленности. Различные патенты (RU №96124805, WO 2011027127, РФ 2662079, РФ 2238033) описывают разные реализации таких устройств, отличающиеся методами управления излучателями, обработкой сигналов и информации. Прототипом заявляемого устройства микроволновой томографии является система, которая включает источник СВЧ излучения, рупорные передающие и принимающие антенны, согласующую среду с показателем преломления, подобным показателю преломления поверхности исследуемого биологического объекта, устройства обработки данных и визуализации. Ключевым отличием прототипа является использование рупорных антенн и согласующей среды с показателем преломления, подобным поверхностному слою объекта. Это позволяет улучшить качество изображения, но может ограничивать применимость системы для объектов со сложной неоднородностью. Ранние работы ученых по микроволновой томографии, такие как исследование [69], показывают применение цилиндрической антенной решетки из 64 волноводных антенн (работающих как передатчики и приемники) для создания изображений

объектов, погруженных в воду. Дальнейшие исследователи, например, в работе [70–71], применили эту технику к визуализации головного мозга. Они также использовали антенную решетку и алгоритм реконструкции, основанный на дифракции и быстром преобразовании Фурье, снова применяя приближение Борна первого порядка. Полученное изображение отображало контрастность диэлектрической проницаемости тканей. Хотя теоретическое разрешение, ограниченное дифракцией, составляло около 6 см в воздухе и 7 мм в воде (для частоты 2,45 ГГц), достигнутое разрешение было ниже из-за ограничений алгоритма реконструкции и используемой аппаратуры.

В патенте «Внутриполостной микроволновой излучатель» (RU2525273C2) предложен новый излучатель для медицинских применений, включая физиотерапию, радиометрию, томографию и термографию. Он состоит из корпуса, коаксиального ввода энергии, коаксиальной резонаторной замедляющей системы с ребристым внутренним и модифицированным внешним проводником (с продольными щелями или раскрывающимся разрезом) и диэлектрического колпака (рисунок 7).

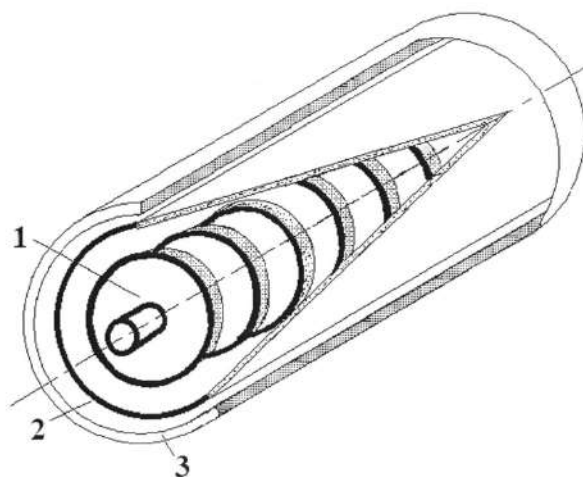


Рисунок 7 – Внутриполостной микроволновой излучатель:

- 1 – внутренний проводник резонаторной замедляющей системы,
- 2 – внешний проводник, 3 – диэлектрический колпак

Конструкция внешнего проводника минимизирует излучение в азимутальном направлении, улучшая локальное облучение целевой области.

В патенте «Способ микроволновой томографии сверхвысокого разрешения» (RU2662079C1) суть метода основана на многократном сканировании ткани микроволновым излучением с разных направлений (рисунок 8).

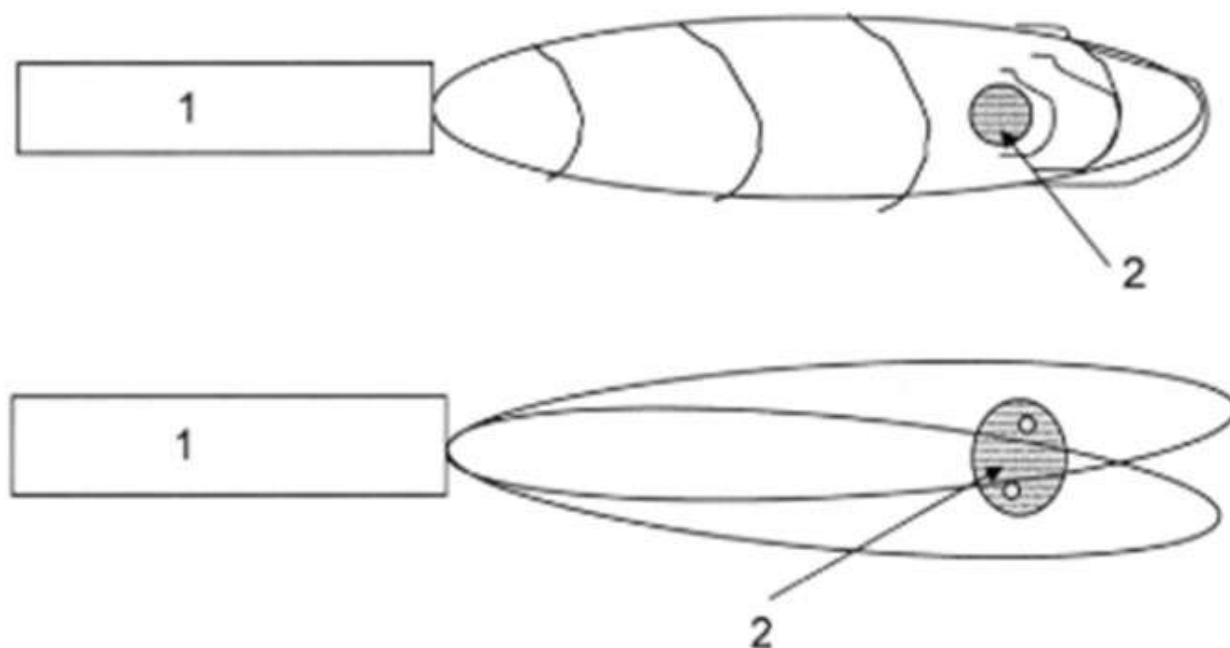


Рисунок 8 –Способ микроволновой томографии сверхвысокого разрешения: 1– источник, 2 – объект

Известен патент «Electromagnetic tomography apparatuses and methods» (заявка WO 2011027127) и связанный с ним способ получения изображения используют электромагнитное излучение в диапазоне 0,05–10 ГГц. Излучение от одного из множества излучателей проходит через объект, принимается множеством приемников, и на основе полученных данных строится изображение. Отличительная особенность данного метода состоит в игнорировании данных, полученных в течение определенного периода времени после излучения, включая данные, соответствующие излучению, не прошедшему через объект.

Также известен патент RU2238033C2 «Микроволновое томографическое устройство для спектроскопии и способ ее осуществления». Идея системы

основана на множестве приемо-передающих антенн, генерирующих и принимающих кодированные многочастотные микроволновые сигналы.

Основные результаты и выводы по главе 1

В главе проводится анализ существующих методов решения задач дифракции, выявляются их преимущества и недостатки. Определены перспективные направления для дальнейших исследований. Описаны ограничения применимости существующих методов, вопросы вычислительной сложности и точности получаемых результатов. Несмотря на значительное количество исследований, задача остается актуальной по следующим причинам:

- Недостаточная точность и устойчивость существующих методов: многие из них страдают от низкой точности и чувствительности к шумам в экспериментальных данных, особенно при работе со сложными неоднородными объектами.
- Ограничения вычислительных ресурсов: трехмерное моделирование сложных неоднородных структур требует значительных вычислительных ресурсов. Разработка более эффективных и быстрых алгоритмов остается важной задачей.
- Новые типы объектов и задач: постоянное развитие науки и техники приводит к появлению новых типов неоднородных объектов и задач, требующих разработки современных методов исследования. Например, исследование новых материалов с уникальными свойствами, более сложные медицинские задачи, более детальное моделирование.
- Потребность в улучшении разрешающей способности: во многих областях, таких как медицинская визуализация, требуется постоянное повышение разрешающей способности методов исследования для получения более детальной информации о внутренней структуре объектов.
- Развитие новых физических методов исследования: появление новых физических методов исследования (например, более чувствительных датчики)

требует разработки соответствующих методов математического моделирования и численных алгоритмов для обработки полученных данных.

В связи с перечисленными факторами дальнейшие исследования в области математического моделирования и численных алгоритмов восстановления параметров неоднородных объектов являются крайне актуальными и востребованными.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ

Данная глава посвящена описанию математических моделей, рассматриваемых в диссертации, а также теоретическому исследованию двумерных (2D) и трехмерных (3D) задач дифракции. В ней рассмотрены математические модели, описывающие распространение волн в неоднородных средах при наличии препятствий (неоднородностей внутри объектов). В этой части исследуется задача дифракции волн, начиная с вывода и анализа основных уравнений, характерных для различных типов задач дифракции. Далее, подробно описаны методы постановки задач в двумерном и трехмерном случаях, включая рассмотрение различных геометрических конфигураций и свойств рассеивающих объектов.

2.1. Прямые задачи дифракции

Приступая к численному моделированию и анализу задач дифракции, удобно начинать с 2D постановок. Этот подход не только упрощает начальный этап исследования, но и является важным звеном в переходе к более сложным трехмерным моделям. Особенно важно то, что многие трехмерные задачи могут быть эффективно рассмотрены как двумерное сечение при наличии определенной симметрии в геометрии объекта или в характере падающей волны. Классическим примером служит дифракция плоской волны на бесконечно длинном цилиндрическом препятствии (или другом объекте, регулярном вдоль одной оси): если направление распространения волны перпендикулярно этой оси, задача становится двумерной. В таком случае распределение поля вдоль этой оси будет однородным, что позволяет анализировать только поперечное сечение и получать

точные решения, применимые к частным случаям 3D-задач, значительно экономя время и вычислительные мощности.

В связи с тем, что при численном решении задач можно определить только конечное число параметров, в работе, в основном, рассматриваются модели с кусочно-постоянной диэлектрической проницаемостью объектов. Это упрощает постановки задачи и их исследование, а также применение численных методов для нахождения приближенного решения.

2.1.1. Скалярная двумерная задача дифракции

Для двумерной задачи дифракции использована модель неоднородного плоского ограниченного объекта Q , расположенного в свободном пространстве $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей ∂Q (рисунок 9). Область вне тела $(\mathbb{R}^2 \setminus Q)$ предполагается однородной и характеризуется волновым числом $k_0 > 0$, а внутри тела задается функцией неоднородности $k(x)$, где $x \in Q$ и $x = (x_1, x_2)$.

Такая модель применяется в электродинамике для протяженных объектов цилиндрической формы, когда объект может считаться бесконечно протяженным и регулярным вдоль одной из координат – продольной координаты. Если падающее поле не зависит от продольной координаты и в нем продольная составляющая магнитного поля равна нулю, то в полном поле эти свойства сохраняются независимо от формы цилиндра и от диэлектрической проницаемости, которая может быть функцией поперечных координат [15, с.43]. Такая поляризация называется Е-поляризацией и для этого случая задача дифракции сводится к следующей краевой задаче для уравнения Гельмгольца [15, с.53].

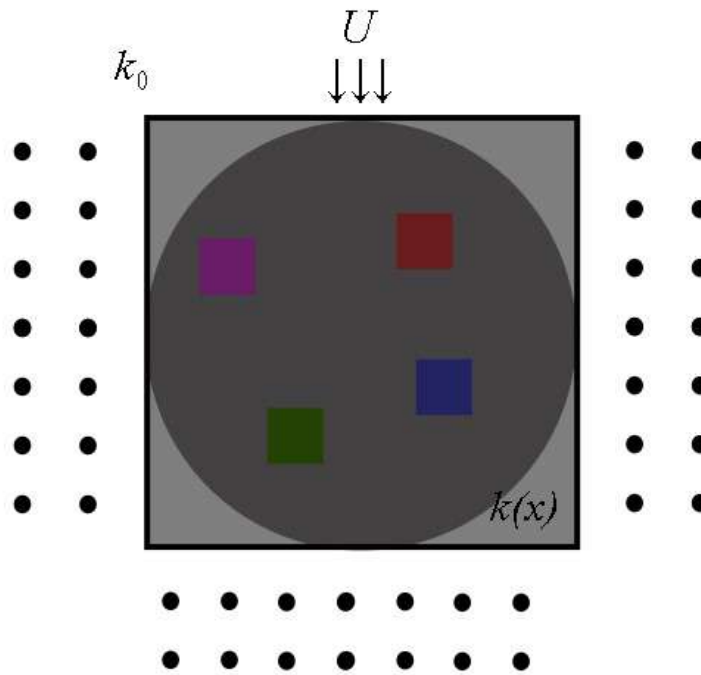


Рисунок 9 – Объект Q , поле U , точки наблюдения, расположенные вне объекта исследования. За границей объекта Q , волновое число k_0 , внутри – $k(x)$

Обозначим

$$k_p(x) = \begin{cases} k(x), & x \in Q, \\ k_0, & x \notin Q. \end{cases} \quad (1)$$

Для моделирования представляем полное поле s как сумму

$$u_p(x) = u_0(x) + u(x), \quad (2)$$

где $u_0(x)$ – падающая волна, исходящая от источника возбуждения, а $u(x)$ – поле, рассеянное объектом Q . Это разложение предполагает, что взаимодействие между падающей волной и объектом приводит к переизлучению (рассеянию) части энергии в виде рассеянного поля. Полное поле в любой точке пространства является суперпозицией (суммой) падающего и рассеянного полей.

Математическая постановка двумерной задачи дифракции базируется на неоднородном уравнении Гельмгольца:

$$\Delta u_p + k_p^2(x) u_p(x) = f(x), \quad (3)$$

где искомая величина $u_p(x)$ – это продольная компонента электрического поля. Функция $f(x)$, стоящая в правой части, считается известной. Предположим, что она обладает компактным носителем – именно она описывает пространственное распределение источника, а $k_p^2(x)$ представляет собой непрерывную вещественную функцию, описывающую неоднородность объекта. Граничные условия на поверхности диэлектрика должны быть заданы для однозначного решения задачи.

Выполнение условий на границах раздела сред при решении уравнений, описывающих физические процессы (включая уравнение Гельмгольца), критически важно для получения физически корректного решения. Эти условия отражают непрерывность или разрыв некоторых физических величин на границе между разными средами. Тип условий зависит от природы рассматриваемого процесса. Будем предполагать, что на границе выполняются условия сопряжения, которые соответствуют случаю Е-поляризации:

$$\left[u_p(x) \right]_{\partial Q} = 0, \quad \left[\frac{\partial u_p(x)}{\partial n} \right]_{\partial Q} = 0, \quad (4)$$

где $\left[\cdot \right]_{\partial Q}$ – это скачок функции на границе ∂Q .

На бесконечности выполняются условия излучения Зоммерфельда [72], которые гарантируют, что решение уравнения Гельмгольца представляет собой распространяющуюся волну, уходящую от источника на бесконечность, а не

сходящуюся к нему. В двумерном случае, условие излучения Зоммерфельда можно записать как

$$\frac{\partial u(x)}{\partial r} - ik_0 u(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), r = |x| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Условие гарантирует единственность решения задачи дифракции. Будем считать, что внешнее поле определяется точечным источником, который находится вне тела и создает падающее поле, которое можно описать аналитически. Это падающее поле служит в качестве входных данных для задачи рассеяния, и его взаимодействие с объектом определяет рассеянное поле. Предположение о точечном источнике упрощает математическое описание падающего поля, но может быть обобщено на более сложные источники.

Утверждение 1. Решение задачи (1)-(5) единственно.

Любое решение задачи (1)-(5), удовлетворяющее условиям непрерывности, называется классическим решением прямой задачи рассеяния в дифференциальной постановке. Задача (1)-(5) может быть сведена к интегральному уравнению [73–81]

$$f^0(x) = u(x) - \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy, \quad (6)$$

где $f^0(x)$ – функция задающее падающее поле, $k(y)$ – функция внутри тела, $u(x)$ – искомая функция, $G(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 |x - y|)$ – функция Ханкеля первого рода, x_0 – это координата исходного положения, которая не принадлежит телу Q . Уравнение (6) называется уравнением Липпмана-Швингера [82].

Для дальнейшей работы определим пространство $L_2(Q)$. В случае, когда Q является однородным объектом, интегральное уравнение (6) принимает вид

$$f^0(x) = u(x) - k_1^2 \int_Q G(x, y) u(y) dy. \quad (7)$$

Уравнения (6)-(7) являются уравнениями Фредгольма второго рода. Обозначим

$$Au = \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy, \quad u := u(x), F := f^0(x)$$

и запишем уравнение в операторном виде: $Lu := u - Au := F$.

Оператор $Lu := u - Au : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ фредгольмов. Оператор A — это компактный оператор, так как является оператором со слабо сингулярным ядром, I — единичный оператор. Таким образом, оператор $L := I - A$ является оператором Фредгольма. Оператор $L := I - A : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ является непрерывно обратимым. Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти неизвестную функцию $k(x)$ неоднородности по известным характеристикам источника и известного поля вне тела.

В некоторых случаях, функция $k(x)$ может иметь нелинейный характер. Далее будут рассмотрены математические модели с некоторыми функциями задания нелинейности [83]. Рассмотрим нелинейность, заданную по следующему закону типа Керра:

$$k^2(x) = k_1^2 + k_0 \alpha |u(x)|^2. \quad (8)$$

Здесь $k_1 - const, \alpha > 0$ — коэффициент нелинейности. Данный эффект заключается в изменении свойств изотропных материалов при воздействии сильного поля.

При интенсивном воздействии в реальных средах происходит явление насыщения, характеризующееся ограничением роста эффекта. Насыщение можно моделировать с помощью следующей функции:

$$k^2(x) = k_1^2 + \frac{k_0 \alpha |u(x)|^2}{1 + \beta |u(x)|^2}, \quad (9)$$

где β является некоторым коэффициентом нелинейности. Формула (9) является обобщением (8) при $\beta \rightarrow 0$. В нелинейных задачах довольно часто применяется нелинейность экспоненциального типа, которая записывается в виде:

$$k^2(x) = 1 - e^{-\beta |u(x)|^2}.$$

Интенсивные поля могут использоваться в методах неразрушающего контроля, но не в медицинской диагностике.

2.1.2. Скалярная трехмерная задача дифракции

Рассмотрим математическую модель, отвечающую скалярной трехмерной задаче дифракции на неоднородном теле Q , расположенном в свободном пространстве $\mathbb{R}^3$ (рисунок 10 и 11).

Такая модель для задач дифракции электромагнитных волн на диэлектрических телах может применяться в случае, когда функция диэлектрической проницаемости в области неоднородности медленно меняется так, что ее модуль градиента достаточно мал. В этом случае слагаемым с градиентом от функции диэлектрической проницаемости можно пренебречь, что ведет к возможности перехода от векторной краевой задачи для уравнений Максвелла к скалярным уравнениям Гельмгольца для отдельных компонент электрического поля. Такая задача дифракции рассмотрена ниже.

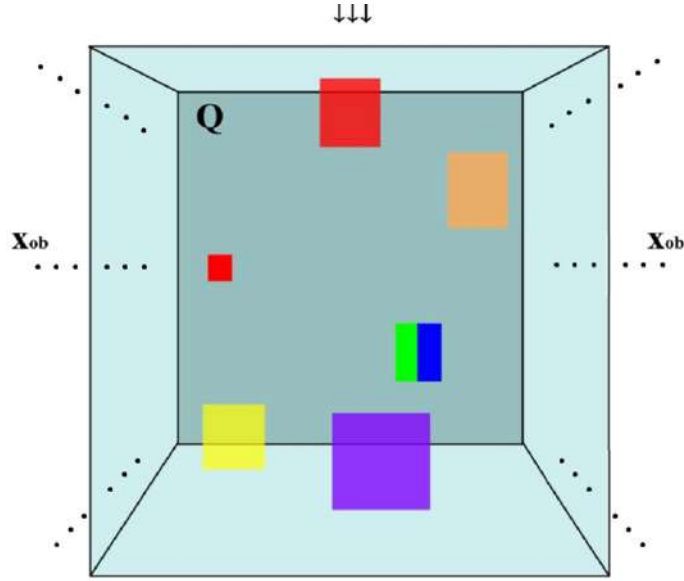


Рисунок 10 – Объект исследования Q кубической формы, неоднородности и точки наблюдения x_{ob}

Пусть дано неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2(x)u = f(x), \quad (10)$$

где $f(x)$ – известная функция с компактным носителем, $k^2(x)$ – непрерывная функция.

Будем предполагать, что на границе раздела двух сред выполняются условия сопряжения

$$[u]_{\partial Q} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial Q} = 0, \quad (11)$$

а также необходимо учесть условия излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial u}{\partial r} = iku + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r := |x| \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Представим данное уравнение в виде

$$\Delta u + k_0^2 u = \left(k^2(x) - k_0^2\right)u + f(x). \quad (13)$$

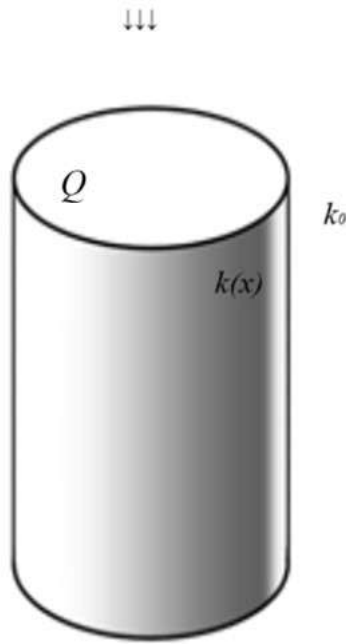


Рисунок 11 – Объект исследования Q цилиндрической формы.

За границей объекта волновое число k_0 , внутри – $k(x)$

На рисунках 10 и 11 представлено тело Q , k_0 является волновым числом вне тела, $k(x)$ – функция, характеризующая волновое число внутри тела, $f(x)$ – известная функция с компактным носителем, описывающая источник поля. Данная задача сводится к интегральному уравнению вида:

$$u(x) = f^0(x) + k_1^2 \int_Q G(x, y) u(y) dy, \quad (14)$$

или

$$u(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k^2(y) - k_0^2) u(y) dy. \quad (15)$$

Здесь уравнение (14) описывает однородный случай $k(x) = \text{const}$, а уравнение (15) неоднородный случай и содержит волновую функцию $k(x)$,

$G(x, y)$ – функция Грина для стационарного волнового уравнения (уравнения Гельмгольца) в 3D свободном пространстве.

Формула для функции Грина имеет вид:

$$G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi |x-y|}, x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3),$$

где $k = \omega / c = 2\pi / \lambda$ – волновое число, ω – угловая частота, c – скорость распространения волны в среде (для свободного пространства это скорость света), λ – длина волны, r – расстояние от источника до точки наблюдения. Функция Грина представляет собой распространяющуюся сферическую волну, расходящуюся от точечного источника.

Результаты решения задачи при нелинейности показаны в главе 4 для случаев (8) и (9).

2.1.3. Векторная задача дифракции

Рассматривается математическая модель, отвечающая векторной задаче дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом теле. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область, граница ∂Q – кусочно-гладкая поверхность, состоящая из поверхностей класса C^∞ . Будем предполагать, что диэлектрическое тело Q является изотропным и неоднородным. Оно характеризуется постоянной магнитной проницаемостью $\mu_0 > 0$ и функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x) \in C^\infty(\overline{Q})$.

Введем в рассмотрение относительную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$. Предполагаем, что в каждой точке $x \in \overline{Q}$ существует комплекснозначная функция

$$(\varepsilon_r(x) - 1)^{-1}. \quad (16)$$

Пространство $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ предполагается однородным с постоянными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей $\varepsilon_0 > 0, \mu_0 > 0$ (проницаемости вакуума). Поле возбуждается точечным источником в точке $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$, порождающим электромагнитную волну $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus x_0)$, удовлетворяющую системе уравнений Максвелла в $\mathbb{R}^3 \setminus x_0$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_0. \quad (17)$$

Полное поле представляется в виде суммы падающего и рассеянного полей (рисунок 12),

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_s. \quad (18)$$

Решение прямой задачи дифракции – полное электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, принадлежащее классам функций

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q) \cap C(\overline{Q}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus Q), \quad (19)$$

удовлетворяющее в $\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q$ уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad (20)$$

условиям непрерывности касательных компонент на границе области неоднородности

$$[\mathbf{E}_\tau] |_{\partial Q} = [\mathbf{H}_\tau] |_{\partial Q} = 0, \quad (21)$$

условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{L}_{2,loc}(\mathbb{R}^3), \quad (22)$$

и условиям излучения Сильвера-Мюллера [84] на бесконечности для рассеянного поля

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_s &= o(r^{-1}) & \mathbf{E}_s \times \mathbf{e}_r + \mathbf{H}_s &= o(r^{-1}), \\ \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s &= O(r^{-1}), & r &\rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (23)$$

где $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ – волновое число, $\mathbf{e}_r = \mathbf{x} / r$, $r = |\mathbf{x}|$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, предельные соотношения в (23) выполняются равномерно по всем направлениям.

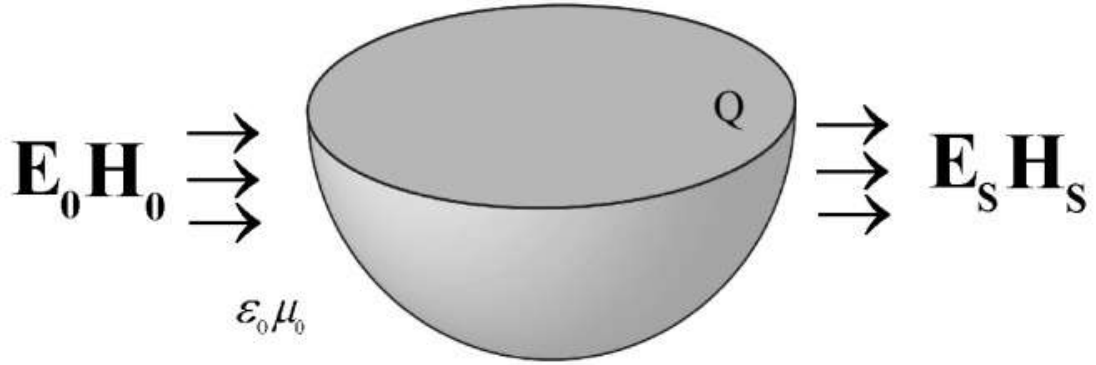


Рисунок 12 – Объект исследования Q , падающее поле $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$, рассеянное поле $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$. Вне объекта – постоянные значения проницаемостей ε_0 и μ_0

Основные результаты о разрешимости прямой задачи дифракции имеются в [85,86].

Пусть

$$G(x, y) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi |x-y|}. \quad (24)$$

Краевую задачу (17)-(23) можно свести к системе, состоящей из интегродифференциального уравнения по области неоднородности

$$\mathbf{E}(x) - (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \quad (25)$$

и интегрального представления поля вне тела

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0(x) + (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus \bar{Q}. \quad (26)$$

Магнитное поле всюду выражается через электрическое по формуле из второго уравнения в (20), а именно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot} \mathbf{E}. \quad (27)$$

Имеет место результат об эквивалентности краевой задачи и интегродифференциального уравнения.

2.2. Обратная задача дифракции в полушаре

Трёхмерные векторные модели дифракции электромагнитных волн активно востребованы в задачах медицинской диагностики [67]. В частности, применяется модель диэлектрического тела – полушара в задачах диагностики рака молочной железы. Этим объясняется выбор модели в данном разделе. Задачи диагностики приводят к необходимости решения математических обратных задач.

Для решения обратных задач на практике обычно прибегают к минимизации функционалов ошибок, дополненных регуляризацией по Тихонову [87–91].

В отличие от традиционных подходов, двухшаговый метод решения обратной задачи является неитерационным, поэтому не требует выбора хорошего начального приближения [92–96]. Используемый двухшаговый неитерационный метод позволяет сразу решать систему линейных алгебраических уравнений, возникающую при решении обратной задачи, известными методами. Имеет место плохая обусловленность матрицы системы линейных алгебраических уравнений. Решение таких систем линейных алгебраических уравнений достаточно хорошо разработано и не является проблемой в настоящее время.

Для решения обратной задачи дифракции предложена математическая модель, в которой диэлектрическая проницаемость представляется кусочно-постоянной функцией на некоторой сетке. В однородном трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, характеризующемся волновым числом $k_0 > 0$, в сферических координатах $x = \{r, \varphi, \theta\} : r \geq 0, \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$

рассмотрим векторную обратную задачу восстановления неоднородности изотропного диэлектрического полушара Q (без границы),

$$Q = \{x : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

Введем на Q равномерную сетку с узлами

$$r_{i_1} = \frac{R}{n_1} i_1, \quad 0 \leq i_1 \leq n_1, \quad \varphi_{i_2} = \frac{2\pi}{n_2} i_2, \quad 0 \leq i_2 \leq n_2, \quad \theta_{i_3} = \frac{\pi/2}{n_3} i_3, \quad 0 \leq i_3 \leq n_3.$$

Разобьем Q на элементарные ячейки

$$Q_{i_1 i_2 i_3} = \{x : r_{i_1} < r < r_{i_1+1}, \varphi_{i_2} < \varphi < \varphi_{i_2+1}, \theta_{i_3} < \theta < \theta_{i_3+1}\}, \\ 0 \leq i_k \leq n_k - 1.$$

Введем кусочно-постоянные функции $\chi_{i_1 i_2 i_3}$:

$$\chi_{i_1 i_2 i_3}(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, & x \notin Q_{i_1 i_2 i_3}. \end{cases}$$

Далее будем предполагать, что область Q характеризуется магнитной проницаемостью $\mu_0 > 0$ и подлежащей отысканию кусочно-постоянной функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x) = \varepsilon_r(x)\varepsilon_0$, а точнее,

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3}, & x \in Q_{i_1 i_2 i_3}, \end{cases}$$

где $\mathbf{i} = (i_1 i_2 i_3)$ — мультииндекс. Представим функцию $\varepsilon(x)$ при каждом $x \in Q$ равенством

$$\varepsilon(x) = \sum_{\mathbf{i}} \varepsilon_{\mathbf{i}}(x) \chi_{\mathbf{i}}(x).$$

Рассмотрим некоторую ограниченную область D такую, что $\overline{D} \cap \overline{Q} = \emptyset$. Предположим, что в точках $x \in D$ известны значения полного поля на фиксированной частоте $\omega > 0$.

Постановка обратной задачи дифракции заключается в следующем [92–104]: требуется восстановить функцию $\varepsilon(x)$ в области неоднородности Q по результатам измерения полного поля $\mathbf{E}(x)$ в точках области D , используя равенство

$$(k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}(x) - \mathbf{E}_0(x), x \in D, \quad (28)$$

с учетом уравнения в области неоднородности Q

$$\mathbf{E}(x) - (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), x \in Q. \quad (29)$$

Введем в области Q вектор-функцию

$$\mathbf{J}(x) := (\varepsilon_r(x) - 1) \mathbf{E}(x),$$

предполагая, что всюду в Q выполнено условие $|\varepsilon_r(x)| \geq \tilde{\varepsilon} > 1$. Тогда из представления поля (28) вне рассеивателя получим уравнение для $\mathbf{J}(x)$,

$$(k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}(x) - \mathbf{E}_0(x), \quad x \in D, \quad (30)$$

а уравнение в области неоднородности (29) перепишем в виде

$$\frac{\mathbf{J}(x)}{\varepsilon_r(x) - 1} - (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), x \in Q. \quad (31)$$

Двухшаговый метод восстановления диэлектрической проницаемости в Q заключается в следующем:

- Первый шаг – по известным значениям падающего поля $\mathbf{E}_0(x)$ и полного поля $\mathbf{E}(x)$ в области D необходимо найти ток $\mathbf{J}(x)$ в Q из уравнения (30)
- Второй шаг – вычислить явно $\varepsilon_r(x)$ в Q , используя уравнение (31).

Предположим, что $\mathbf{J}$ представляет собой кусочно-постоянную функцию:

$$\mathbf{J}(x) = \sum_i \mathbf{J}_i \chi_i(x),$$

где $\mathbf{J}_i \in \mathbb{C}^3$ – неизвестные (векторные) коэффициенты.

Утверждение 2. Пусть задано разбиение тела Q на $n_1 n_2 n_3$ ячеек Q_i .

Уравнение

$$(k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}_s(x), \quad x \in D, \quad \overline{D} \cap \overline{Q} = \emptyset, \quad \mathbf{E}_s \in C^\infty(\overline{D}),$$

имеет не более одного кусочно-постоянного решения $\mathbf{J}(x)$ при всех $k_0 > 0$ за исключением, быть может, конечного числа значений k_0 [102].

Предположим, что правая часть уравнения (30) принадлежит линейной оболочке функций

$$(k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy$$

на данной фиксированной сетке в Q . Тогда оператор уравнения (30) можно рассматривать как отображение, действующее в конечномерных пространствах.

Основные результаты и выводы по главе 2

В главе представлены математические модели, которые описывают распространение волн в средах, содержащих препятствия или неоднородности. В главе проводится подробное описание моделей, детальное исследование задач дифракции, начиная с вывода и анализа основных уравнений, а также соответствующих граничных условий, специфичных для различных типов дифракционных задач. Подробно описываются модели в двумерной и трехмерной геометрии, включая анализ различных геометрических конфигураций рассеивающих объектов и их физических свойств.

Применен новый двухшаговый метод для решения задачи дифракции волны на объекте с целью выявления неоднородностей по результатам измерения ближнего поля. Результаты опубликованы в работах [75; 81; 94–100; 120–123]. В двумерных и трехмерных скалярных задачах, в отличие от большинства работ, распределение волнового числа может быть нелинейным (в случае интенсивных полей). Рассмотрены три вида нелинейности: керровская нелинейность, с насыщением и нелинейность экспоненциального типа. Результаты опубликованы в работах [75; 79; 80; 93; 96; 103; 124]. Результаты этой главы служат теоретической основой для разработки и применения численных методов, представленных в последующих разделах диссертации.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ

Центральное место в главе занимает метод коллокации – мощный инструмент для численного решения систем интегральных уравнений. Подробно изложены все аспекты, связанные с его реализацией, а именно: выбор расчетной сетки в соответствующей системе координат, базисных функций и узлов коллокации. Рассмотрен метод коллокации в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

Следующим важным аспектом главы является применение явного и неявного метода для решения нелинейных задач дифракции. Это расширение позволяет моделировать более сложные физические явления, где свойства среды зависят от интенсивности поля или иных нелинейных эффектов.

Завершающий раздел главы посвящен методам повышения вычислительной эффективности, что является важным для решения ресурсоемких трехмерных задач. Описаны параллельные вычисления, реализованные на основе библиотеки MPI (Message Passing Interface).

3.1. Общая схема метода коллокации

В качестве метода решения выбран метод коллокации и рассматривается его применение для уравнения

$$Au = f.$$

В методе коллокации приближенное решение уравнения находится путем приравнивания левой и правой частей в заданном конечном множестве точек – точек коллокации. Эти точки, как правило, совпадают с центрами носителей базисных функций, используемых для аппроксимации решения.

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $A : X \rightarrow Y$. Метод коллокации решения уравнения состоит в нахождении приближенного решения $u \in X_n$, удовлетворяющего уравнению

$$(Au_n)(x_j) = f(x_j), j = 1 \dots n.$$

Рассмотрим линейную оболочку

$$X_n = \text{span}\{v_1 \dots v_n\},$$

из базисных функций. Выразим элемент u_n в виде линейной комбинации

$$u_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k v_k.$$

В этом случае метод коллокации приводит к СЛАУ следующего вида:

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k (Av_k)(x_j) = f(x_j), j = 1 \dots n. \quad (32)$$

Приравнивание левой и правой частей уравнений (32) в конечном числе точек коллокации, эквивалентно уравнению проекционного метода $P_n Au_n = P_n f$ с некоторым оператором интерполяции P_n , являющимся проекционным оператором.

Метод коллокации полностью определяется тремя ключевыми элементами: типом используемой расчётной сетки, выбором системы базисных функций и расположением точек коллокации. Именно их комбинация задаёт структуру конечно-элементного или конечно-разностного приближения и в конечном счёте определяет как точность получаемого решения, так и вычислительные затраты на его получение.

3.2. Метод коллокации в прямоугольной и цилиндрической системах координат

Следуя методу коллокации, для решения интегрального уравнения проведем дискретизацию задачи и построим расчетную сетку для рассматриваемой фигуры. Заклучим тело Q в некоторый параллелепипед $Q \subset \Pi$,

$$\Pi = \{x : a_1 < x_1 < a_2, \quad b_1 < x_2 < b_2, \quad c_1 < x_3 < c_2\}$$

$$(0 \leq a_1 < a_2 \leq a, \quad 0 \leq b_1 < b_2 \leq b, \quad c_1 < x_3 < c_2).$$

Построим в Π равномерную прямоугольную сетку размером $N_1 \times N_2 \times N_3$, образованную элементарными ячейками в форме параллелепипеда

$$\Pi_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, \quad x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, \quad x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\}$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{N_1}k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{N_2}l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{N_3}m,$$

где $k = 0, \dots, N_1 - 1$, $l = 0, \dots, N_2 - 1$, $m = 0, \dots, N_3 - 1$.

Пусть тело Q состоит из q подобластей Q_j таких, что $Q = \bigcup_j Q_j$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset, i \neq j$. Кроме того, пусть подобласти Q_j состоят из объединения элементарных параллелепипедов (ячеек) сетки $Q_j = \bigcup_l \Pi_l$.

Для цилиндрических тел целесообразно использовать цилиндрическую систему координат (радиус, азимут, высота). Это упрощает математические вычисления и позволяет эффективно описывать объекты с осевой симметрией, такие как цилиндры и конусы. Предполагается, что объемное тело Q является цилиндром:

$$Q = \{x : 0 \leq \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad c_1 < z < c_2\},$$

где положение точки задается радиусом ρ , углом φ и высотой z . Процесс перехода к декартовым координатам записывается следующей системой:

$$x = \begin{cases} x_1 = \rho \cos \varphi; \\ x_2 = \rho \sin \varphi; \\ x_3 = z. \end{cases}$$

Тело Q разбивается на блоки Π_{klm} , представленные на рисунке 13 справа, следующим образом:

$$\Pi_{klm} = \{x : \rho_k < \rho < \rho_{k+1}, \varphi_l < \varphi < \varphi_{l+1}, z_m < z < z_{m+1}\}$$

$$\rho_k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{n} k, \quad \varphi_l = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{n} l, \quad z_m = \frac{z_2 - z_1}{n} m,$$

где $k, l, m = 0, \dots, n-1$. Расстояние в цилиндрической системе координат определяется по формуле

$$|x - y| = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 - 2\rho_x\rho_y \cos(\varphi_x - \varphi_y) + (z_x - z_y)^2}.$$

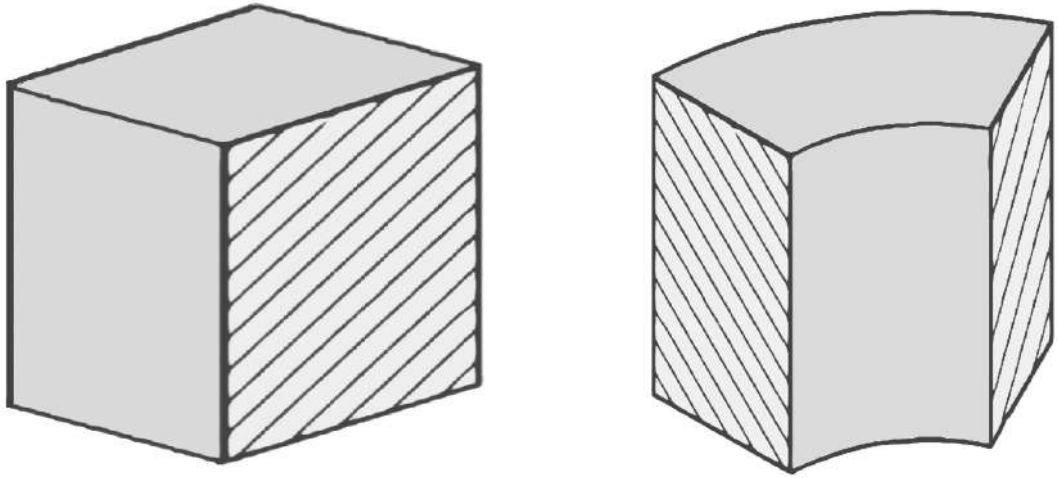


Рисунок 13 – Элементарная ячейка сетки для декартовой и цилиндрической систем координат

В качестве базисных выберем кусочно-постоянные функции

$$v_k = \begin{cases} 1, x \in \bar{\Pi}_k, \\ 0, x \notin \bar{\Pi}_k, \end{cases}$$

где $\bar{\Pi}_k$ – элементарная ячейка расчетной сетки. В виде узлов коллокации выбираем центры элементарных ячеек. Таким образом, метод коллокации для скалярных задач в декартовой и цилиндрической системах координат определен.

3.3. Методы коллокации для прямой и обратной задач в сферической системе координат

В сферической системе координат рассмотрим векторную задачу в случае диэлектрического полушара Q ,

$$Q = \{x : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi / 2\}.$$

Получим формулу для расстояния между двумя точками в сферических координатах:

$$d = \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2))}.$$

Эта формула напрямую вычисляет расстояние d , зная сферические координаты $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ и $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ двух точек, где r – радиус, а θ и φ – углы.

Введем на Q равномерную сетку с узлами

$$r_{i_1} = \frac{R}{n_1} i_1, \quad 0 \leq i_1 \leq n_1, \quad \varphi_{i_2} = \frac{2\pi}{n_2} i_2, \quad 0 \leq i_2 \leq n_2, \quad \theta_{i_3} = \frac{\pi/2}{n_3} i_3, \quad 0 \leq i_3 \leq n_3.$$

Разобьем Q на элементарные ячейки

$$Q_{i_1 i_2 i_3} = \{x : r_{i_1} < r < r_{i_1+1}, \varphi_{i_2} < \varphi < \varphi_{i_2+1}, \theta_{i_3} < \theta < \theta_{i_3+1}\}, \quad 0 \leq i_k \leq n_k - 1.$$

Введем кусочно-постоянные функции $\chi_{i_1 i_2 i_3}$

$$\chi_{i_1 i_2 i_3}(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, & x \notin Q_{i_1 i_2 i_3}. \end{cases}$$

Представим функцию $\varepsilon(x)$ при каждом $x \in Q$ равенством

$$\varepsilon(x) = \sum_i \varepsilon_i(x) \chi_i(x).$$

Интегральные уравнения, возникающие при решении прямой и обратной задач, решаются методом коллокации. Его практическая реализация, в свою очередь, требует задания двух основных компонентов: системы базисных функций и набора точек коллокации. Наиболее простой и часто используемый вариант – это кусочно-постоянные функции, каждая из которых определена на одной элементарной ячейке и равна нулю за её пределами. Однако в данной работе предлагается иной подход к построению базиса, который будет описан далее. Его ключевое преимущество состоит в том, что все вычисляемые интегралы содержат лишь слабую особенность, что упрощает их численное вычисление. В рамках этого подхода вводятся три типа базисных функций, носитель каждой из которых охватывает две соседние ячейки. При этом по одной из пространственных координат функция ведёт себя как кусочно-линейная, а по двум другим остаётся кусочно-постоянной. Такая конструкция позволяет более гибко аппроксимировать решение без существенного усложнения вычислительной схемы. Введем шаги сетки по переменным $h_1 = R / n_1$, $h_2 = 2\pi / n_2$, $h_3 = \pi / (2n_3)$. Базисные функции имеют вид

$$v_{i_1 i_2 i_3}^{(r)}(x) = \begin{cases} 1 - |r - r_{i_1}| / h_1, & x \in Q_{i_1-1, i_2 i_3} \cup Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, & x \notin Q_{i_1-1, i_2 i_3} \cup Q_{i_1 i_2 i_3}, \end{cases} \quad (33)$$

$$v_{i_1 i_2 i_3}^{(\varphi)}(x) = \begin{cases} 1 - |\varphi - \varphi_{i_2}| / h_2, & x \in Q_{i_1 i_2-1, i_3} \cup Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, & x \notin Q_{i_1 i_2-1, i_3} \cup Q_{i_1 i_2 i_3}, \end{cases} \quad (34)$$

$$v_{i_1 i_2 i_3}^{(\theta)}(x) = \begin{cases} 1 - |\theta - \theta_{i_3}| / h_3, & x \in Q_{i_1 i_2 i_3-1} \cup Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, & x \notin Q_{i_1 i_2 i_3-1} \cup Q_{i_1 i_2 i_3}. \end{cases} \quad (35)$$

В методе коллокации требуется вычислять интегро-дифференциальные выражения

$$(k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}_N(y) dy, \quad (36)$$

где $\mathbf{J}_N$ – приближенное решение.

В сферических координатах имеем для произвольных скалярной функции Φ и векторной функции $\mathbf{F}$ в точке $x = (r, \varphi, \theta)$:

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta}, \quad (37)$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \mathbf{F}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{F}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\mathbf{F}_\theta \sin \theta)}{\partial \theta}, \quad (38)$$

где $\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}$ – единичные векторы по соответствующим направлениям. Образует векторные базисные функции

$$\mathbf{v}_{i_1 i_2 i_3}^{(r)}(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^{(r)}(x) \mathbf{r}(x), \quad (39)$$

$$\mathbf{v}_{i_1 i_2 i_3}^{(\varphi)}(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^{(\varphi)}(x) \boldsymbol{\varphi}(x), \quad (40)$$

$$\mathbf{v}_{i_1 i_2 i_3}^{(\theta)}(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^{(\theta)}(x) \boldsymbol{\theta}(x). \quad (41)$$

Тогда в пределах своих носителей вычисляем дивергенцию базисных функций (39)-(41), используя формулы (33)-(35), (38):

$$\text{div } \mathbf{v}_{i_1 i_2 i_3}^{(r)}(x) = \frac{2}{r} v_{i_1 i_2 i_3}^{(r)}(x) - \text{sign}(r - r_{i_1}) / h_1, \quad (42)$$

$$\text{div } \mathbf{v}_{i_1 i_2 i_3}^{(\varphi)}(x) = -\frac{1}{r \sin \theta} \text{sign}(\varphi - \varphi_{i_2}) / h_2, \quad (43)$$

$$\text{div } \mathbf{v}_{i_1 i_2 i_3}^{(\theta)}(x) = \frac{\text{ctg} \theta}{r} v_{i_1 i_2 i_3}^{(\theta)}(x) - \frac{1}{r} \text{sign}(\theta - \theta_{i_3}) / h_3. \quad (44)$$

Далее, каждую компоненту тока (приближенного решения) будем искать в виде линейной комбинации соответствующих базисных функций с неизвестными коэффициентами:

$$\mathbf{J}_N^{(r)}(x) = \sum_i J_i^{(r)} \mathbf{v}_i^{(r)}(x),$$

$$\mathbf{J}_N^{(\varphi)}(x) = \sum_i J_i^{(\varphi)} \mathbf{v}_i^{(\varphi)}(x),$$

$$\mathbf{J}_N^{(\theta)}(x) = \sum_i J_i^{(\theta)} \mathbf{v}_i^{(\theta)}(x).$$

Тогда, для приближенного решения имеем $\mathbf{J}_N(x) = \mathbf{J}_N^{(r)}(x) + \mathbf{J}_N^{(\varphi)}(x) + \mathbf{J}_N^{(\theta)}(x)$. Отметим важное свойство: нормальная компонента приближенного решения равна нулю на границе ∂Q в точках гладкости границы, $\mathbf{J}_N(x) \cdot \nu(x) = 0$ (здесь $\nu(x)$ – внешняя нормаль к границе в точке $x \in \partial Q$). Кроме того, очевидно, что введенные базисные функции обладают свойством аппроксимации в пространстве $L_2(Q)$. Так как решение при $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ совпадает, следует добавить базисные функции с индексом $i_2 = n_2$, то есть $0 \leq i_1 \leq n_1 - 1$, $0 \leq i_2 \leq n_2$, $0 \leq i_3 \leq n_3 - 1$.

Перейдём к вопросу выбора узлов коллокации. В рамках прямой задачи наиболее естественным и удобным решением оказывается размещение этих точек в «центре» носителя – а именно, на общей грани двух соседних ячеек, в точке, сферические координаты которой определяются как полусумма соответствующих координат граничных сторон ячейки. Общее число точек коллокации совпадает с числом базисных функций. Отсюда следует, что матрица системы линейных алгебраических уравнений в методе коллокации получается квадратной.

При решении обратной задачи, подход к выбору точек коллокации меняется. Здесь измерительные узлы уже не привязываются к внутренней структуре объекта, а размещаются исключительно во внешней области, окружающей рассеиватель. При этом важно соблюдать условие: число таких точек должно быть как минимум равно числу базисных функций – в противном случае система уравнений окажется недоопределённой и восстановить искомые параметры не удастся. Если равенство соблюдается, мы снова приходим к квадратной матрице. Однако на практике чаще отдают предпочтение переопределённой системе, когда число точек измерений превышает число

неизвестных коэффициентов. Такой выбор оправдан: избыточность измерительной информации позволяет более полно учесть характер рассеянного поля и повысить устойчивость восстановления. Разумеется, в этом случае матрица становится прямоугольной, и для решения СЛАУ приходится привлекать специальные методы – например, аппарат псевдообратных матриц или другие регуляризующие процедуры.

Выбор расположения узлов коллокации при решении обратной задачи – это отдельный, далеко не тривиальный вопрос, который во многом предопределяет качество восстановления искомых параметров. С одной стороны, для получения устойчивых и достоверных результатов узлы должны охватывать по возможности более широкую пространственную область вокруг исследуемого объекта – это позволяет зафиксировать больше информации о рассеянном поле и снизить влияние краевых эффектов.

Итоговое расположение узлов приходится находить компромиссным путём, опираясь на серию вычислительных экспериментов, в ходе которых варьируется геометрия измерительной апертуры, число точек и их взаимное расположение. Такой подход позволяет оценить чувствительность решения к положению узлов и выбрать конфигурацию, обеспечивающую приемлемую обусловленность матрицы при реально достижимых условиях измерений.

Вычислим элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений. Пусть $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$ и $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$ – мультииндексы. Определим точки коллокации трех типов: $x_i^{(r)} = (r_{i_1}, \varphi_{i_2} - h_2 / 2, \theta_{i_3} - h_3 / 2)$, $x_i^{(\varphi)} = (r_{i_1} - h_1 / 2, \varphi_{i_2}, \theta_{i_3} - h_3 / 2)$, $x_i^{(\theta)} = (r_{i_1} - h_1 / 2, \varphi_{i_2} - h_2 / 2, \theta_{i_3})$. Матрица будет иметь 3×3 блочный вид. Тогда элемент матрицы $a_{ij}^{(\alpha\beta)}$, где индексы принимают значения $\alpha = r, \varphi, \theta$, $\beta = r, \varphi, \theta$, будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{(\alpha\beta)} = & k_0^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} G(x_i^{(\alpha)}; r_0, \varphi_0, \theta_0) v_j^{(\beta)}(r_0, \varphi_0, \theta_0) r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\varphi_0 d\theta_0 + \\
& + \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \text{grad}^{(\alpha)} G(x_i^{(\alpha)}; r_0, \varphi_0, \theta_0) \text{div } \mathbf{v}_j^{(\beta)}(r_0, \varphi_0, \theta_0) r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\varphi_0 d\theta_0, \quad (44)
\end{aligned}$$

где $\text{grad}^{(\alpha)}$ – соответствующая компонента градиента, то есть $\text{grad} = (\text{grad}^{(r)}, \text{grad}^{(\varphi)}, \text{grad}^{(\theta)})$.

Блочные матрицы с элементами (44) оказываются плохо обусловленными. Для решения СЛАУ с такими матрицами применялись методы регуляризации (которые имеются в библиотеке стандартных подпрограмм Python). Наилучший результат показал метод усеченного сингулярного разложения матрицы, позволяющий построить приближенную обратную матрицу.

3.4. Применение явного и неявного метода для решения нелинейных задач

Для решения нелинейной задачи [103–104] предложен новый итерационный численный метод (неявный метод), состоящий из двух этапов. На первом этапе, в качестве начального приближения, будем считать среду однородной, т.е. $k^2(x) = k_1 = \text{const}$ (или квадрат волнового числа) будет постоянным. Однако итерационный процесс может быть запущен и с неоднородным начальным распределением $k^2(x)$.

При неявном подходе, значения нелинейных параметров на следующем шаге по времени зависят от электромагнитного поля на этом же шаге. Это приводит к необходимости решения системы уравнений (часто нелинейных) на каждом шаге по времени. Такие методы обычно более устойчивы, но требуют больше вычислительных ресурсов. Решаем интегральное уравнение

$$u_0(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u_0(y) dy \quad (45)$$

и вычисляем поле $u_0(x)$. На последующих шагах пересчитываем значения функции по следующей формуле

$$k_{n+1}^2(x) = k_1^2 + \alpha |u_n(x)|^2. \quad (46)$$

Далее решаем линейное уравнение

$$u_{n+1}(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) \left(k_0^2 - k_{n+1}^2(y; u_n(y)) \right) u_{n+1}(y) dy. \quad (47)$$

Процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. Задача рассматривается в частотной области. Данный метод является неявным, поэтому на каждом этапе приходится решать нелинейное уравнение. Для решения уравнения используем метод коллокации.

При явном подходе, рассмотренном в [105], значения нелинейных параметров (например, диэлектрической проницаемости) на следующем шаге по времени вычисляются, используя значения электромагнитного поля на предыдущем шаге. Это упрощает вычисления, но может потребовать малого шага по времени для обеспечения устойчивости. Данный алгоритм заключается в построении явного итерационного процесса, который можно расписать по шагам. На первом этапе, для задания начального приближения, решаем линейное объемное интегральное уравнение (45) и определяем значение $u_0(x)$. На последующих шагах пересчитываем значения функции по формуле (46) и, используя формулу пересчета

$$u_{n+1}(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) \left(k_0^2 - k_{n+1}^2(y; u_n(y)) \right) u_n(y) dy,$$

находим решение на новом шаге. Процесс повторяется, пока не будет достигнута требуемая точность. Данный метод имеет свои недостатки: необходим выбор достаточно точного начального приближения, иначе итерационный процесс не будет сходящимся.

Неявный метод работает в более широком диапазоне значений α , однако уступает явному методу по скорости вычислений. Явный метод обоснован в работе [105] в случае трехмерного уравнения Липпмана-Швингера для нелинейности типа Керра: доказана сходимость метода (с геометрической скоростью сходимости) в пространстве непрерывных функций.

В главе 4 представлены численные результаты для нелинейных задач. Анализируется вычислительная сходимость методов. В качестве достижения точности расчетов применяется оценка

$$\|u_{n+1} - u_n\|_C \leq \delta,$$

где $\|u\|_C = \max_{x \in \bar{Q}} |u(x)|$, а δ – наперед заданная точность.

Описанная процедура явного и неявного итерационного метода аналогична и для трехмерных объектов. Основные шаги, включающие решение интегрального уравнения для начального приближения, пересчет функции $k(x)$ и использование формулы пересчета для нового шага, остаются неизменными. Отличиями являются функции G и то, что все вычисления выполняются в трехмерном пространстве, что, естественно, увеличивает вычислительную сложность задачи.

Основные результаты и выводы по главе 3

В данной главе представлена численная реализация разработанных математических моделей и решение задач дифракции, опирающихся на теоретическую базу главы 2. Разработаны численные методы и вычислительные алгоритмы решения прямых задач (линейной и нелинейной задач дифракции) и векторной обратной задачи. Результаты для линейного случая опубликованы в работах [75; 81; 94–100; 120–123], а для нелинейного в [75; 79; 80; 93; 96; 103; 134]. Подробно описаны численные методы, использованные для решения уравнений. Описано применение явных и неявных методов для решения

нелинейных задач дифракции. Такой подход позволяет моделировать сложные физические явления, в которых свойства среды зависят от интенсивности поля или других нелинейных эффектов.

Важным аспектом главы является применение параллельных вычислений для повышения эффективности численного решения сложных трехмерных задач. Описываются стратегии распараллеливания вычислительного алгоритма, реализующего предложенный численный метод. Приведены использованные инструменты и библиотеки, а также результаты тестирования производительности на многопроцессорных системах. Результаты опубликованы в работах [125–126].

В заключение главы анализируется точность и эффективность численного метода.

ГЛАВА 4. КОМПЛЕКС ПРОГРАММ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Данная часть работы включает в себя схемы программ, результаты расчетов прямых и обратных задач дифракции, а также результаты натурных экспериментов. Производится сравнение экспериментальных данных с модельными результатами для подтверждения адекватности используемых подходов. Программные реализации численных методов подтверждены соответствующими свидетельствами на программы для ЭВМ [97–100].

4.1. Описание комплекса программ

На основе предложенных методов решения прямых и обратных задач дифракции из главы 2 и численных методов, описанных в главе 3, создан программный комплекс, реализованный на языке C/C++. Данный комплекс позволяет эффективно решать 2D и 3D скалярные задачи, векторную прямую задачу дифракции и обратную задачу дифракции.

В качестве операционной платформы может выступать как семейство Windows, так и системы на ядре Linux – обе среды полностью поддерживаются. Кроме того, в обязательном порядке требуется наличие компилятора языка C++, поскольку именно на нём реализован вычислительный модуль, и без соответствующего окружения запуск приложения становится невозможным. На рисунке 14 показана схема выполнения комплекса программ.

В случае прямой задачи, входными данными являются размеры, форма, положение и внутренние характеристики объекта исследования и неоднородности, размер вычислительной сетки, описание источника излучения. В случае обратной задачи – значения поля в точках наблюдения. Результаты работы программы сохраняются в файлах с расширением XLS и VTK.

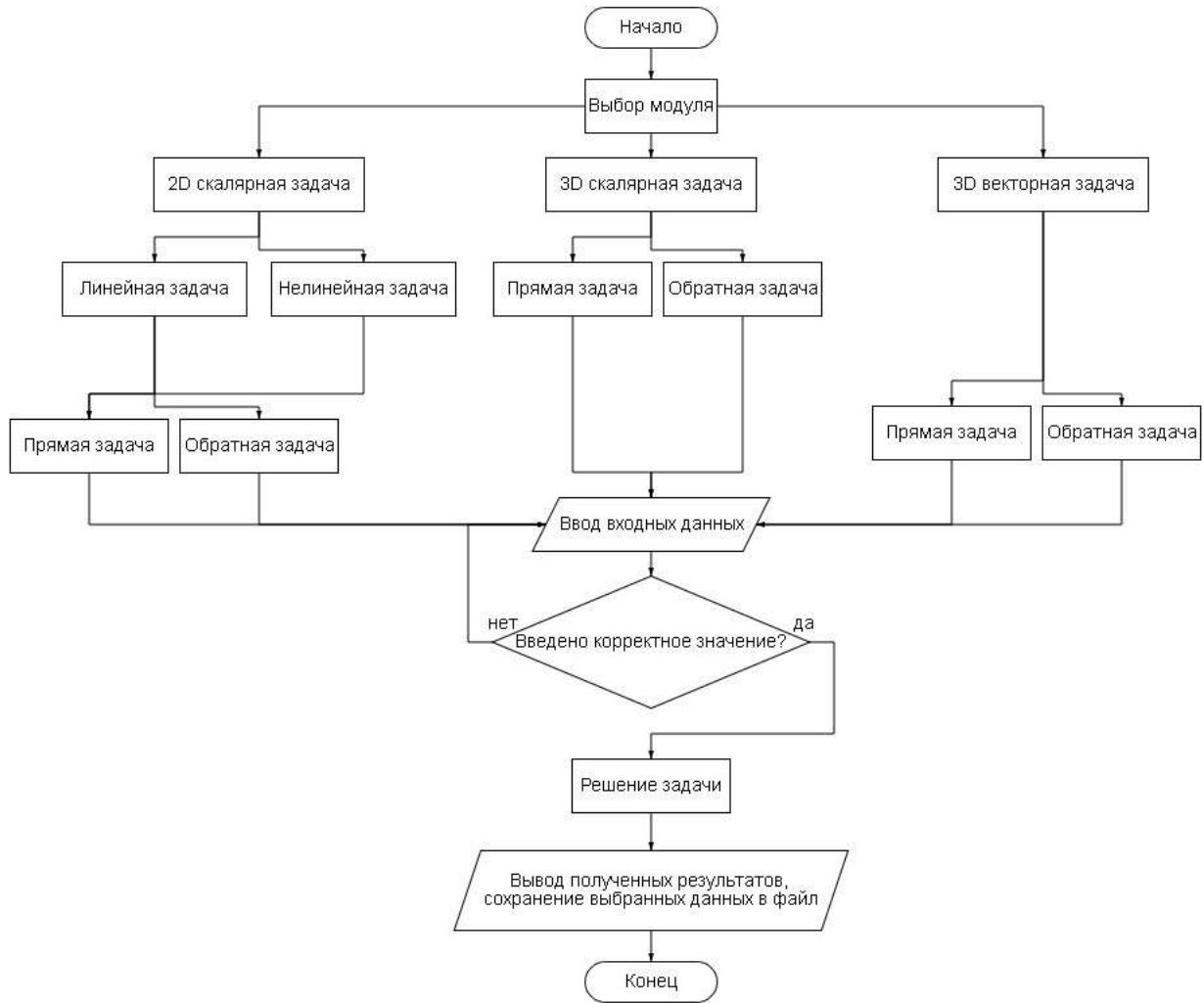


Рисунок 14 – Схема вычислительного комплекса

Решение обратной задачи дифракции часто требует огромных вычислительных ресурсов, что делает применение параллельных вычислений крайне актуальным.

4.2. Применение параллельных вычислений

Для организации параллельных вычислений будет применен программный интерфейс MPI (Message Passing Interface) [106–112]. Данный стандарт широко применяется при создании программ для кластеров и суперкомпьютеров, обеспечивая эффективное взаимодействие между множеством процессоров.

Размер матрицы напрямую влияет на время решения как прямой, так и обратной задач. В связи с этим необходимо реализовать параллельный алгоритм.

Параллельный алгоритм можно разделить на 2 задачи: решение прямой задачи и решение обратной задачи. В первом блоке вычисляется матрица и решается СЛАУ с последующей синхронизацией результатов. Для корректного определения искомого поля в контрольных точках необходимо сначала получить полное решение прямой задачи – это обязательное условие. В свою очередь, обратная задача требует выполнения сходного объёма вычислений: формирования матричных элементов, расчёта полевых распределений, последующего решения системы линейных уравнений и восстановления параметров неоднородностей. Весь вычислительный процесс распадается на четыре последовательные стадии. На начальном этапе производится заполнение матрицы, соответствующей прямой постановке. Расчёт каждого элемента здесь выполняется автономно, что создаёт благоприятные условия для организации параллельных вычислений.

Для эффективного хранения данных выбрана ленточная матричная модель (рисунок 15). Каждый процесс хранит только часть матрицы размером $\tilde{N}_i \times \tilde{N}$, где $\tilde{N}_i$ – высота матрицы на i -м процессе, а $\tilde{N}$ – ширина матрицы.

$$A_{\tilde{N}\tilde{N}} = \left(\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{12} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{12} & a_{12} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right.$$

Рисунок 15 – Хранение матрицы по процессам

Данная операция отнимает порядка 10 % от общего времени решения и служит основой для моделирования ближнего поля в измерительных точках. Следующий шаг – непосредственное решение системы линейных алгебраических

уравнений, построенной на основе подготовленной матрицы. Это позволяет отыскивать неизвестные переменные и тем самым завершить построение решения прямой задачи. Третий этап посвящён формированию матрицы уже для обратной задачи. К её вычислению предъявляются повышенные требования по точности, поскольку она представляет собой дискретный аналог интегрального уравнения первого рода, а её число обусловленности, как правило, оказывается на порядок выше, чем у матрицы прямого оператора. Заключительный этап – повторное обращение к решателю СЛАУ, но теперь уже с матрицей, полученной на предыдущей стадии. Результатом становятся искомые входные параметры, которые и являются конечным продуктом решения обратной задачи. Таким образом, из четырёх перечисленных стадий реальные предпосылки для распараллеливания возникают только на этапах формирования матриц (первом и третьем), тогда как процедуры решения систем остаются последовательными и требуют иных подходов к оптимизации.

Схематично параллельный алгоритм можно изобразить следующим образом, как показано на рисунке 16

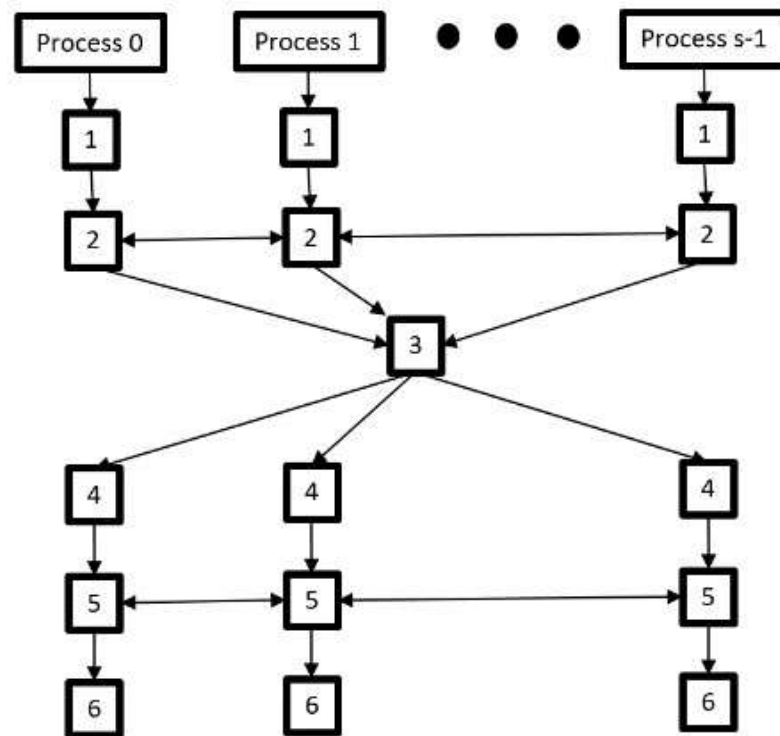


Рисунок 16 – Параллельное решение задачи

Блоки 1 и 4 заполняют матрицы прямой и обратной задач соответственно. Они выполняются независимо друг от друга. Блоки 2 и 5 решают систему линейных алгебраических уравнений так же, как прямую и обратную задачи. При этом происходит обмен данными между процессами. Блок 3 синхронизирует решение системы линейных алгебраических уравнений между всеми процессами. Блок 6 выводит решение в файл. На этом этапе обмен пакетами между процессами не происходит.

Для создания параллельной программы был выбран пакет MPI. Причиной выбора была хорошая документация, высокая эффективность, гибкость и возможность использования двух или более компьютеров в сети для вычислений.

Для взаимодействия процессов мы используем функции обмена сообщениями, такие как MPI_SEND и MPI_SSEND, а также функции коллективного обмена сообщениями MPI_BCAST и MPI_REDUCE. Поскольку на всех этапах мы имеем достаточно большую матрицу, было бы логично распределить ее между запущенными процессами для оптимального выделения памяти. Это будет удобно как для заполнения, так и для решения СЛАУ. Хранение матрицы происходит в виде лент для каждого запущенного процесса отдельно. Ширина ленты будет равна ширине самой матрицы $\tilde{N}$, а высота ленты $\tilde{N}_i$ для каждого процесса i рассчитывается по следующей формуле:

$$N_i = \left\lceil \frac{\tilde{N}}{s} \right\rceil + \begin{cases} 1, & i < \text{mod}(\tilde{N} / s) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

где s – количество процессов, $i = 1..s$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^s \tilde{N}_i = \tilde{N}$. Последний член отвечает за коррекцию высоты в том случае, если целочисленное деление высоты матрицы на количество процессов приводит к получению остатка. После деления мы распределяем оставшиеся строки одну за другой по процессам, начиная с первой. То есть, если $\text{mod}(\tilde{N} / s) = 0$, то все процессы получают

равные участки матрицы. Поскольку матрица уже распределена между процессами, заполнение матрицы в прямой и обратной задачах происходит без обмена пакетами информации между запущенными процессами, и каждый из них заполняет свою часть. Данные ускорения решения задачи в зависимости от количества процессов представлены на рисунке 17 (на одном и том же решении) и в таблице 3

Таблица 3 – Время, ускорение и эффективность

Число процессов	1	10	20	40	60	80	100
Время вычисления	18424,8	2482,9	1393,3	803,1	561,9	463,4	408,1
Ускорение	1	7,42	13,22	22,94	32,79	39,76	45,15
Эффективность	1	0,74	0,66	0,57	0,55	0,497	0,45

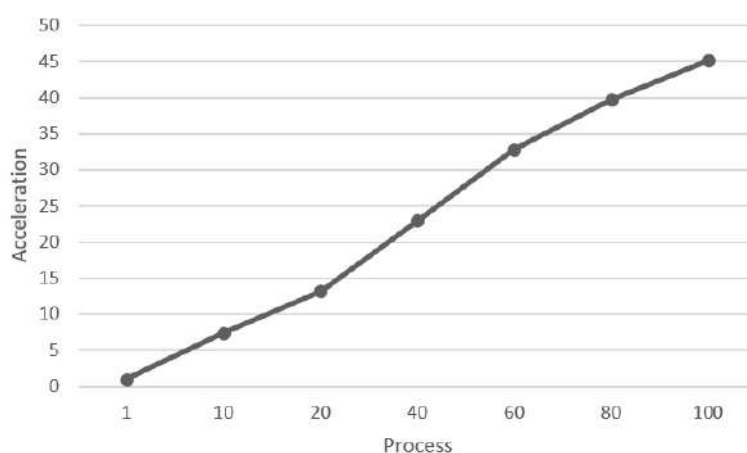


Рисунок 17 – Ускорение решение задачи в зависимости от количества процессов

Эффективность монотонно падает с ростом числа процессов – это классическая картина для задач с коммуникационными накладными расходами (MPI-обмены, синхронизации).

Анализ эффективности параллелизации показал, что при увеличении числа процессов N от 1 до 100, эффективность монотонно снижается с 1 до 0.45. Наиболее интенсивное падение наблюдается в диапазоне $N = 10 - 40$ (с 0.74 до 0.57), что обусловлено ростом коммуникационных накладных расходов. При

$N > 60$ эффективность стабилизируется вблизи значений 0.45–0.55. Полученные результаты свидетельствуют об умеренно сильной масштабируемости разработанного метода: целесообразный диапазон применения – до $N \approx 60...80$ процессов (для данной задачи), где эффективность превышает 0.5. Результаты опубликованы в работе [125,126].

4.3. Результаты расчетов для двумерного случая

В данной части работы отражены численные результаты решения прямой (линейной и нелинейной) и обратной задач для различных входных параметров. На рисунках 18–20 показаны значения функций решения интегрального уравнения (слева) и распределение волнового числа (справа) для линейной и нелинейной задач. Рисунок 18 демонстрирует решение линейной задачи на однородном теле.

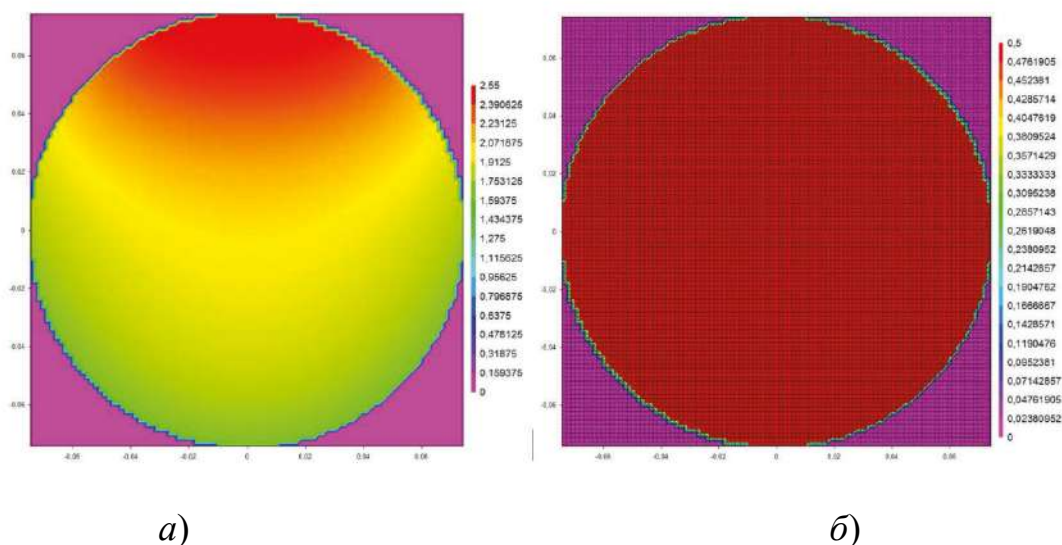
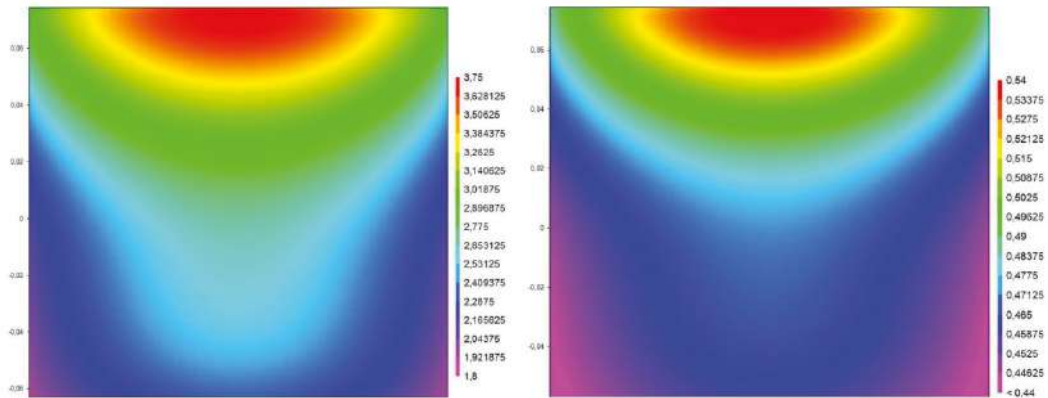


Рисунок 18 – Решение 2D задачи: *a* – модуль решения интегрального уравнения (7); *б* – начальное распределение волнового числа внутри объекта 0.5 м^{-1}

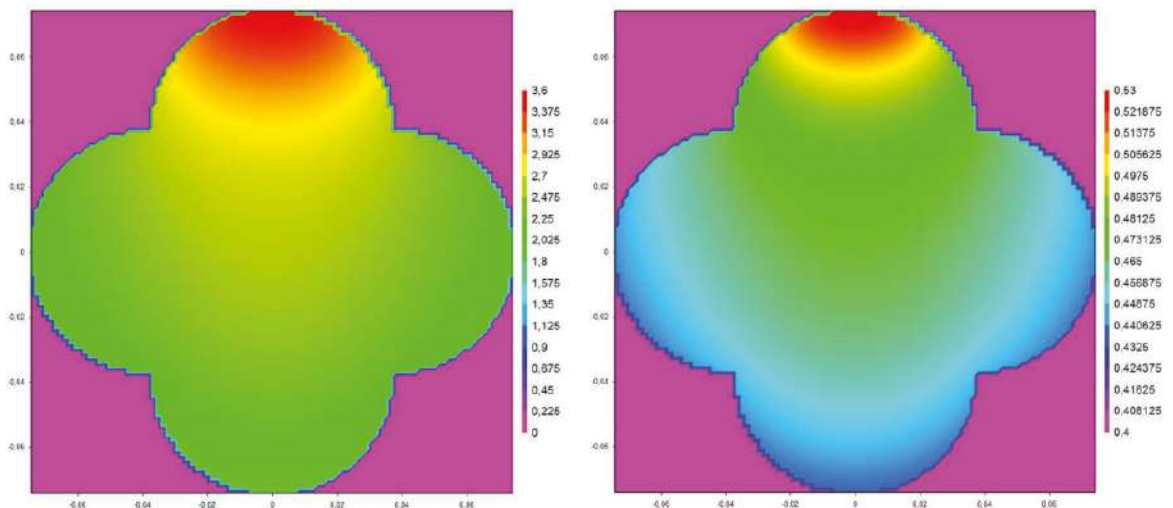


а)

б)

Рисунок 19 – Решение 2D задачи: a – модуль решения интегрального уравнения (7) при нелинейности (8);

b – распределение волнового числа внутри объекта, м^{-1}



а)

б)

Рисунок 20 – Решение 2D задачи: a – модуль решения интегрального уравнения (7) при нелинейности (8);

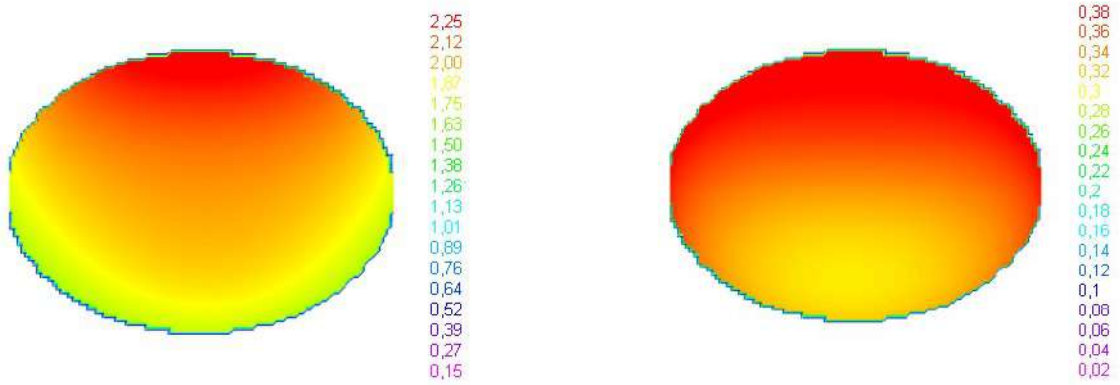
b – распределение волнового числа внутри объекта, м^{-1}

Тело (на рисунке 18) представляет собой круг, «вырезанный» из фигуры канонической формы (квадрата) путем применения субиерархического метода [77,78]. Диаметр круга совпадает с длиной квадрата, его центр находится в начале координат. Значения волнового числа внутри круга составляет $0,5 \text{ м}^{-1}$. Рисунок 19

демонстрирует решение нелинейной задачи на неоднородном теле в форме квадрата. Нелинейность задана по закону Керра (параметр $\alpha = 0,01$). В качестве начального приближения итерационного процесса выбрано волновое число $0,4 \text{ м}^{-1}$. Остальные параметры совпадают с предыдущим экспериментом. Рисунок 20 демонстрирует решение нелинейной задачи для тела сложной формы в виде четырехлистного клевера (параметр $\alpha = 0,01$). Для всех моделей выбраны следующие значения: размер пластины $0,15 \times 0,15 \text{ м}$, частота излучения $1,1 \text{ ГГц}$. Размер обобщенной вычислительной сетки 100×100 . Размер матрицы равен 50000×50000 элементов. В качестве падающего поля использовался точечный источник излучения, расположенный в центре плоскости тела на расстоянии $0,15 \text{ м}$.

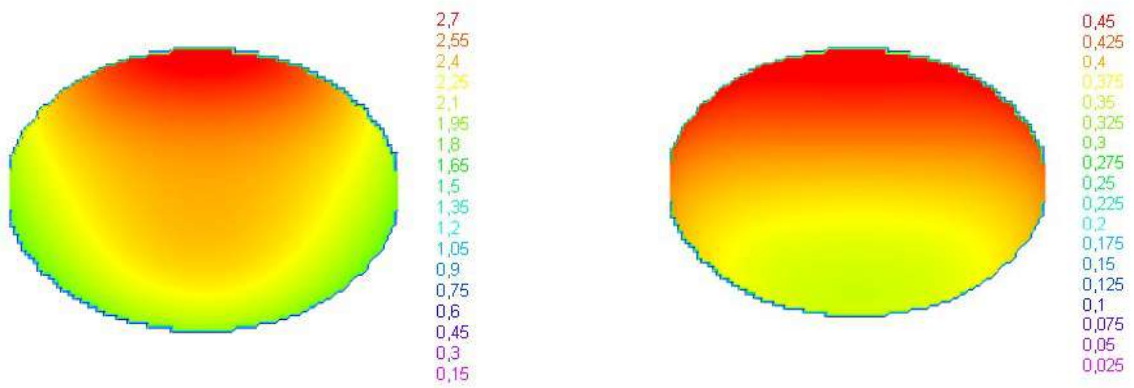
Приведем результаты решения прямой и обратной задач при различных параметрах нелинейности. В качестве начальных данных при расчетах были выбраны следующие значения: размеры области объекта $a = 0,15 \text{ м}$, $b = 0,15 \text{ м}$, общее количество ячеек с применением объединенных расчетных сеток $N = 12500$. Источник излучения расположен сверху объекта на расстоянии его длины одной из сторон. Неоднородность представляет собой эллипс, расположенный внутри прямоугольной области. На рисунках 21–24 представлено решение задачи при задании различных значений коэффициентов нелинейности α и β , где слева показаны значения поля, а справа значения распределение волнового числа после решения обратной задачи.

На рисунке 21 представлен линейный случай при $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Рисунок 22 описывает решение при параметре нелинейности $\alpha = 0,01$. Рисунок 23 демонстрирует решение задачи, когда параметр нелинейности β значительно превосходит параметр α ($\alpha = 0,1$ и $\beta = 0,5$). Рисунок 24 показывает решение при параметрах $\alpha = 0,001$ и $\beta = 0,1$. В левой части представлены значения поля, справа – значения функции $k(x)$.



a)

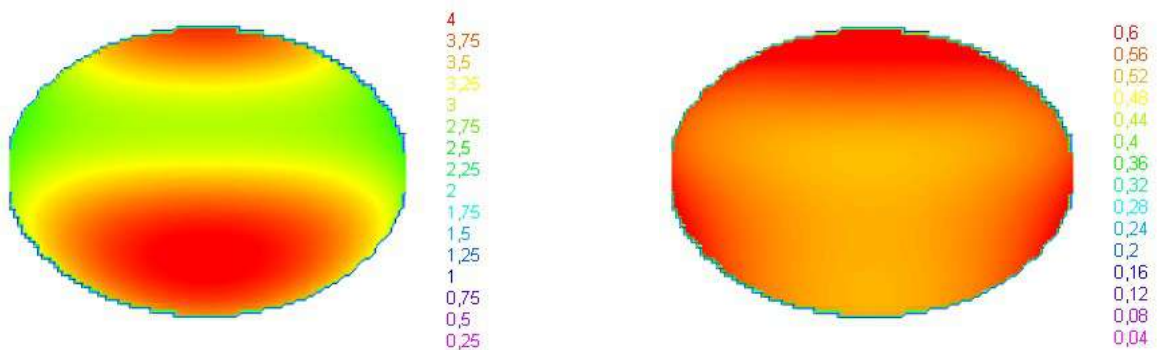
б)

Рисунок 21 – Решение задачи при линейном случае ($\alpha = \beta = 0$): a – значения поля $u(x)$; b – значения функции $k(x)$, м^{-1} 

a)

б)

Рисунок 22 – Решение задач при нелинейности (8):

 a – значения поля $u(x)$; b – значения функции $k(x)$, м^{-1} 

a)

б)

Рисунок 23 – Решение задачи при нелинейности (9), где $\alpha < \beta$: a – значения поля $u(x)$; b – значения функции $k(x)$, м^{-1}

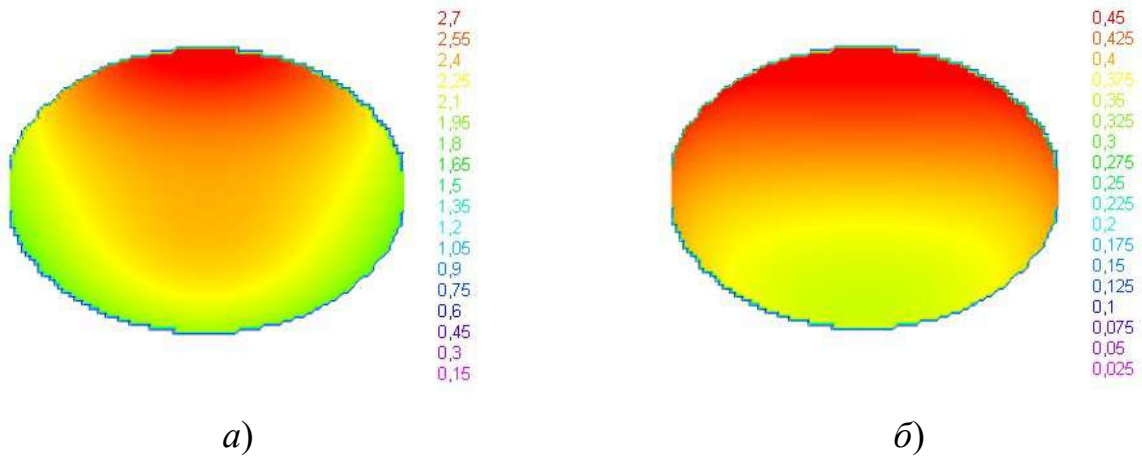


Рисунок 24 – Решение задач при нелинейности (9), где $\alpha > \beta$:

a – значения поля $u(x)$; $б$ – значения функции $k(x)$, m^{-1}

На рисунках 25–27 приведены графики сходимости итерационного процесса. По вертикальной оси δ_0 – максимум разности решений в узлах коллокации на текущем и предыдущем шагах итерации

$$\delta_0 = \max_i |u_{n+1}(x_i) - u_n(x_i)|.$$

Наблюдается отличие в сходимости итерационного процесса при выборе значений параметров нелинейности.

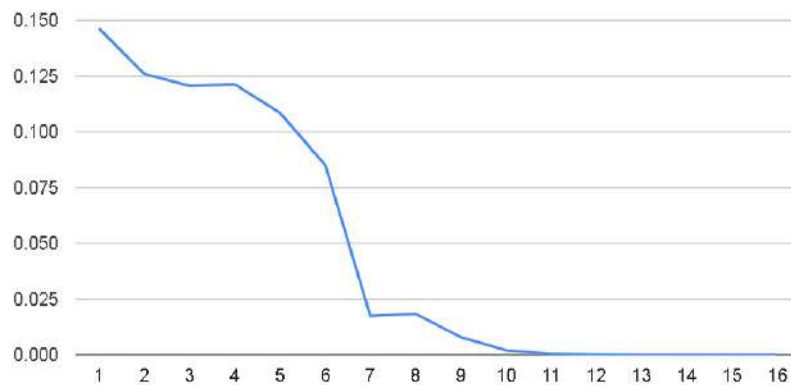


Рисунок 25 – График сходимости итерационного процесса (47) с нелинейностью (8). По горизонтальной оси – количество итераций

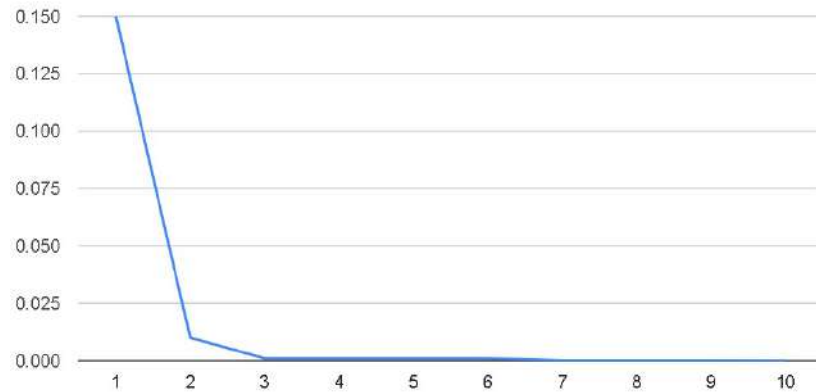


Рисунок 26 – График сходимости итерационного процесса (47) с нелинейностью (9), $\alpha < \beta$. По горизонтальной оси – количество итераций

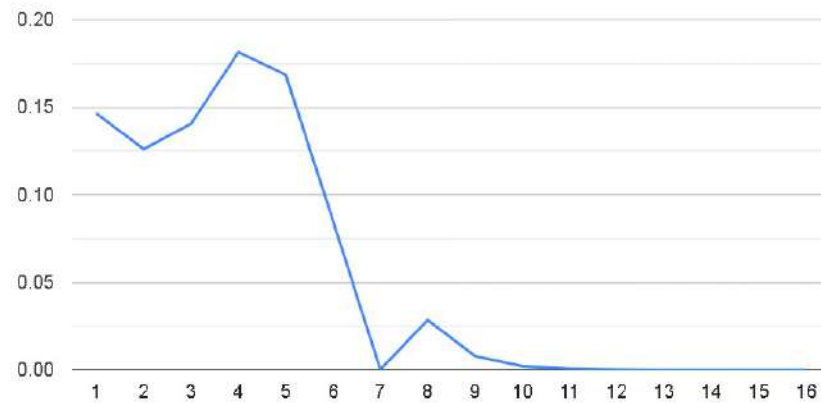
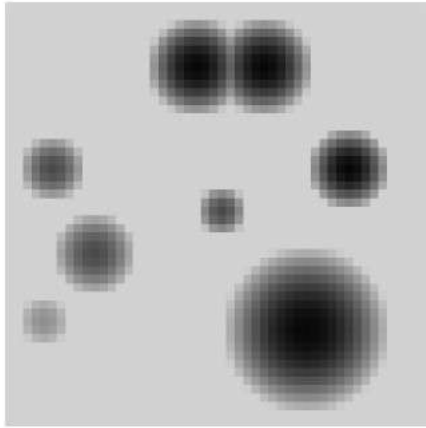


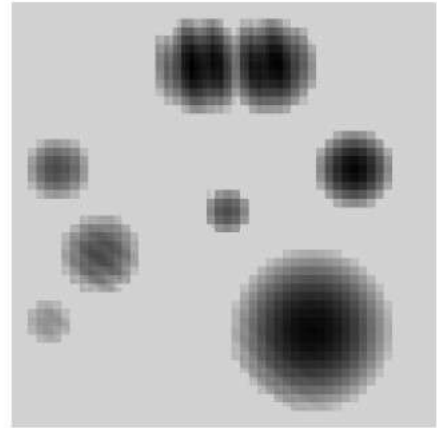
Рисунок 27 – График сходимости итерационного процесса (47) с нелинейностью (9), $\alpha > \beta$. По горизонтальной оси – количество итераций

Как видно из графиков 25–27 вычислительная сходимость не всегда является монотонной. Скорость сходимости тоже меняется значительно в зависимости от итераций. Это характерно для нелинейных задач.

На рисунках 28 и 29 представлены результаты решения прямой и обратной задач



а)

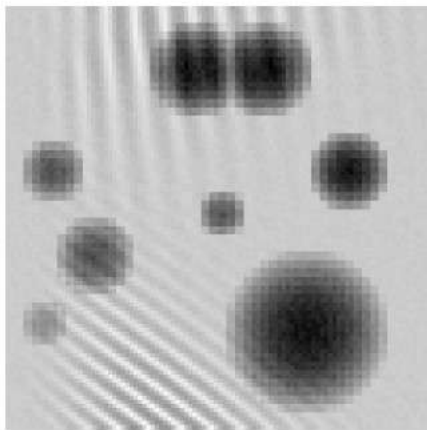


б)

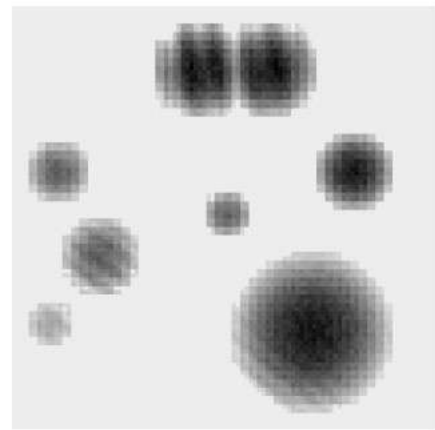
Рисунок 28 – Решение обратной 2D задачи: значение функции неоднородности $k(x)$ при расчетной сетке 100x100:

a – исходное значение; $б$ – восстановленное значение

Чтобы изучить устойчивость решения, вводим погрешность p в значения тока $J(y)$. Для численного расчета выбираем $p = 5\%$. После выполнения расчета получаем результат, как показано на рисунке 29.



а)



б)

Рисунок 29 – Восстановленные значения функции неоднородности $k(x)$ с расчетной сеткой 100x100 и погрешностью $p = 5\%$:

a – без фильтрации; $б$ – с фильтрацией

4.4. Результаты расчетов для трехмерного случая

Приведем результаты восстановления диэлектрической проницаемости кубического тела Q , расположенного в свободном пространстве. Параметры длины тела: $a = 0,15$ м, $b = 0,15$ м, $c = 0,15$ м. Волновое число в свободном пространстве $k_0 = 250$ м⁻¹. Размер расчетной сетки $20 \times 20 \times 20$. Частота излучения 1,12 ГГц.

На рисунке 30 слева представлено исходное значение модуля диэлектрической проницаемости тела Q , а справа показаны восстановленные значения. Между исходными и восстановленными значениями диэлектрической проницаемости появляется незначительная абсолютная погрешность (максимум модуля разности решения) и составляет порядка 10^{-6} . В представленных выше случаях, для восстановления данных неоднородности тела, были использованы исходные значения без внесения погрешности.

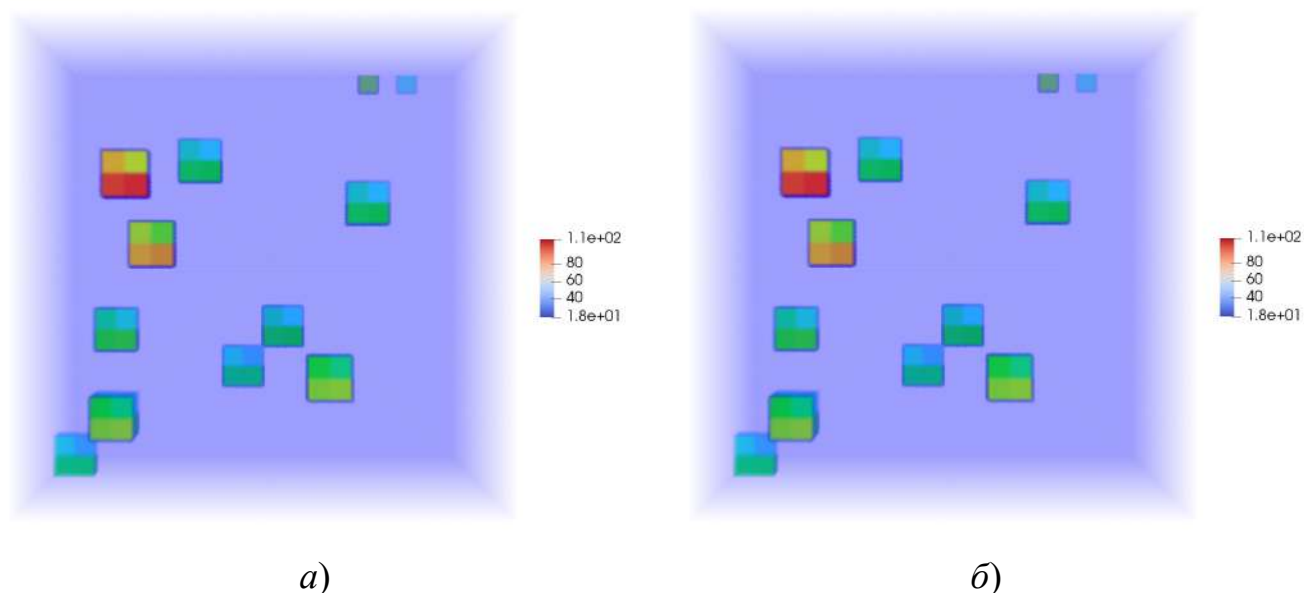


Рисунок 30 – Значения диэлектрической проницаемости тела, содержащего несколько неоднородностей: a – исходные; b – восстановленные

В результате на рисунке 31 была введена погрешность 5 % при моделировании значений поля в точках наблюдений.

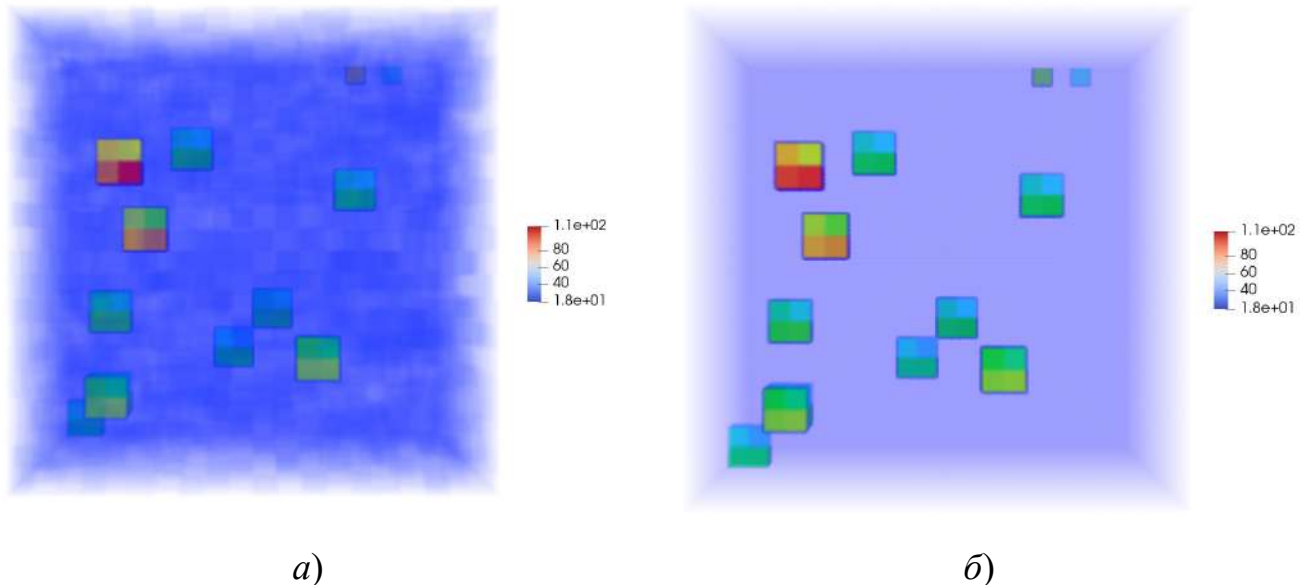


Рисунок 31 – Восстановленные значения диэлектрической проницаемости тела с добавлением шума 5 % на этапе измерений:
а – без фильтрации; *б* – с применением фильтрации

Результат показывает сохранение позиций неоднородностей и их значений. Явных «слепых» зон не обнаружено, артефакты не появились, на общую картину шум не повлиял. Погрешность вычисления неоднородностей тоже порядка 5 %.

Приведем результаты расчета для нескольких фигур цилиндрической формы (рисунки 32–35). Внутри тела цилиндрической формы был введен объект вида «кольцо» с равномерно распределенной неоднородной структурой в диапазоне волнового числа от 80 до 240 м⁻¹. Размер расчетной сетки составлял 15×15×15 ячеек, и была выбрана с учетом технической возможности вычисляющего персонального компьютера. Источником поля является падающая волна, исходящая от точечного источника с частотой 1,3 ГГц.

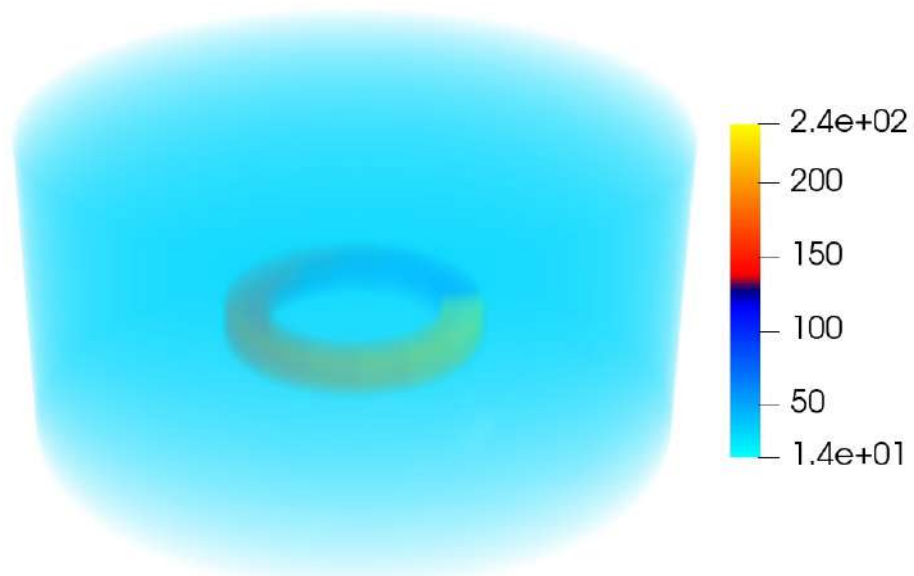


Рисунок 32 – Значение исходной функции $k(x)$ для неоднородного цилиндрического объекта

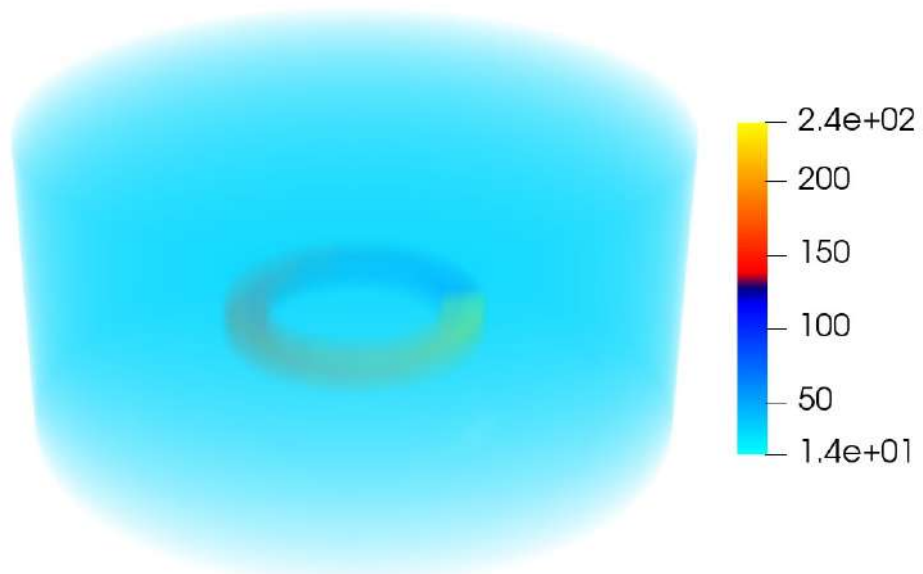


Рисунок 33 – Значение восстановленной функции $k(x)$ без внесения погрешности для неоднородного цилиндрического объекта

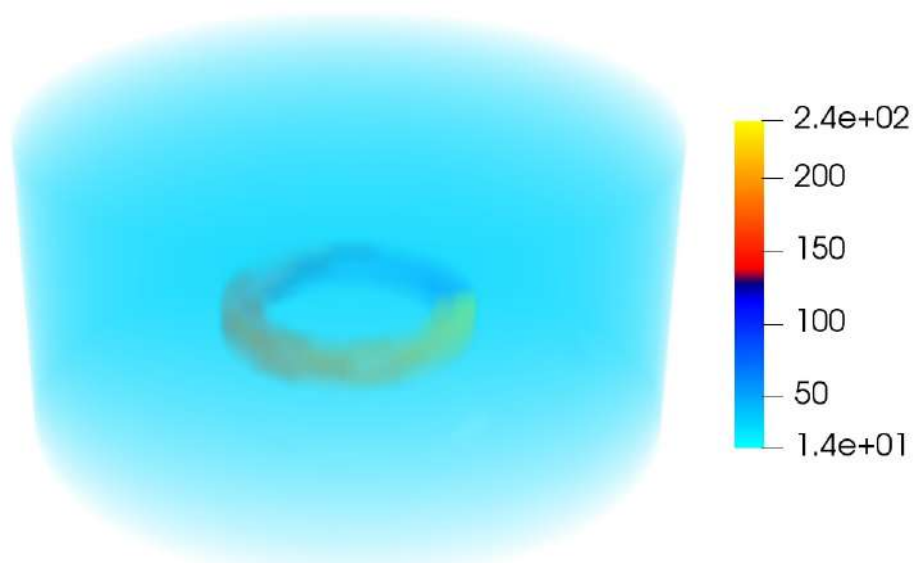


Рисунок 34 – Значение восстановленной функции $k(x)$ с внесенной погрешностью 5 % на этапе моделирования поля для неоднородного цилиндрического объекта

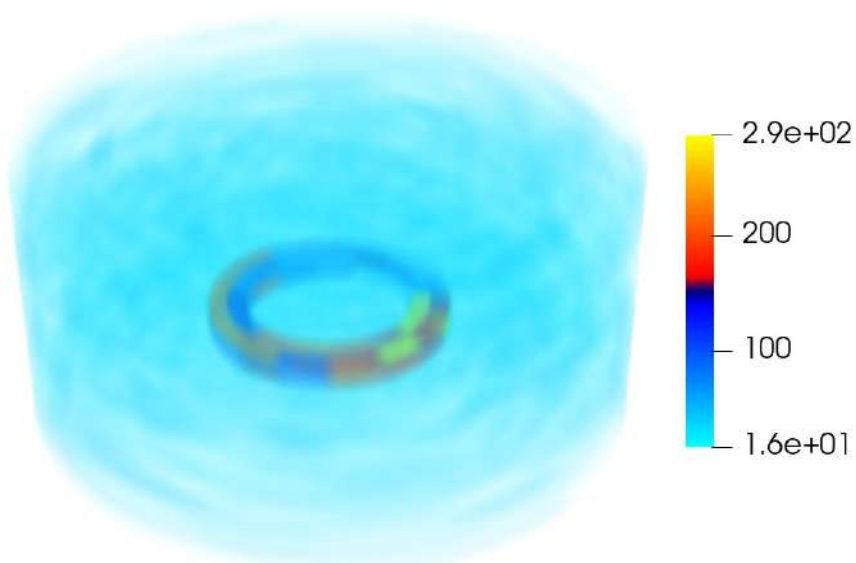


Рисунок 35 – Значение восстановленной функции $k(x)$ с внесенной погрешностью 15 % на этапе моделирования поля для неоднородного цилиндрического объекта

Как можно заметить, результаты исходной и восстановленной задачи на рисунках 32–35 имеют схожие значения. Отсюда следует, что метод решения обратной задачи работает и показывает приемлемые результаты.

В качестве эксперимента, для проверки метода при значениях «с шумом», была введена погрешность 5 % и 15 %, которая показана на рисунках 34 и 35. Видны некоторые изменения в значениях неоднородности, однако, форма объекта отчетливо просматривается в каждом результате. При больших значениях шума требуется использование дополнительных методов фильтрации данных.

Далее рассматривается векторная обратная задача дифракции на полусфере. Рисунок 36 демонстрирует решение прямой задачи, а рисунок 37 – обратной задачи для полусферы, содержащей неравномерно распределенные неоднородности с различными диэлектрическими проницаемостями, значения которых отображены на цветовой шкале. Неоднородности визуализированы цветными фигурами внутри полусферы.

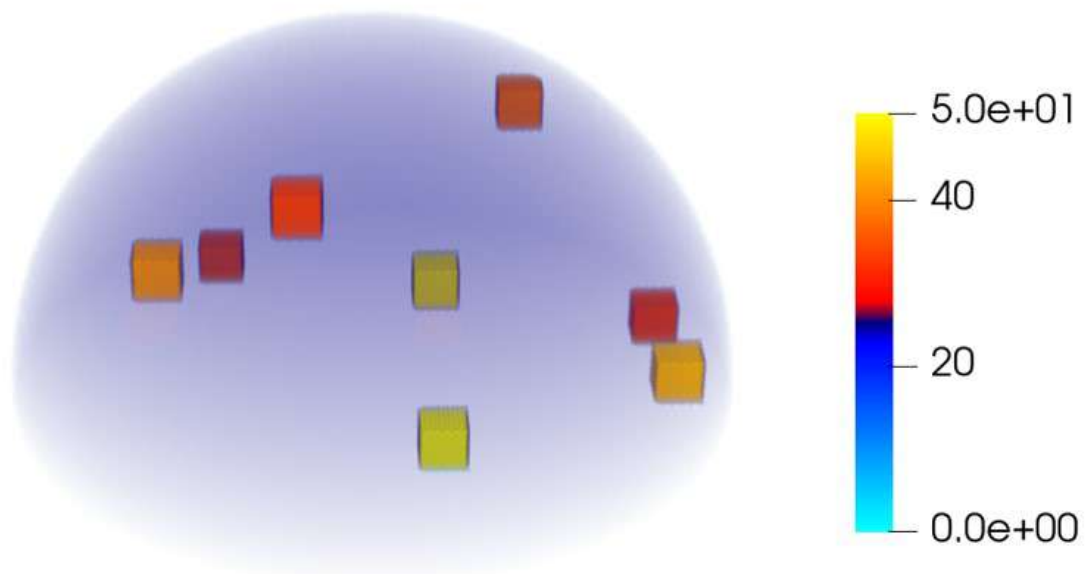


Рисунок 36 – Решение прямой задачи для неоднородной полусферы:
значения диэлектрической проницаемости

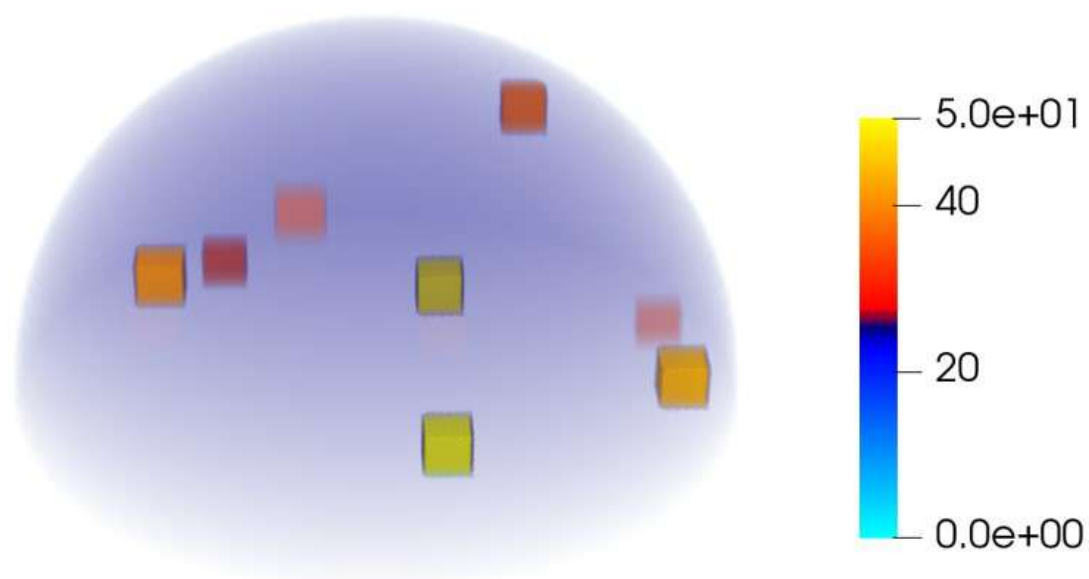


Рисунок 37 – Решение обратной задачи для неоднородной полусферы:
значения диэлектрической проницаемости

Из на рисунках 36 и 37 заметно, что изменения значений неоднородностей в прямой (точные значения) и обратной (вычисленные приближенные значения) задачах незначительны. Восстановленные данные, отражающие их положение и параметры неоднородности, хорошо различимы.

4.5. Применение программного пакета COMSOL Multiphysics

COMSOL Multiphysics является ПО для исследования задачи определения неоднородности внутри объекта, путем моделирования дифракции электромагнитной волны на неоднородном объекте. Моделирование в COMSOL позволяет подтвердить корректность и точность физического эксперимента, сравнивая его результаты с экспериментальными данными.

Для моделирования прямой задачи дифракции с использованием волноводов в COMSOL Multiphysics применялся модуль Electromagnetic Waves, Frequency Domain (Электромагнитные волны, частотная область на рисунке 38).

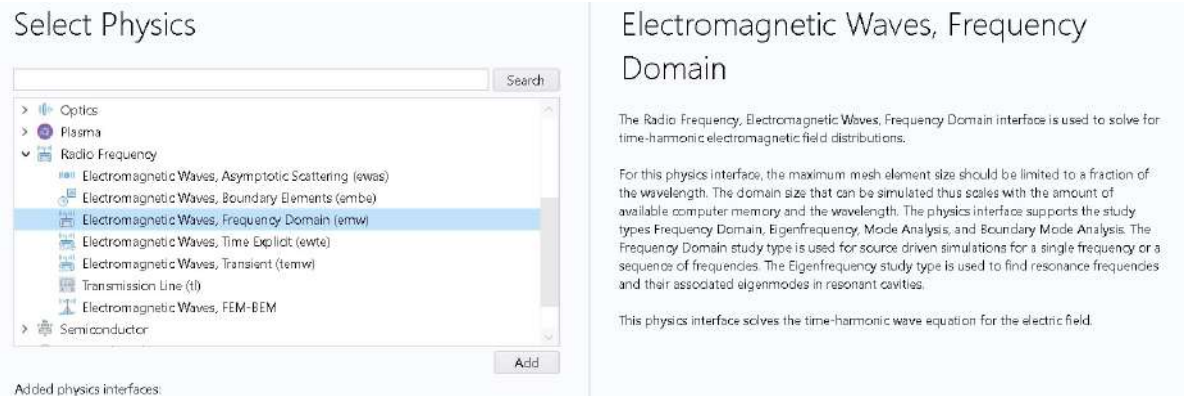


Рисунок 38 – Окно выбора модуля (Electromagnetic Waves, Frequency Domain) в программе COMSOL Multiphysics

Перейдем к этапам моделирования в данной среде. Для начала следует задать геометрию исследуемого объекта и источника излучения. Этот этап посвящен созданию физического пространства, в котором будут происходить все смоделированные процессы. Точность и корректность геометрической модели определяют адекватность результатов.

Первым шагом является создание самой модели исследуемого объекта. Для создания трехмерных объектов COMSOL предлагает такие инструменты, как Block, Cylinder, Sphere, Cone и Torus для базовых форм. Рассматривается излучение из открытого конца прямоугольного волновода 1. Рассеянное на объекте электромагнитное поле измеряется в раскрыве прямоугольного волновода 2 (рисунок 39).

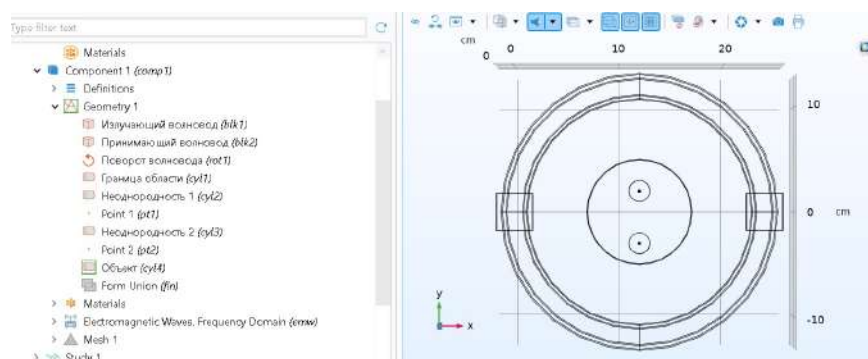


Рисунок 39 – Создание геометрии исследуемого объекта, границы расчетной области и неоднородностей, волновод 1 (слева) и волновод 2 (справа) в COMSOL

Для увеличения количества данных, необходимых при решении обратной задачи, реализован поворот волновода 2, относительно центра и изменение его высоты (рисунок 40). Регулировка угла поворота осуществляется изменением значения переменных, которые были заранее определены.

Для основного исследуемого объекта необходимо задать соответствующие свойства материала. Задаются основные параметры: относительная диэлектрическая проницаемость (relative permittivity), относительная магнитная проницаемость (relative permeability) и электрическая проводимость (electrical conductivity).

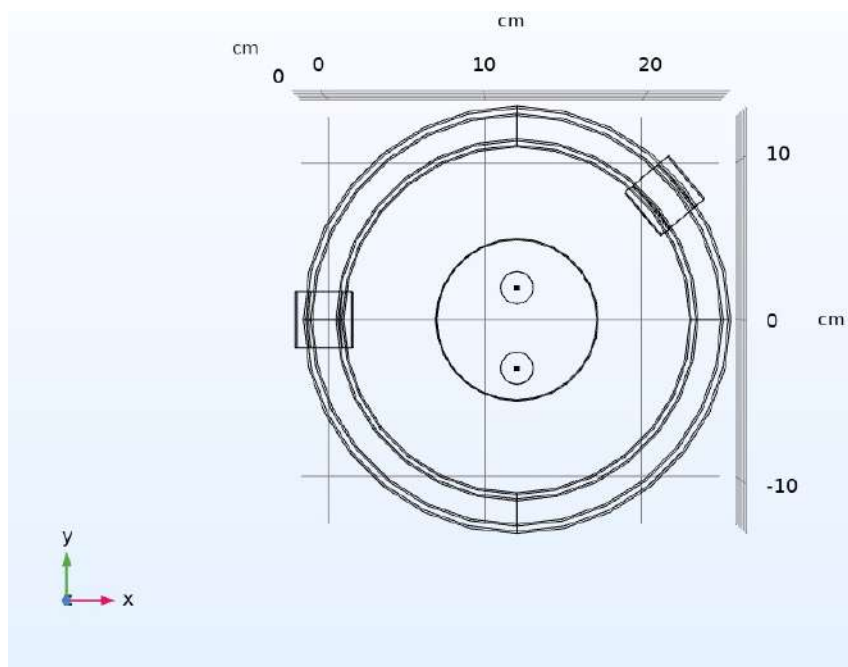


Рисунок 40 – Пример поворота волновода 2 на 40 градусов относительно центра в COMSOL

Для основного исследуемого объекта необходимо задать соответствующие свойства материала. Задаются основные параметры: относительная диэлектрическая проницаемость (relative permittivity), относительная магнитная проницаемость (relative permeability) и электрическая проводимость (electrical conductivity).

Для моделирования распространения волн в объектах и волноводах в COMSOL Multiphysics, применяется интерфейс Solid Mechanics (Механика твердого тела).

Для моделирования бесконечной среды, на границах исследуемой области применен Perfectly Matched Layer (PML) (Идеально согласованный слой). PML представляет собой специальный слой, окружающий расчетную область, который поглощает волны всех типов и углов падения, обеспечивая практически идеальное отсутствие отражений от границ расчетной области (рисунок 41).

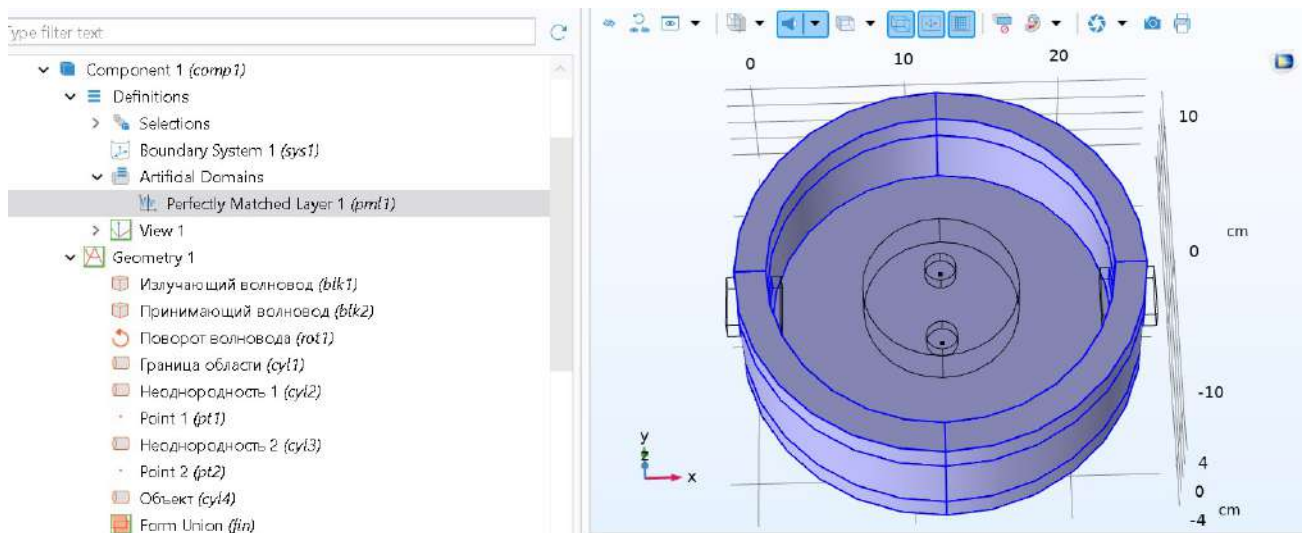


Рисунок 41 – Выбор PML границы (условие на границе) в COMSOL

После определения физических интерфейсов и граничных условий, следующим ключевым этапом является создание сетки (Mesh), которая важна для решения краевой задачи методом конечных элементов. Плотность сетки можно увеличить в областях с неоднородностями, где ожидаются значительные изменения полей (рисунок 42).

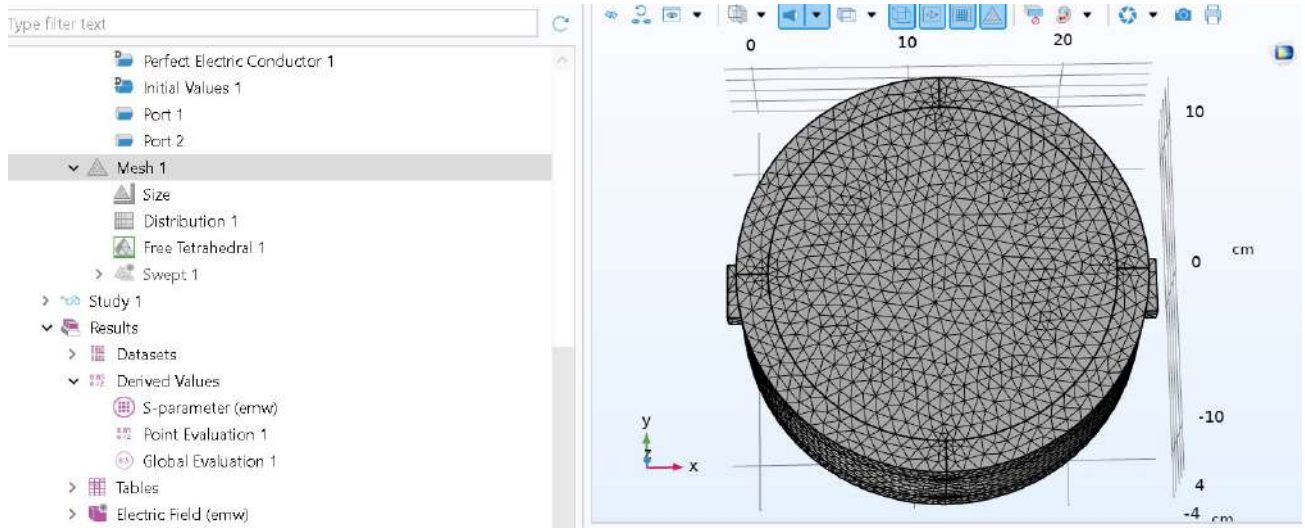


Рисунок 42 – Создание расчетной сетки в COMSOL

После настройки сетки переходят к выбору типа исследования (рисунок 43). Если целью является анализ поведения системы на одной или нескольких частотах, то выбирается частотная область (Frequency Domain).

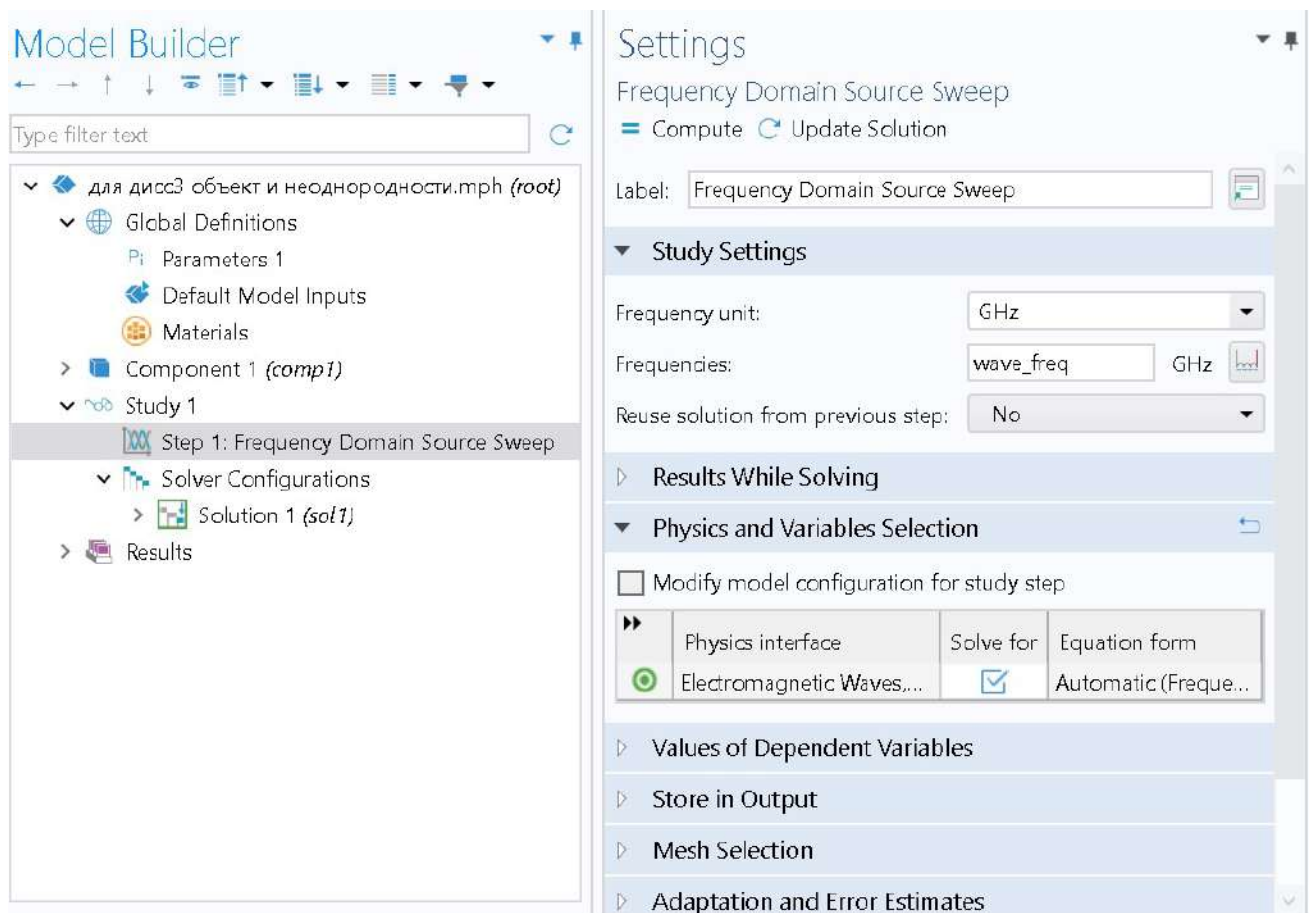


Рисунок 43 – Окно настроек тип исследования в COMSOL

Завершив расчеты, переходим к результатам и анализу (Results). Первым шагом является визуализация полей: построение графиков распределения электрического поля в объекте и в расчетной области (рисунок 44).

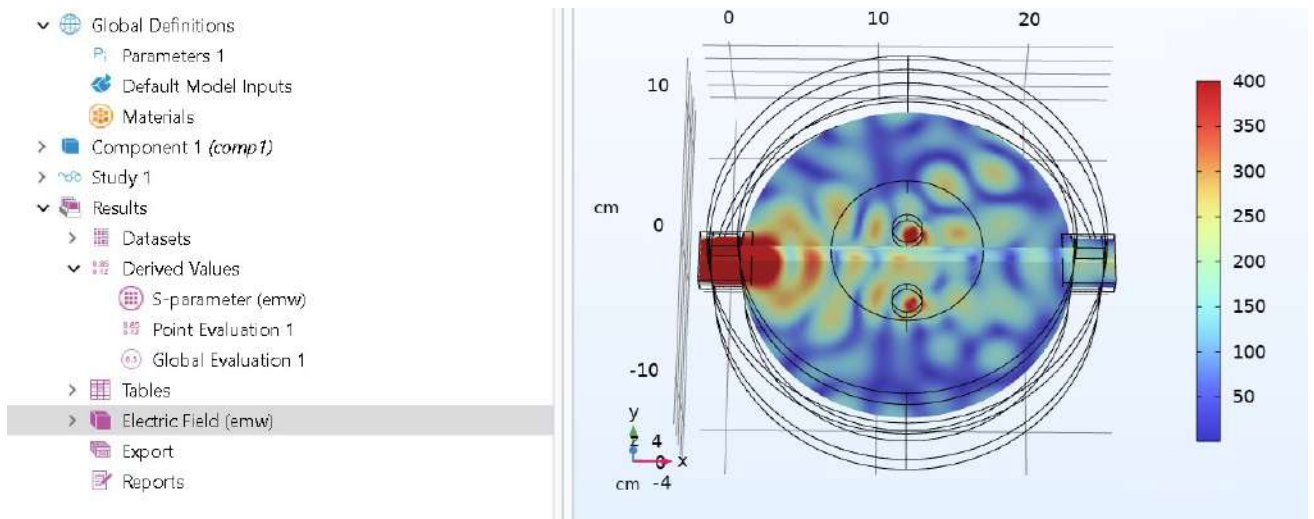


Рисунок 44 – Результат вычисления модуля напряженности электрического поля в V/m в COMSOL для цилиндрического тела, содержащего две неоднородностей

Кроме этого, можно определить значения модуля напряженности электрического поля в необходимых точках (задав нужные координаты). Это необходимо, например, для решения обратной задачи, когда точки расположены вне исследуемого объекта. В примере на рисунке 45, точки расположены в областях неоднородностей, а на рисунке 46 смоделирована матрица точек из $18 \times 18 \times 18$ элементов вне исследуемого объекта.

Результаты расчетов также можно представить в виде матрицы S-параметров [118,119]. Параметр $|S_{11}|$ определяется как модуль отношения амплитуды отраженной волны в волновод 1 к модулю излучаемой волны. Параметр $|S_{21}|$ определяется как модуль отношения амплитуды волны в волноводе 2 к амплитуде излучаемой волны (рисунок 47).

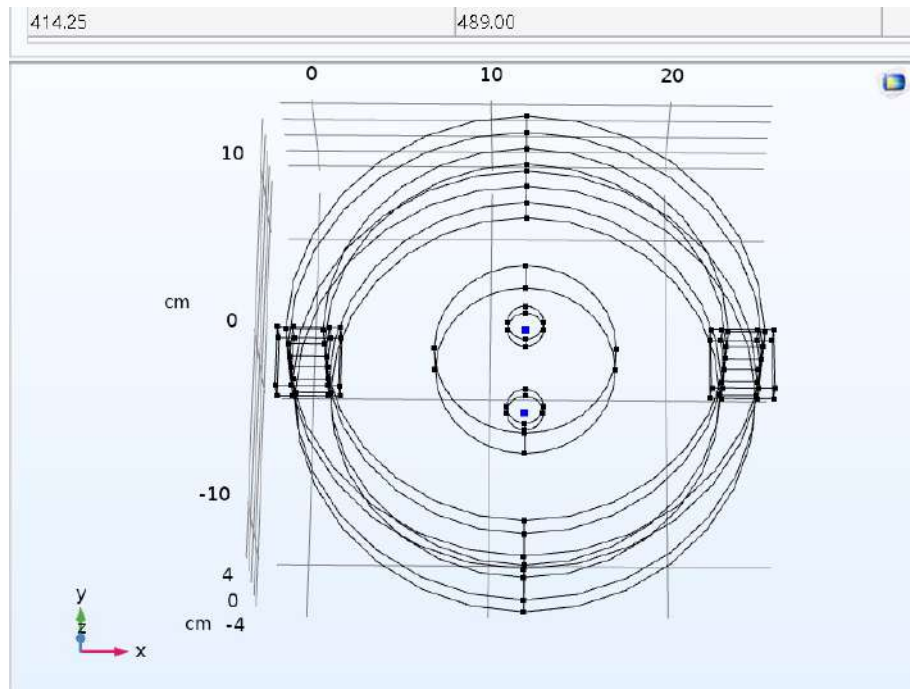


Рисунок 45 – Выбор расчетных точек (выделены синим цветом) в COMSOL

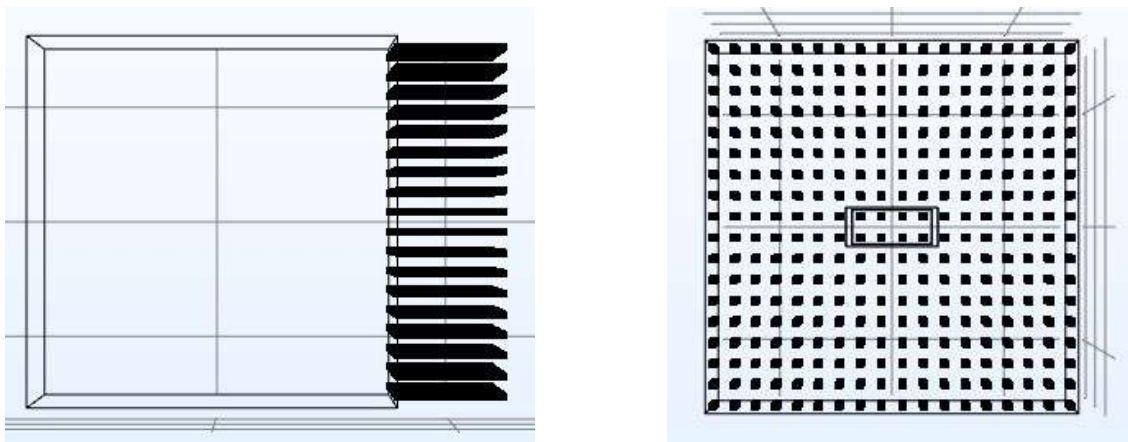


Рисунок 46 – Матрица точек, расположенная вне исследуемого объекта

S-parameter, dB (1)	
-9.7906	-19.112
-19.112	-9.9168

Рисунок 47 – Матрица S-параметров для рассматриваемого примера в COMSOL

На рисунках 48 и 49 показаны значения напряженности электрического поля для двух вариантов задачи (с телом и без тела). В первом варианте объект внутри расчетной области отсутствует, а во втором содержит кубическое тело размером 15 см по каждой стороне. Область ограничена слоем PML. Источником электромагнитного излучения является волновод WR-137, который был также смоделирован, частота волны – 5,8 ГГц. На цветовой шкале отображены значения напряженности электрического поля.

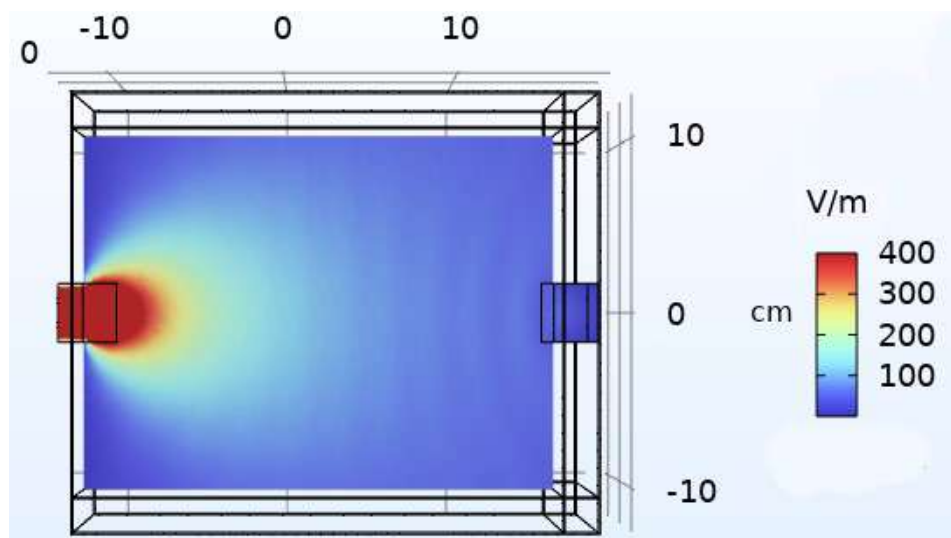


Рисунок 48 – Результат вычисления напряженности электрического поля без объекта, V/m

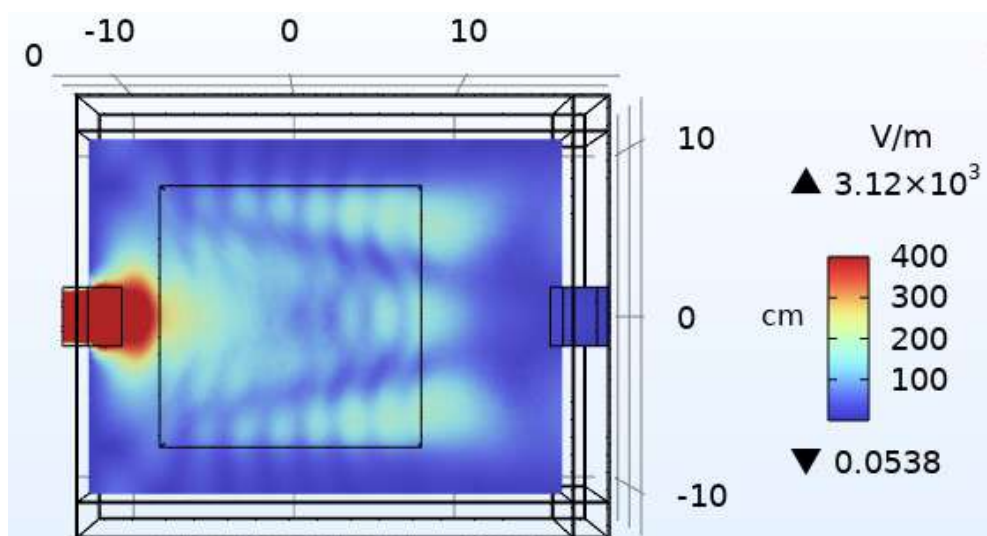


Рисунок 49 – Результат вычисления напряженности электрического поля для однородного кубического тела, V/m

На рисунке 50 приведены результаты моделирования электрического поля (3 компоненты), полученные с использованием разработанного метода для задачи дифракции в отсутствии диэлектрического тела. Рассматривается плоскость в непосредственной близости от источника излучения

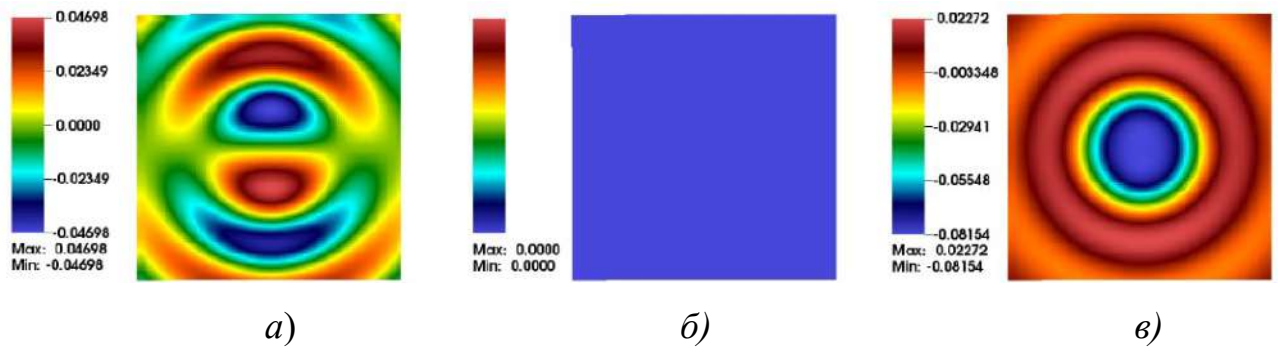


Рисунок 50 – Компоненты электрического поля, полученные разработанным методом: *а* – проекция вектора напряжённости на ось OX ; *б* – проекция вектора напряжённости на ось OY ; *в* – проекция вектора напряжённости на ось OZ

На рисунке 51 приведены результаты моделирования электрического поля (также 3 компоненты), полученные с использованием программного пакета COMSOL.

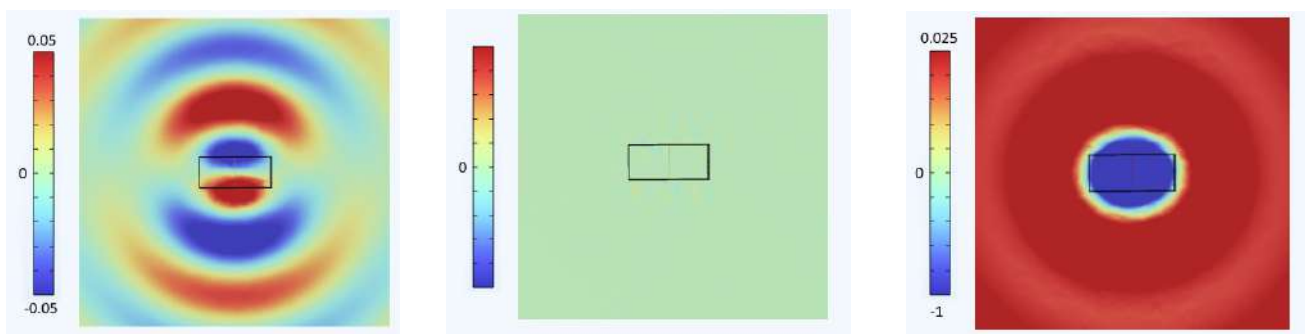


Рисунок 51 – Компоненты электрического поля, полученные в COMSOL:

а – проекция вектора напряжённости на ось OX ; *б* – проекция вектора напряжённости на ось OY ; *в* – проекция вектора напряжённости на ось OZ

Сравнительный анализ показал, что поведение компонентов поля качественно совпадает и характеризуется лишь незначительными количественными

отклонениями. Это свидетельствует о применимости разработанного метода для моделирования поля.

Для проверки адекватности моделирования проведено сравнение значений поля (рисунок 52) в некоторых точках (рисунок 53), которые были получены в COMSOL с расчетами разработанного метода. Результаты представлены в таблице 4 и на рисунке 54.

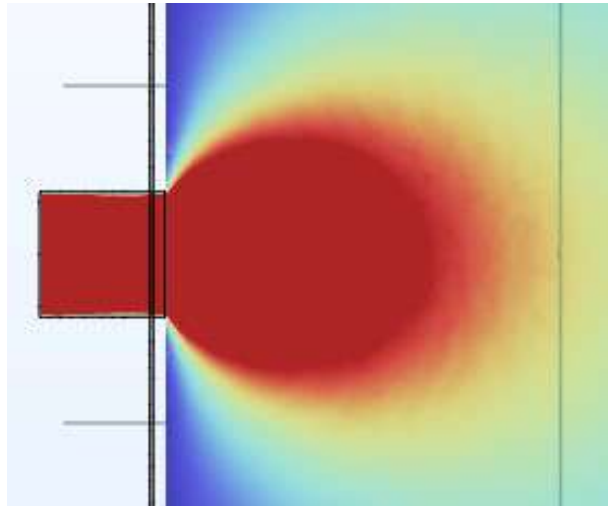


Рисунок 52 – Результат моделирования поля, полученный в COMSOL

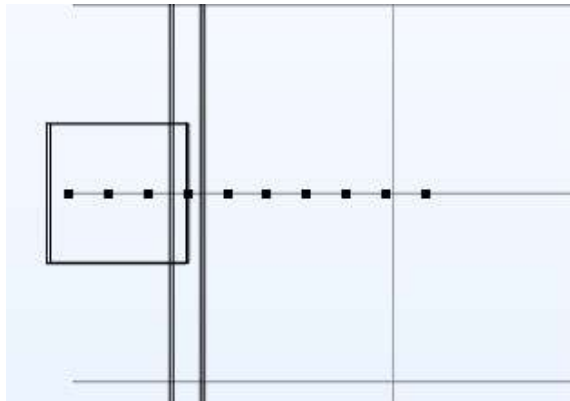


Рисунок 53 – Пример расположения точек

Для верификации модели были выбраны 25 точек, равномерно распределённых относительно центра волновода. Проведено сравнение модуля напряженности полного электрического поля, показанное на рисунке 54 и таблице 4.

Таблица 4 – Значения модуля полного электрического поля. в некоторых точках

 E модели	 E COMSOL
0,127911	0,1378
0,123355	0,13304
0,119098	0,12858
0,115113	0,12439
0,111375	0,12045
0,107862	0,11674
0,104556	0,11325
0,101439	0,10994
0,098496	0,10682
0,095714	0,10386
0,093079	0,10105
0,090581	0,09839
0,08821	0,09585
0,085956	0,09344
0,083812	0,09115
0,081769	0,08896
0,07982	0,08687
0,077961	0,08487
0,076183	0,08297
0,074484	0,08114
0,072856	0,07939
0,071297	0,07771
0,069802	0,0761
0,068367	0,07455
0,066989	0,07306

Среднее различие между данными составляет не более 7,6 %. Расхождение результатов расчетов связано с некоторым различием моделей.

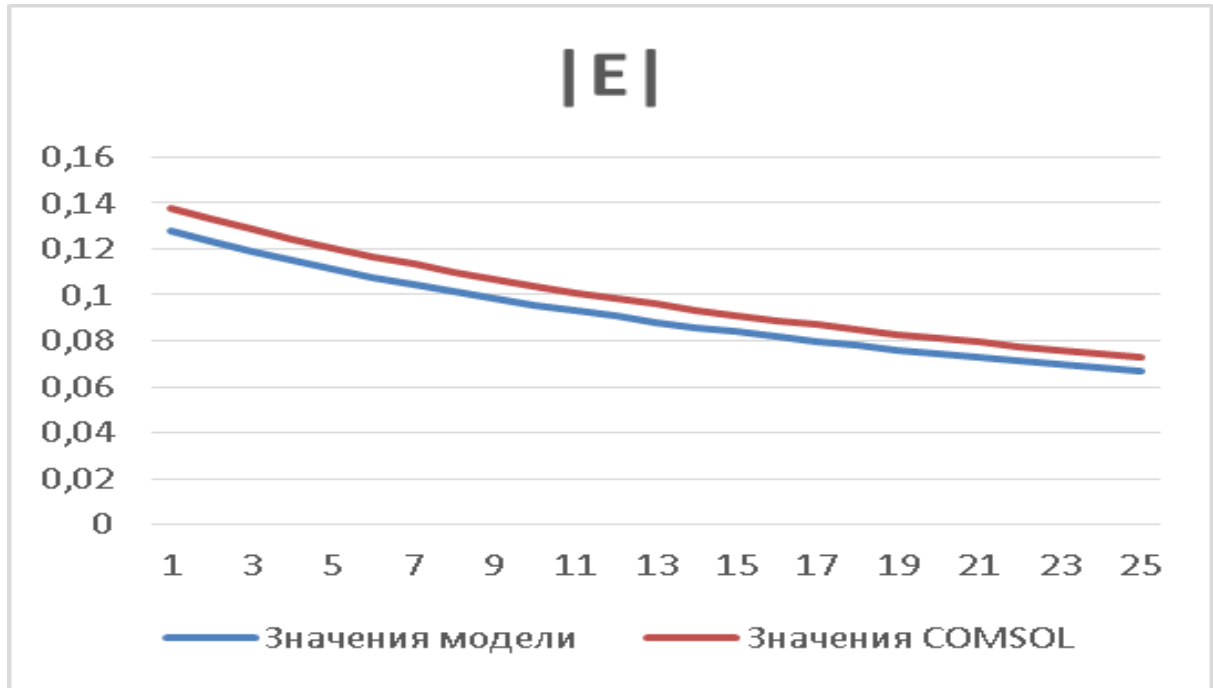


Рисунок 54 – Сравнение результатов моделирования модуля полного электрического поля, полученные с использованием разработанного метода и пакета COMSOL

4.6. Результаты натурных измерений

Ниже представлены результаты экспериментов по обнаружению неоднородности с помощью измерительной установки, описанной в ПРИЛОЖЕНИИ В. Комплексные коэффициенты отражения и прохождения определяются с помощью векторного анализатора. Рассматривались различные диапазоны частот. На рисунках 55 и 56 представлены графики модуля вещественной части S-параметров для вариантов F_1, F_2, F_3, F_0 .

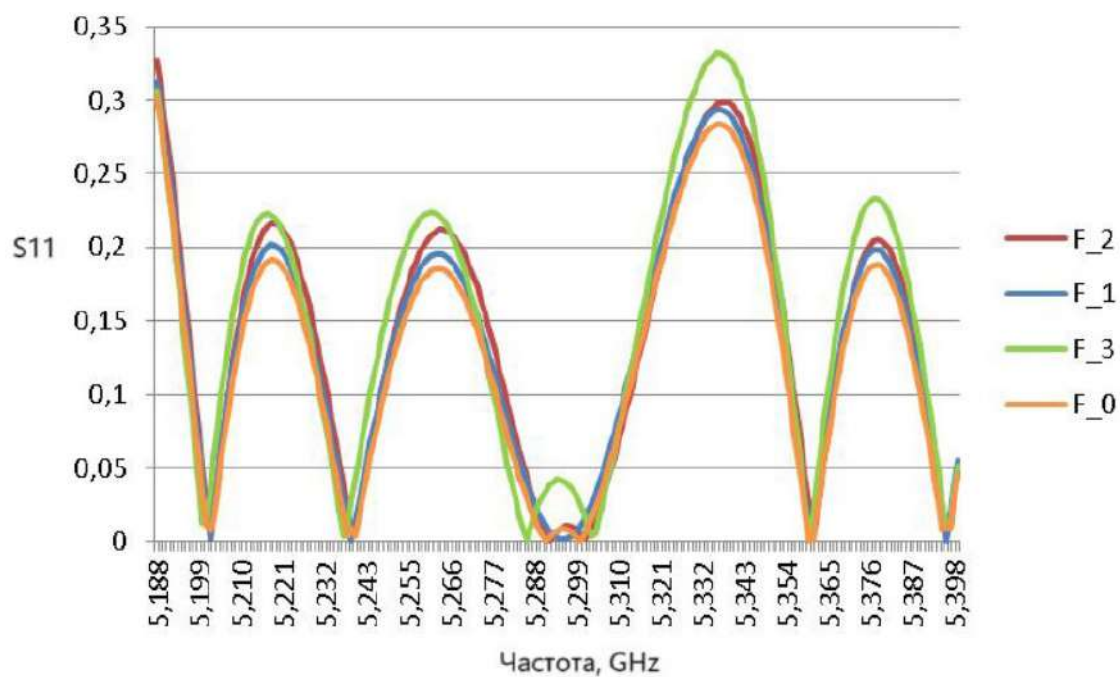


Рисунок 55 – Частотная зависимость модуля вещественной части S_{11} с WR-90 для объектов полусферической формы F_1, F_2, F_3, F_0

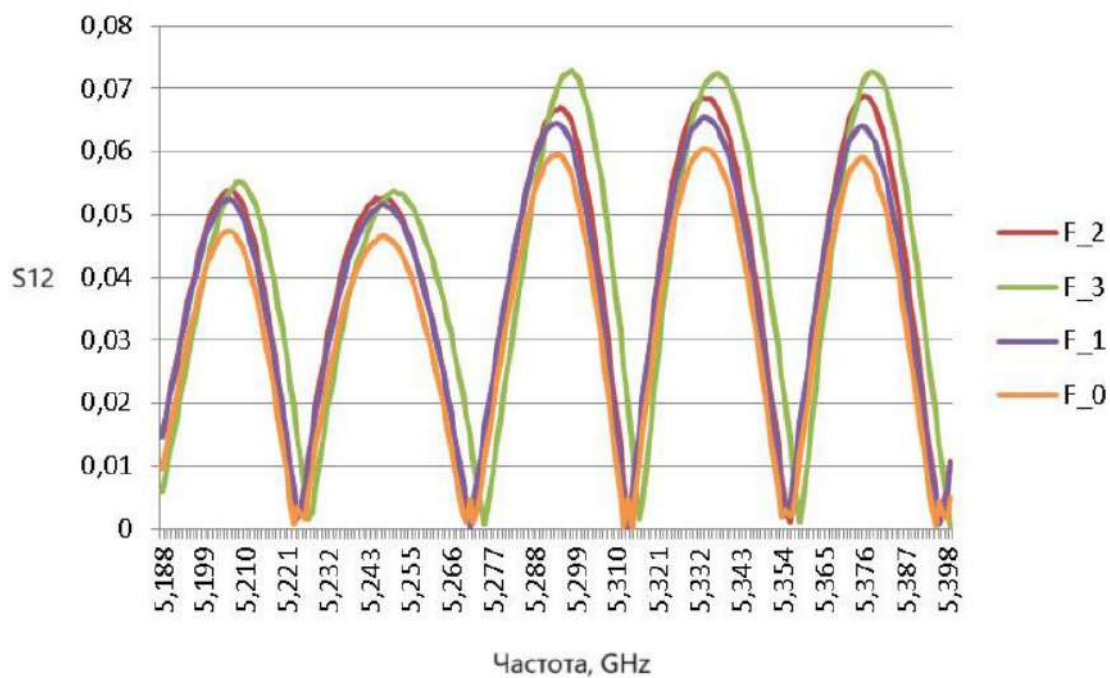


Рисунок 56 – Частотная зависимость модуля вещественной части S_{12} с WR-90 для объектов полусферической формы F_0, F_1, F_2, F_3

Сравнительный анализ графиков выявил значимые изменения коэффициента отражения и прохождения. Представленные графики иллюстрируют результаты экспериментов (образцы различными по размерам неоднородностями). Отличия на графиках обусловлены влиянием неоднородности на прохождение электромагнитной волны. Стоит отметить, что рассматриваются модули вещественной части параметров S_{11} и S_{12} , которые могут обращаться в нуль.

Далее были проведены эксперименты для других исследуемых объектов. Измерения проводились в рабочем диапазоне частот волноведущих структур с предварительной калибровкой. В качестве объектов были взяты:

- Полусферический объект из пищевого пластика радиуса 5 см, заполненный воздухом. В качестве неоднородности использовался резиновый шарик радиусом 1 см с относительной диэлектрической проницаемостью 3.
- Цилиндрический объект из пищевого пластика радиуса 5 см, заполненный раствором глицерина (с относительной диэлектрической проницаемостью 42,5). Электрическая проводимость глицерина (при 100% растворе) на всем диапазоне исследуемых частоты составляет около 1 С/м. В качестве неоднородности использовался пластиковый шарик радиусом 1 см, заполненный раствором соленой воды с относительной диэлектрической проницаемостью 80 (при концентрации NaCl 3 %).

На рисунках 57–59 представлены частотные зависимости вещественной и мнимой частей, а также модуля коэффициента прохождения S_{21} для объекта полусферической формы с неоднородностью и без неоднородности для экспериментов с волноводами WR-90.

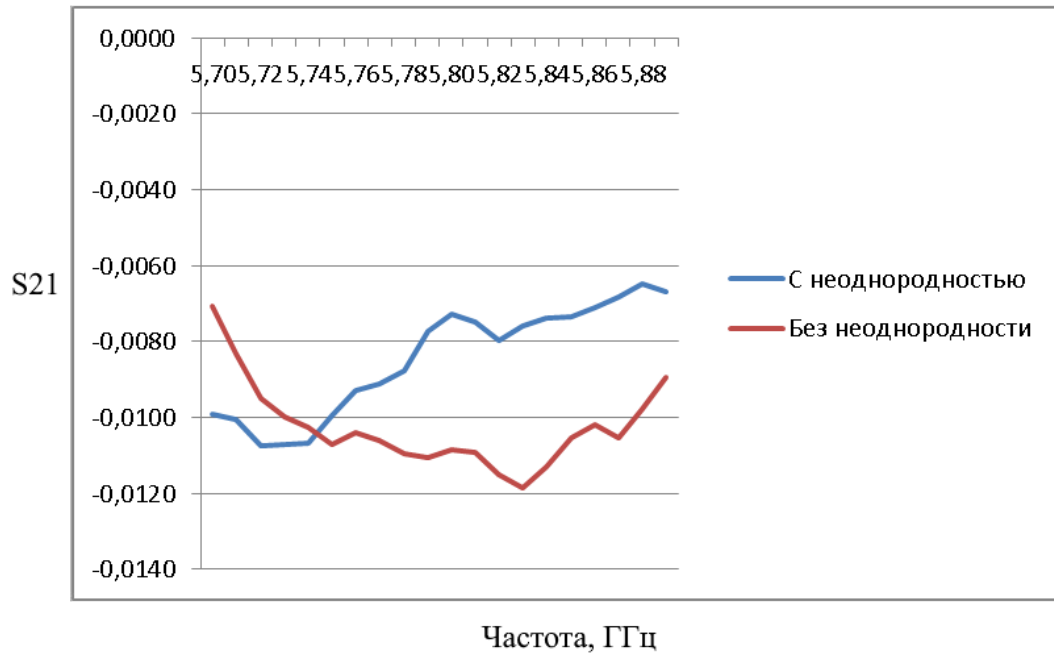


Рисунок 57 – Частотная зависимость вещественной части коэффициента прохождения S_{21} для объекта полусферической формы с неоднородностью и без неоднородности с WR-90

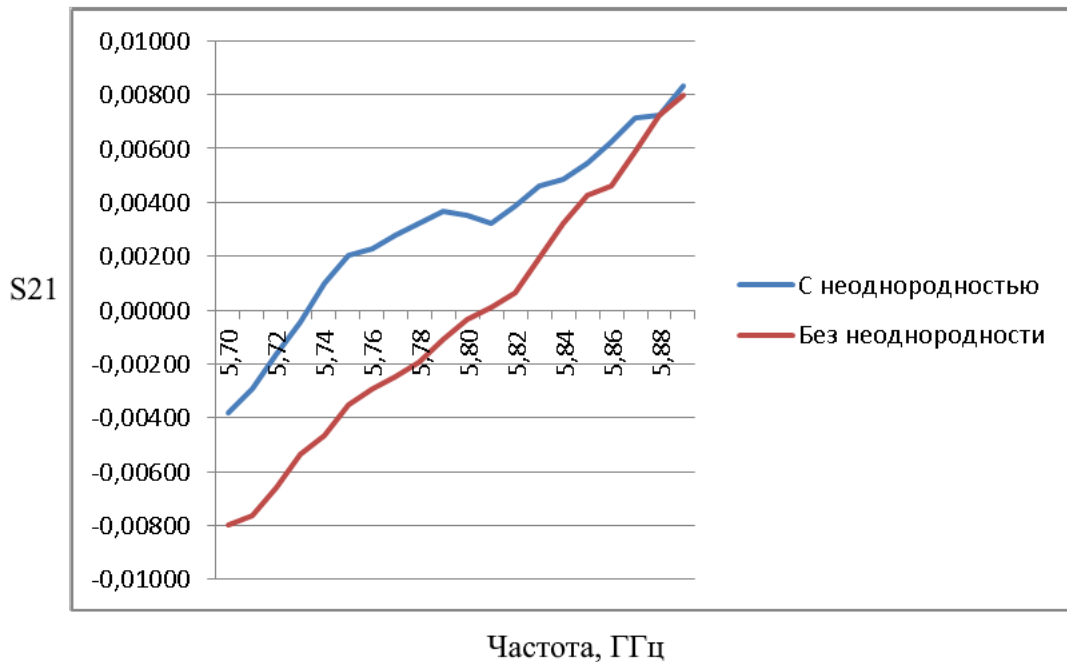


Рисунок 58 – Частотная зависимость мнимой части коэффициента прохождения S_{21} для объекта полусферической формы с неоднородностью и без неоднородности с WR-90

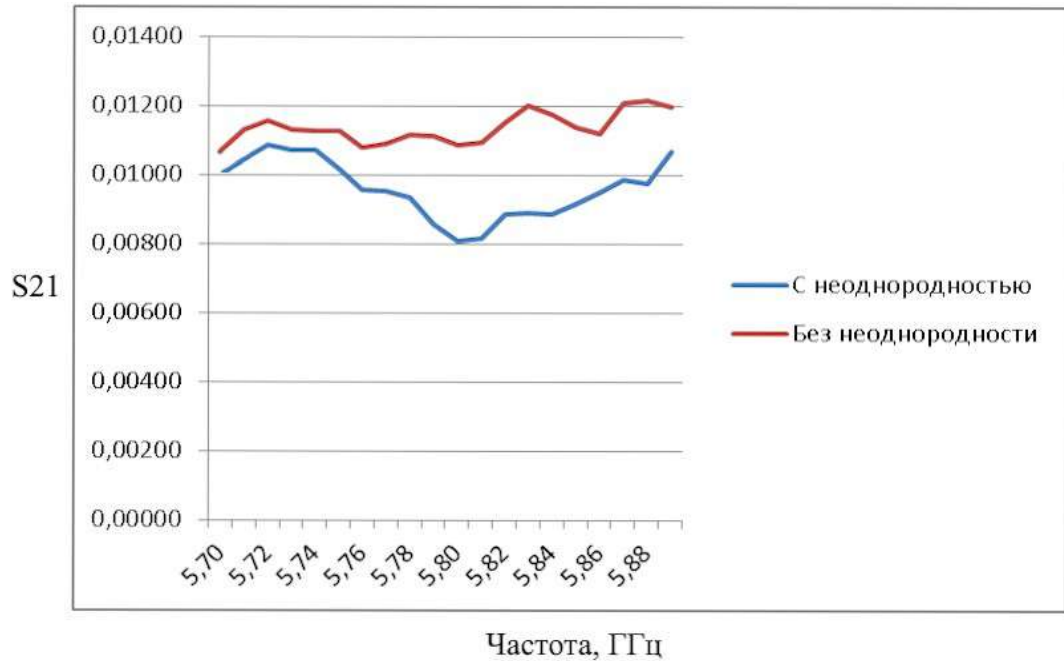


Рисунок 59 – Частотная зависимость модуля коэффициента прохождения S_{21} для объекта полусферической формы с неоднородностью и без неоднородности с WR-90

Графики показывают, что наличие неоднородности существенно влияет на значение параметра S_{21} .

Далее представлены результаты экспериментов для волноводов WR-137 с установленным дополнительным фланцем из двустороннего фольгированного текстолита толщиной 1,5 (представленный в ПРИЛОЖЕНИИ В).

На рисунках 60–62 представлены результаты измерения коэффициента прохождения S_{21} при наличии объекта полусферической формы с неоднородностью и без нее.

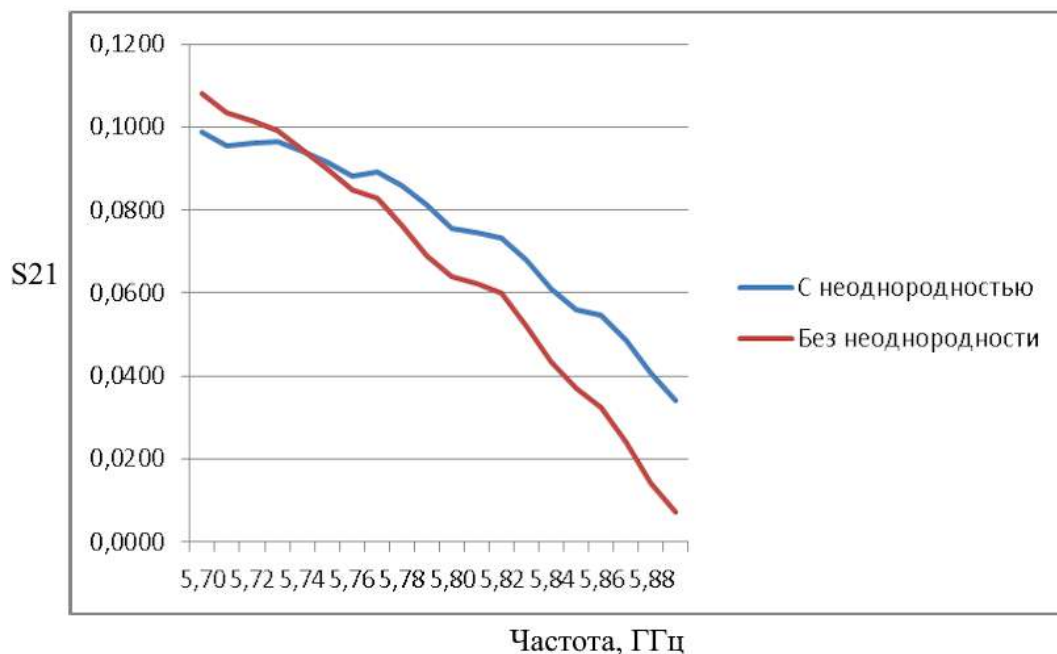


Рисунок 60 – Частотная зависимость вещественной части коэффициента прохождения S_{21} для объекта полусферической формы с неоднородностью и без неоднородности с WR-137

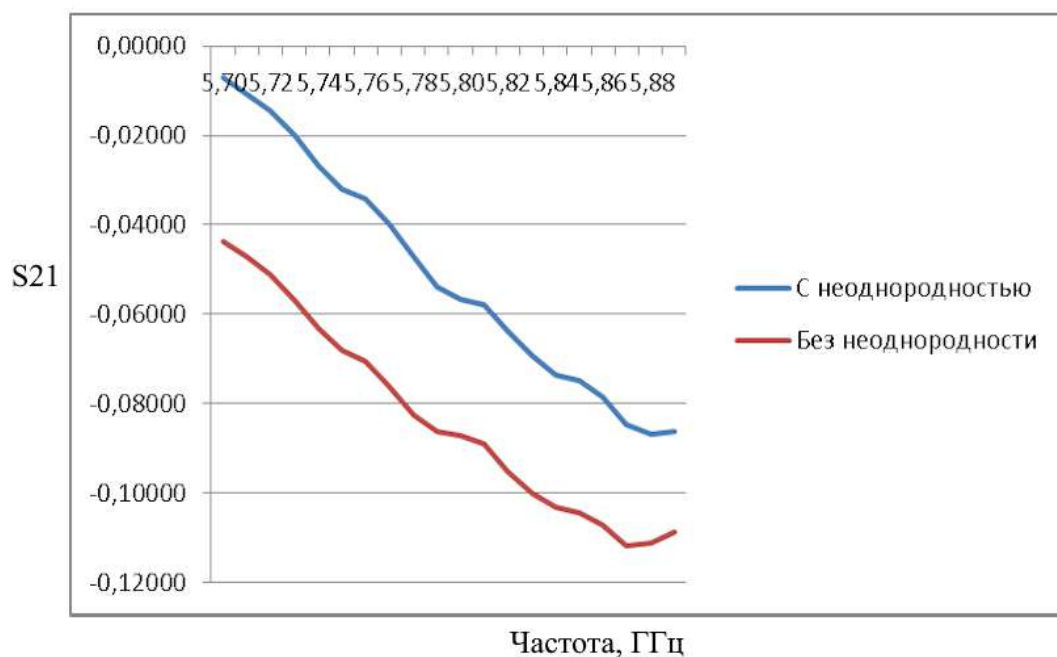


Рисунок 61 – Частотная зависимость мнимой части коэффициента прохождения S_{21} для объекта полусферической формы с неоднородностью и без неоднородности с WR-137

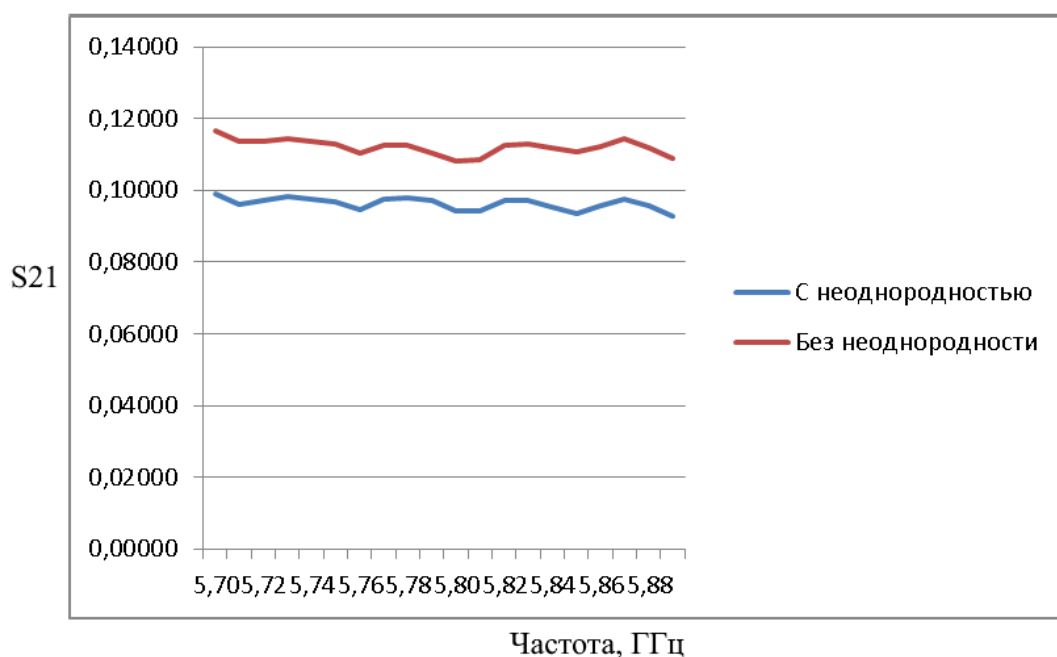


Рисунок 62 – Частотная зависимость модуля коэффициента прохождения S21 для объекта полусферической формы с неоднородностью и без неоднородности с WR-137

Графики показывают, что наличие неоднородности также существенно влияет на значение параметра S21. На рисунках 63–65 представлены результаты измерения коэффициента прохождения S21 при наличии цилиндрического объекта с неоднородностью и без нее. Графики показывают, что наличие неоднородности также существенно влияет на значение параметра S21.

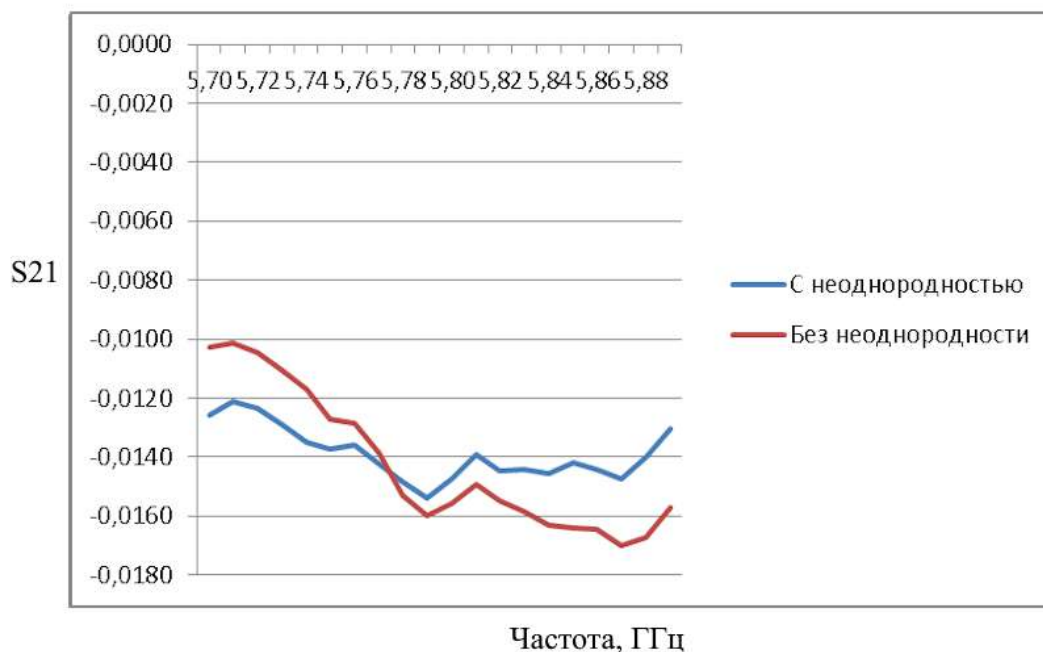


Рисунок 63 – Частотная зависимость вещественной части коэффициента прохождения S21 для цилиндрического объекта с неоднородностью и без неоднородности с WR-137

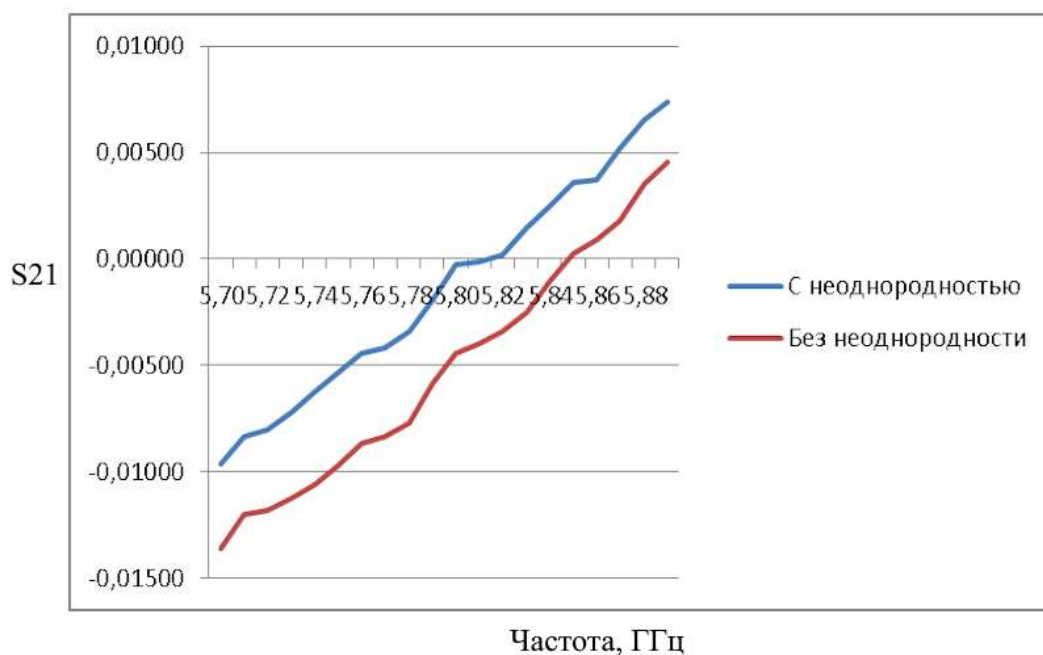


Рисунок 64 – Частотная зависимость мнимой части коэффициента прохождения S21 для цилиндрического объекта с неоднородностью и без неоднородности с WR-137

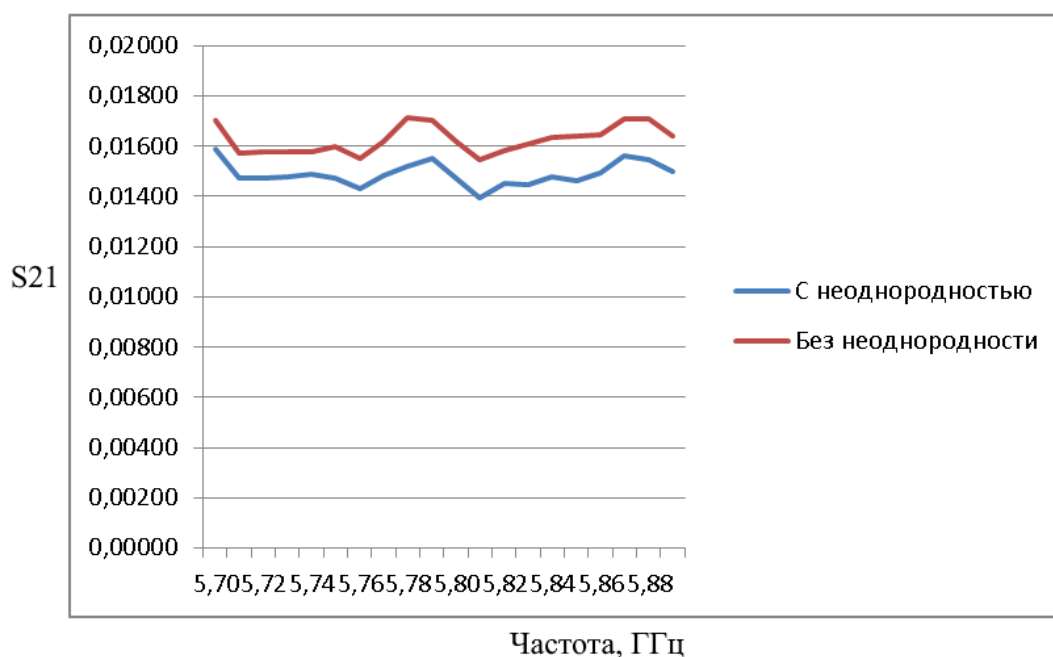


Рисунок 65 – Частотная зависимость модуля коэффициента прохождения S21 для цилиндрического объекта с неоднородностью и без неоднородности с WR-137

Сравнивая графики модуля коэффициента S21, полученные для объектов с неоднородностью и без нее, была выявлена стабильная разница, превышающая 20 % для первого образца и 10 % для второго образца в диапазоне частот (5,7–5,9 ГГц). Это свидетельствует о значительном влиянии неоднородности на изменение электромагнитной волны.

На рисунках 66–71 приведены результаты измерений при повороте волновода 2 на 60 градусов.

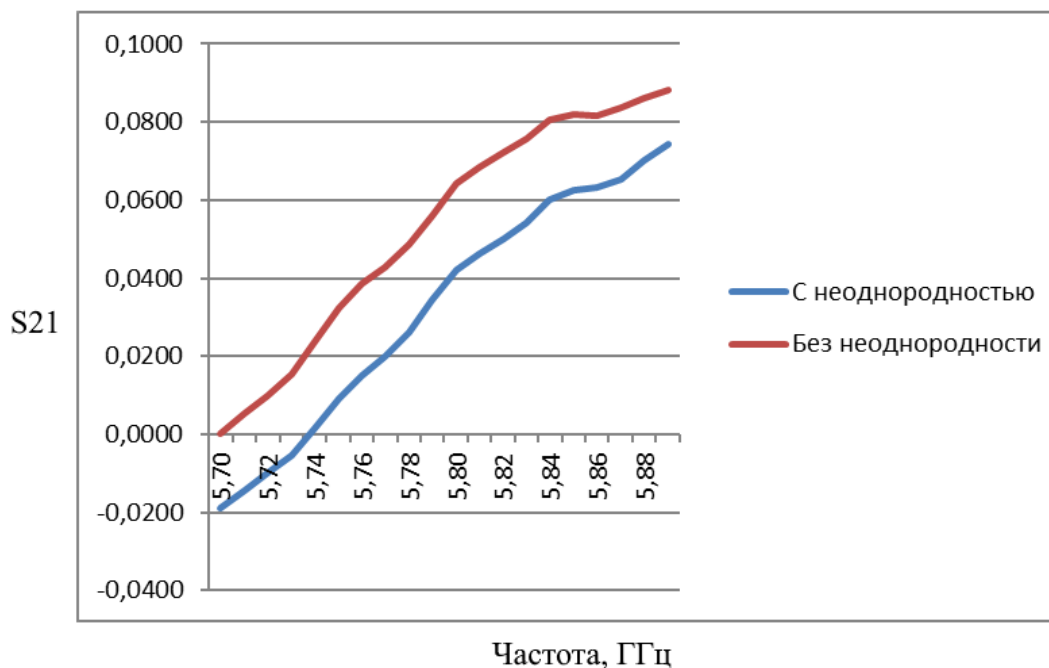


Рисунок 66 – Частотная зависимость вещественной части коэффициента прохождения S_{21} для объекта полусферической формы с неоднородностью и без неоднородности с WR-137 при повороте волновода 2 на 60 градусов

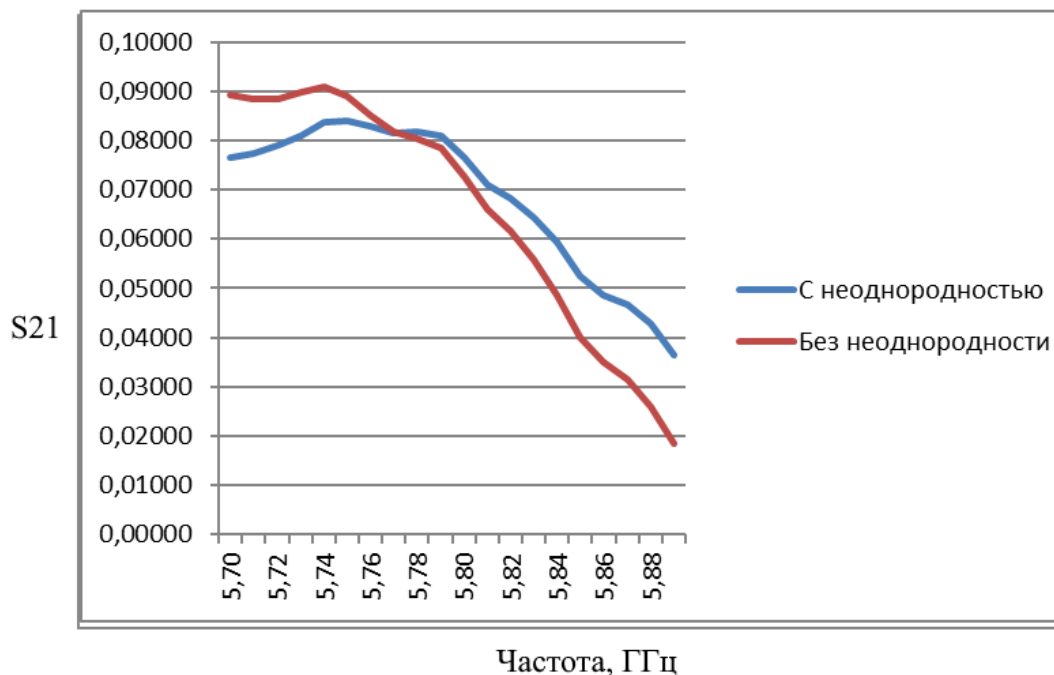


Рисунок 67 – Частотная зависимость мнимой части коэффициента прохождения S_{21} для объекта полусферической формы с неоднородностью и без неоднородности с WR-137 при повороте волновода 2 на 60 градусов

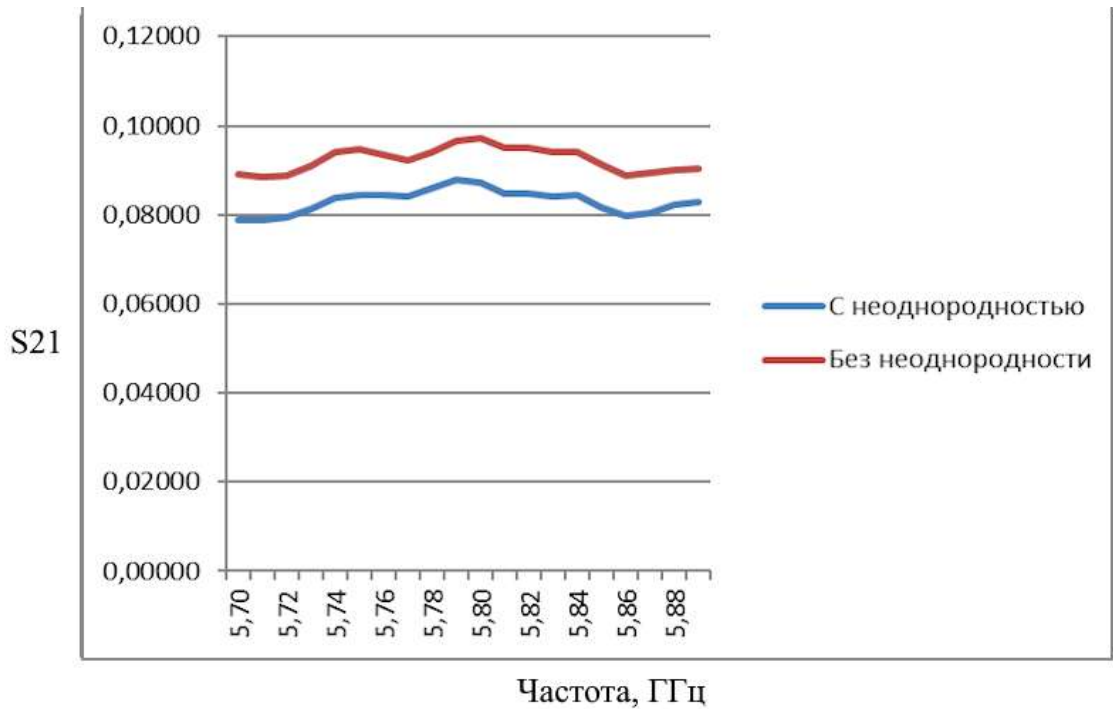


Рисунок 68 – Частотная зависимость модуля коэффициента прохождения S_{21} для объекта полусферической формы с неоднородностью и без неоднородности с WR-137 при повороте волновода 2 на 60 градусов

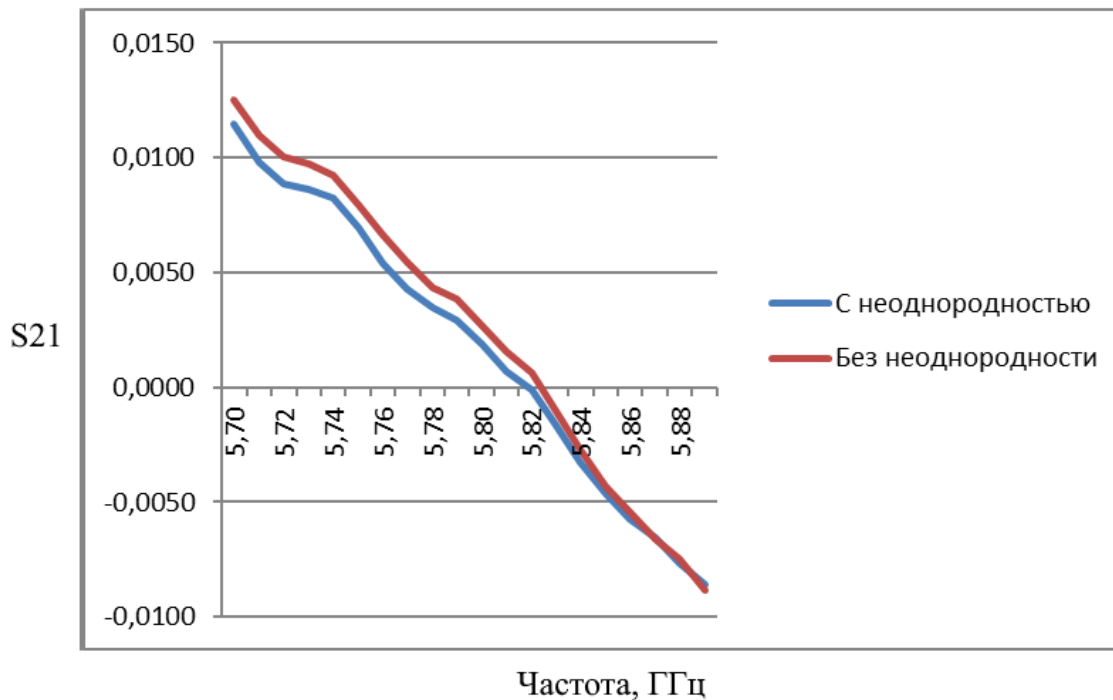


Рисунок 69 – Частотная зависимость вещественной части коэффициента прохождения S_{21} для цилиндрического объекта с неоднородностью и без неоднородности с WR-137 при повороте волновода 2 на 60 градусов

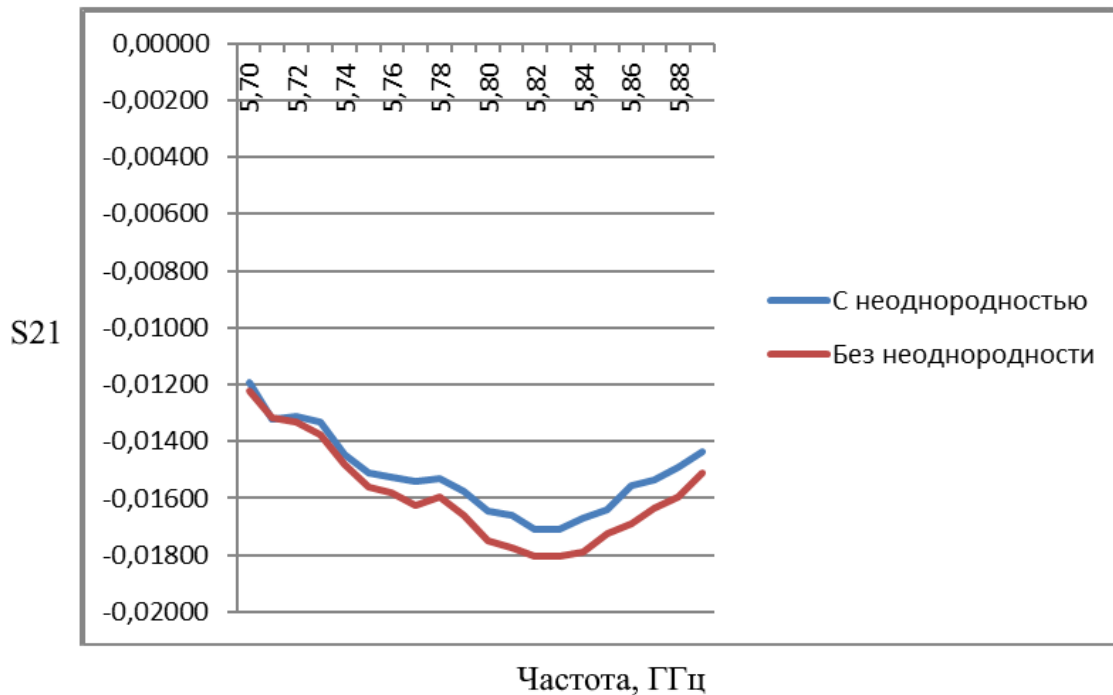


Рисунок 70 – Частотная зависимость мнимой части коэффициента прохождения S_{21} для цилиндрического объекта с неоднородностью и без неоднородности с WR-137 при повороте волновода 2 на 60 градусов

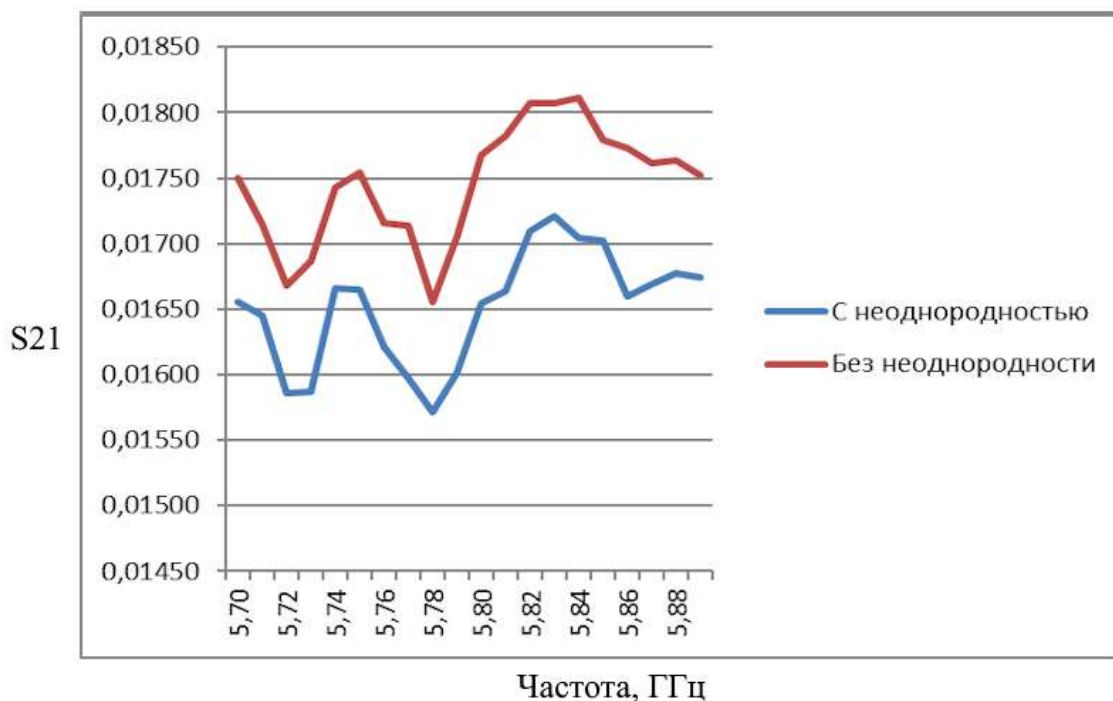


Рисунок 71 – Частотная зависимость модуля коэффициента прохождения S_{21} для цилиндрического объекта с неоднородностью и без неоднородности с WR-137 при повороте волновода 2 на 60 градусов

Сравнивая графики модуля коэффициента S_{21} , полученные для объектов с неоднородностью и без нее при повороте волновода 2, также выявлена стабильная разница, превышающая 20 % для первого образца и 5 % для второго образца в рассматриваемом диапазоне частот.

4.7. Сравнение результатов натурных измерений с результатами математического моделирования

Для верификации предложенной модели, приведена таблица 5, содержащая сравнительный анализ экспериментальных и расчетных значений (полученных при помощи пакета COMSOL) для модулей S_{11} и S_{21} . При этом все параметры расстояний, размеров волноводов в моделировании были заданы в строгом соответствии с физической установкой.

При помощи программного пакета COMSOL, проведем сравнение результатов расчетов в пакете COMSOL и результатов эксперимента. Данные с ВАЦ имеют вид, показанный на рисунках 72–73.

Таблица 5 – Сравнение модулей S_{11} и S_{21} для расчетных данных и измеренных значений

Частота	$ S_{11} $ Модель	$ S_{21} $ Модель	$ S_{11} $ Эксперимент	$ S_{21} $ Эксперимент
5,7 ГГц	-8,95 dB	-20,5 dB	-9,3 dB	-20,8 dB
5,8 ГГц	-9,82 dB	-20,42 dB	-10,1 dB	-20,6 dB
5,9 ГГц	-10,9 dB	-20,4 dB	-11,08 dB	-20,5 dB

Различия в коэффициентах S_{11} и S_{21} , полученные с помощью математического моделирования и натурального эксперимента, составляют менее 3 % и 2 % соответственно. Сравнения позволяют сделать вывод о точности эксперимента и адекватности используемой модели.

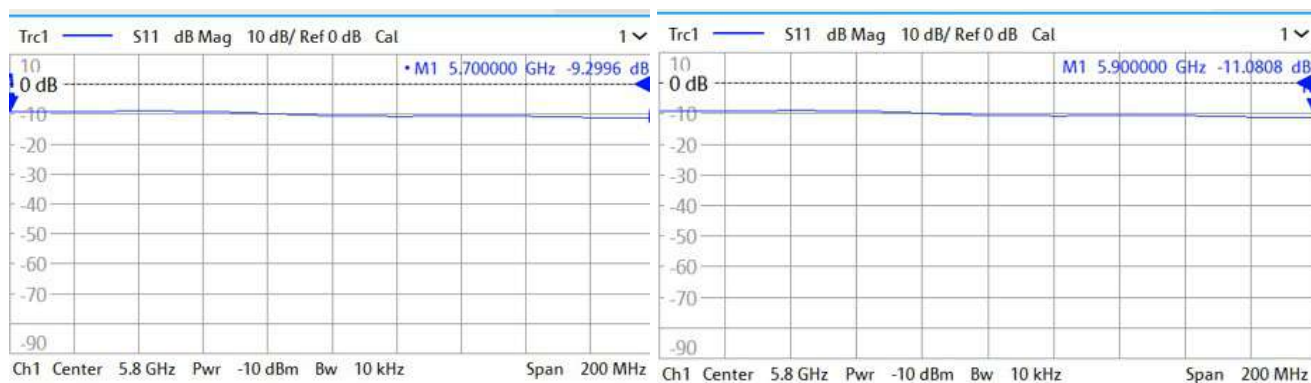


Рисунок 72 – Данные модуля коэффициента S_{11} , полученные с векторного анализатора в диапазоне 5,7–5,9 ГГц. Маркеры установлены на частотах 5,7 и 5,9 ГГц соответственно

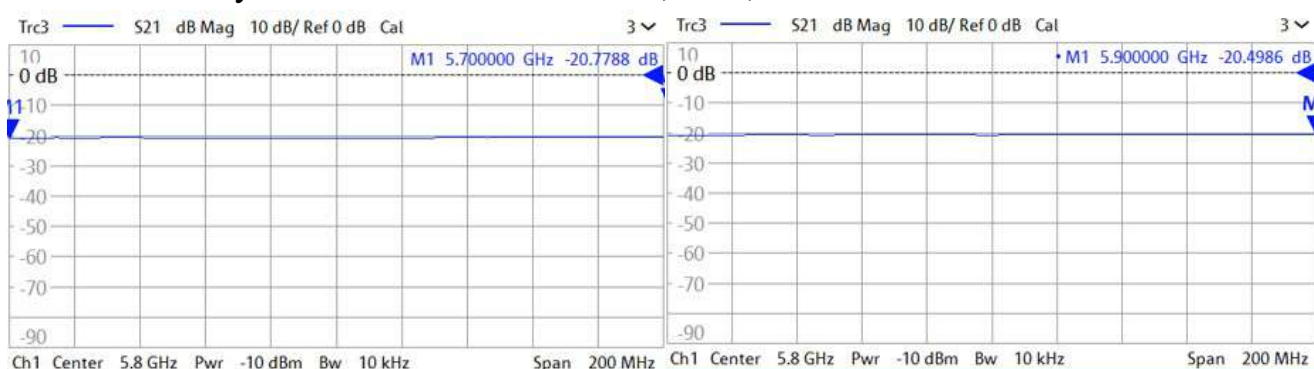


Рисунок 73 – Данные модуля коэффициента S_{21} , полученные с векторного анализатора в диапазоне 5,7–5,9 ГГц. Маркеры установлены на частотах 5,7 и 5,9 ГГц соответственно

На рисунке 74 представлен результат обнаружения неоднородности, полученный с использованием результатов натурного эксперимента и разработанным программным комплексом.

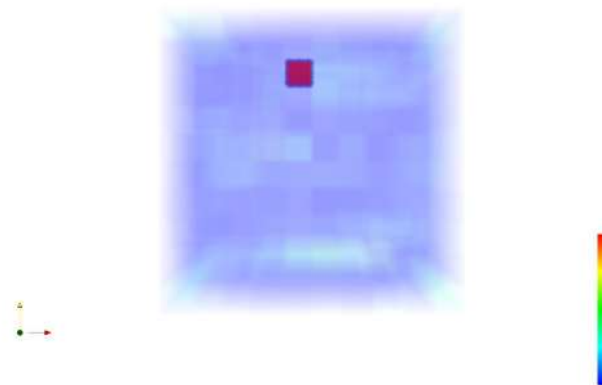
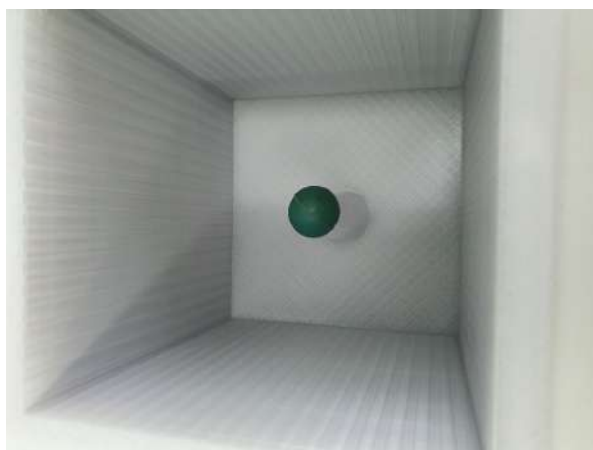


Рисунок 74 – Пример обнаружения неоднородности с помощью измерительной установки СВЧ-томографии

Основные результаты и выводы по главе 4

В главе описан разработанный программный комплекс, который позволяет визуализировать и интерпретировать числовые данные, полученные при моделировании рассеяния электромагнитных волн. В главе рассматривается как прямое моделирование рассеяния (вычисление электромагнитного поля), так и решение обратной задачи (восстановление параметров объекта рассеянному электромагнитному полю). Показано, как численные результаты меняются в зависимости от различных параметров рассеивающих объектов (размер, форма, материал). Получены свидетельства о регистрации программы для ЭВМ [113–116].

В главе представлены как результаты, полученные предложенными в диссертации методами, так и сравнение результатов расчетов, полученных с помощью COMSOL, а также сравнение с экспериментальными данными.

В диссертации предложена модель наблюдения, на основе которой создан макет измерительной установки, для проверки результатов математического моделирования с помощью натурных экспериментов.

В ПРИЛОЖЕНИИ В подробно описывается, как были проведены экспериментальные измерения, а также:

- Конструкция экспериментальной установки.
- Методика проведения измерений.
- Методы обработки полученных экспериментальных данных.
- Сравнение данных.

Также в ПРИЛОЖЕНИИ В описан макет измерительной установки для получения выходных данных – значений ближнего поля, рассеянного объектом. На основании сравнения численных и экспериментальных результатов делается заключение о том, насколько хорошо разработанный численный метод моделирует реальные физические процессы. Автоматизация измерений достигается благодаря использованию SCPI команд. Описывается, как

разработанный программный комплекс отправляет SCPI команды на измерительное оборудование для автоматической настройки параметров измерения, запуска измерений и сбора результатов. Это позволяет проводить большое количество измерений с различными параметрами рассеивающих объектов и их конфигурациями, что необходимо для всестороннего анализа и проверки численных результатов.

Программный комплекс, реализующий численные методы и разработанные на их основе вычислительные алгоритмы позволяет решать прямые линейные и нелинейные задачи дифракции, векторную обратную задачу для определения геометрических и электродинамических параметров неоднородностей в диэлектрическом теле.

Положительные результаты экспериментального исследования показывают возможность определения неоднородности в объектах методом микроволновой томографии с помощью данных, полученных на макете измерительной установки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации на основании выполненных автором исследований решена **научная задача** обнаружения неоднородностей в диэлектрических телах по данным измерения ближнего поля, основанная на решении обратной задачи:

1. Выбраны двумерные и трехмерные математические модели с кусочно-непрерывной или кусочно-постоянной функциями диэлектрической проницаемости объектов и определены неоднородности в двумерных и трехмерных диэлектрических телах с помощью решения задач дифракции волн на объекте, позволяющие идентифицировать дефекты и неоднородности.

2. Разработан и применен двухшаговый метод для решения обратных задач дифракции волны на неоднородном полушаре с целью определения неоднородностей в диэлектрическом теле, что позволило выявлять неоднородности малого размера (порядка 1 см) по результатам измерений ближнего поля.

3. Разработан итерационный метод решения объемного интегрального уравнения для решения нелинейной задачи дифракции на неоднородных объектах, что позволило оценить влияния нелинейности на процесс дифракции волн. Модифицирован метод коллокации для решения интегрального уравнения, отличающийся новыми базисными функциями.

4. Разработаны вычислительные алгоритмы, реализующие численные методы решения прямой нелинейной и векторной обратной задач дифракции. Алгоритмы позволяют определять неоднородности, расположенные внутри диэлектрического объекта при внесении шума во входные данные на уровне 10 %.

5. На основе вычислительных алгоритмов создан программный комплекс на языках C++ и Python для решения прямых линейной и нелинейной задач

дифракции и векторной обратной задачи для определения геометрических и электродинамических параметров неоднородностей в диэлектрическом теле.

6. В диссертации предложена модель наблюдения, на основе которой создан макет измерительной установки, для проверки результатов математического моделирования с помощью натуральных экспериментов. По результатам сравнения данных получено обоснование возможности определения неоднородностей в диэлектрических объектах методом микроволновой томографии. Разница между коэффициентами S_{11} , полученными в результате математического моделирования и экспериментальных измерений, составляет менее 3 %. Для коэффициента S_{21} это различие не превышает 2 %. Сравнение коэффициентов прохождения измеренных данных для однородного объекта и объекта с неоднородностью показывает среднее различие между образцами более 10 %, что позволяет обнаружить неоднородность.

Практическая ценность подтверждена возможностью применения разработанного комплекса программ для диагностики неоднородностей материалов. В диссертации содержится решение научной задачи, имеющей существенное значение в области математического моделирования в электродинамике.

Перспективы использования и дальнейшего развития темы.

Разработанные комплексы программ могут применяться при решении задач медицинской диагностики, в неразрушающем контроле объектов и других областях математической физики и техники. Направлением для дальнейшей работы является развитие разработанных методов и измерительной установки для определения неоднородностей в диапазоне частот до 20 ГГц, который используется в неразрушающем контроле объектов меньшего размера.

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных и всероссийских научных конференциях [120–126].

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ВАЦ – векторный анализатор цепей;

ИУ – интегральное уравнение;

КТ – компьютерная томография;

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений

ОДП – относительная диэлектрическая проницаемость;

ПК – персональный компьютер;

ПО – программное обеспечение;

СВЧ – сверхвысокая частота;

РПМ – радиопоглощающий материал;

НК – неразрушающий контроль;

РМЖ – рак молочной железы;

УЗД – ультразвуковая дефектоскопия;

МРТ – магнитно-резонансная томография;

ЭМВ – электромагнитная волна;

SCPI – Standard Commands for Programmable Instruments;

РВНК – радиоволновой контроль;

MPI – Message Passing Interface;

PML – Perfectly Matched Layer;

ASCII – American Standard Code for Information Interchange;

IP – Internet Protocol;

GPB – General Purpose Interface Bus;

LAN – Local Area Network;

FDTD – Finite Difference Time Domain.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Breast cancer // World Health Organization. – URL: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/breast-cancer> (дата обращения: 01.05.2025).
2. Global Cancer Observatory // IARC. – URL: <https://gco.iarc.fr/en/> (дата обращения: 01.05.2025).
3. Каприн, А. Д. Состояние онкологической помощи населению России в 2020 году / А. Д. Каприн, В. В. Старинский, А. О. Шахзадова. – Москва : МНИОИ имени П.А. Герцена, 2021. – 239 с.
4. Каприн, А. Д. Злокачественные новообразования в России в 2021 году (заболеваемость и смертность) / под редакцией А. Д. Каприна, В. В. Старинского, Г. В. Петровой. – Москва : МНИОИ имени П. А. Герцена, 2022. – 252 с.
5. Каприн, А. Д. Злокачественные новообразования в России в 2017 году (заболеваемость и смертность) / под редакцией А. Д. Каприна, В. В. Старинского, А. О. Шахзадовой. – Москва : МНИОИ имени П. А. Герцена, 2018. – 250 с.
6. Taflove, A. Computational Electrodynamics : The Finite-Difference Time-Domain Method / A. Taflove, S. C. Hagness. – 3rd ed. – Boston : Artech House, 2005. – xxii, 1006 p.
7. Jin, J.-M. The Finite Element Method in Electromagnetics / J.-M. Jin. – 3rd ed. – Hoboken : Wiley, 2015. – 846 p.
8. Самохин, А. Б. Объемные сингулярные интегральные уравнения электродинамики / А. Б. Самохин. – Москва : ТЕХНОСФЕРА, 2021. – 217 с.
9. Смирнов, Ю. Г. Объемные сингулярные интегральные уравнения в задачах дифракции электромагнитных волн / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. – 178 с.
10. Неганов, В. А. Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики / В. А. Неганов. – Москва : САЙНС-ПРЕСС, 2008. – 431 с.

11. Nédélec, J.-C. Acoustic and Electromagnetic Equations : Integral Representations for Harmonic Problems / J.-C. Nédélec. – New York : Springer, 2001. – ix, 316 p.
12. Нефёдов, Е. И. Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах / Е. И. Нефёдов, А. Т. Фиялковский. – Москва : Наука, 1972. – 203
13. Рамм, А. Г. Многомерные обратные задачи рассеяния / А. Г. Рамм ; пер. с англ. – Москва : Мир, 1994. – 495 с.
14. Еремин, Ю. А. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции / Ю. А. Еремин, А. Г. Свешников. – Москва : Изд-во МГУ, 1992. – 182 с.
15. Ваганов, Р. Б. Основы теории дифракции / Р. Б. Ваганов, Б. З. Каценеленбаум. – Москва : Наука, 1982. – 272 с.
16. Вычислительные методы в электродинамике : пер. с англ. / под ред. Р. Митры. – Москва : Мир, 1977. – 485 с.
17. Harrington, R. F. Field Computation by Moment Methods / R. F. Harrington. – New York : Macmillan, 1968. – ix, 229 p.
18. Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский. – Москва : Наука, 1980. – 286 с.
19. Лаврентьев, М. М. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений / М. М. Лаврентьев, В. Г. Васильев, В. Г. Романов. – Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1969. – 66 с.
20. Лаврентьев, М. М. Обратные задачи математической физики: сборник научных трудов / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск : ВЦ СО АН СССР, Сибирское отделение, 1985. – 153 с.
21. Лаврентьев, М. М. Одномерные обратные задачи математической физики / М. М. Лаврентьев, К. Г. Резницкая, В. Г. Яхно. – Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1982. – 88 с.

22. Тихонов, А. Н. Об устойчивости обратных задач / А. Н. Тихонов // Доклады АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.
23. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – Москва : Наука, 1986. – 287 с.
24. Тихонов, А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А. Н. Тихонов // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 3. – С. 501–504.
25. Тихонов, А. Н. Математические задачи компьютерной томографии / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, А. А. Тимонов. – Москва : Наука, 1987. – 160 с.
26. Алексеев, А. С. Некоторые обратные задачи теории распространения волн / А. С. Алексеев // Известия АН СССР. Серия Геофизическая. – 1962. – № 11. – С. 1514–1531.
27. Алексеев, А. С. Обратные задачи и интерпретация геофизических наблюдений (Математические проблемы геофизики): сборник научных трудов / А. С. Алексеев. Новосибирск : ВЦ СО АН СССР, – 1983. – 97 с.
28. Романов, В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений / В. Г. Романов. – Новосибирск : НГУ, 1973. – 252 с.
29. Романов, В. Г. Обратные задачи математической физики / В. Г. Романов. – Москва : Наука, 1984. – 264 с.
30. Амбарцумян, В. А. Обратные задачи в естествознании / В. А. Амбарцумян. – Ереван: Издательство АН АрмССР, 1983. – 59 с.
31. Ambarzumian, V. A. Über eine Frage der Eigenwerttheorie / V. A. Ambarzumian // Zeitschrift für Physik. – 1929. – Vol. 53. – P. 690–695.
32. Borg, G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgabe / G. Borg // Acta Math. – 1946. – Vol. 78, № 1. – P. 1–96.
33. Гельфанд, И. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции / И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1951. – Т. 15, № 4. – С. 309–360.

34. Левитан, Б. М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля / Б. М. Левитан. – Москва : Наука, 1984. – 240 с.
35. Крейн, М. Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи / М. Г. Крейн // Доклады АН СССР. – 1954. – Т. 94, № 6. – С. 767–770.
36. Аниконов Ю. Е., Степанов В. Н., Геометрия выпуклых поверхностей и обратные задачи теории рассеяния / Ю. Е. Аниконов // Сибирский математический журнал. – 1994. – Т. 35, №5. – С. 955–973.
37. Баев, А. В. О решении обратной задачи для волнового уравнения с помощью регуляризирующего алгоритма / А. В. Баев // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 3. – С. 585–587.
38. Белишев, М. И. Динамические обратные задачи теории волн / М. И. Белишев, А. С. Благовещенский. – Санкт-Петербург : 1999. – 266 с.
39. Бухгейм, А. Л. Введение в теорию обратных задач / А. Л. Бухгейм. – Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1988. – 181 с.
40. Кабанихин, С. И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений / С. И. Кабанихин. – Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1988. – 166 с.
41. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов высших учебных заведений / С. И. Кабанихин. – Новосибирск : Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
42. Корнилов, В. С. Некоторые обратные задачи для волновых уравнений / В. С. Корнилов. – Новосибирск : Издательство НГТУ, 2000. – 252 с.
43. Клибанов, М. В. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений / М. В. Клибанов // Математические заметки. – 1981. – Т. 30, № 2. – С. 203–210.
44. Ватульян, А. О. О восстановлении формы приповерхностного дефекта в полупространстве / А. О. Ватульян, С. А. Коренский // Доклады РАН. – 1995. – Т. 334, № 6. – С. 753–755.

45. Боев, Н. В. Восстановление контура препятствия по характеристикам рассеянного акустического поля в коротковолновой области / Н. В. Боев, А. О. Ватульян, М. А. Сумбатьян // Акустический журнал – 1997. –Т. 43, № 4. – С. 458–462.
46. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – Москва : Наука, 1974. – 332 с.
47. Георгиевский, В. Б. Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров: справочник / В. Б. Георгиевский. – Киев : Техника, 1971. – 328 с.
48. Мирзаджанзаде, А. Х. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность / А. Х. Мирзаджанзаде, М. М. Хасанов, Р. Н. Бахтизин. – Москва ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 368 с.
49. Beilina, L. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems / L. Beilina, M. V. Klibanov. – New York : Springer, 2012. – 407 p.
50. Новиков, Р. Г. Многомерная обратная спектральная задача для уравнения $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$ / Р. Г. Новиков // Функциональный анализ и его приложения. – 1988. – Т. 22, № 4. – С. 11–22.
51. Colton, D. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory / D. Colton, R. Kress. – Berlin : Springer-Verlag, 1992. – x, 305 p.
52. ГОСТ Р 56542-2015. Контроль неразрушающий. Классификация видов (методов). – Введен 2016-01-01. – Москва : Стандартиформ, 2015.
53. Hassan, A. M. Review of Electromagnetic Techniques for Breast Cancer Detection / A. M. Hassan, M. El-Shenawee // IEEE Reviews in Biomedical Engineering. – 2011. – Vol. 4. – P. 83–96.
54. El-Shenawee, M. Electromagnetic Imaging for Breast Cancer Research / M. El-Shenawee // BioWireleSS 2011 IEEE. – 2011. – P. 55–58.

55. Paulsen, K. D. Alternative Breast Imaging: Four Model-Based Approaches. / K. D. Paulsen, P. M. Meaney, L. C. Gilman. – Boston, MA: Springer Science + Business Media, Inc, 2005. – 254 p.
56. Fedeli, A. A Tomograph Prototype for Quantitative Microwave Imaging: Preliminary Experimental Results / A. A Fedeli // J. Imaging. – 2018. – Vol. 4, № 12. – P. 139.
57. Tobon Vasquez, J. A. A Prototype Microwave System for 3D Brain Stroke Imaging / J. A. Tobon Vasquez // Sensors. – 2020. – Vol. 20, № 9. – P. 2607.
58. Casu, M. R. A COTS-Based Microwave Imaging System for Breast-Cancer Detection / M. R. Casu // IEEE Trans. Biomed. Circuits Syst. – 2017. – Vol. 11, № 4. – P. 804–814.
59. Bulyshev, A. E. Three dimensional microwave tomography. Theory and computer experiments in scalar approximation / A. E. Bulyshev, S. Y. Semenov, A. E. Souvorov, R. H. Svenson, A. G. Nazarov, Y. E. Sizov, G. P. Tatsis // Inverse Problems. – 2000. – Vol. 16, № 4. – P. 863–875.
60. Bulyshev, A. E. Three-dimensional Vector Microwave Tomography. Theory and Computational experiments / A. E. Bulyshev, A. E. Souvorov, S. Y. Semenov, V. G. Posukh, Y. E. Sizov // Inverse Problems. – 2004. – Vol. 20, №4. – P. 1239.
61. Semenov, S. Y. Spatial resolution of microwave tomography for detection of the myocardial ischemia and infarction. Experimental study on two-dimensional models / S. Y. Semenov, R. H. Svenson, A. E. Bulyshev, A. E. Souvorov, A. G. Nazarov, Y. E. Sizov, V. G. Posukh, A. V. Pavlovsky, P. N. Repin, G. P. Tatsis // IEEE Trans MTT. – 2000. – Vol. 48, № 4. – P. 538–544.
62. Semenov, S. Y. Three-dimensional microwave tomography: initial experimental imaging of animals / S. Y. Semenov, R. H. Svenson, A. E. Boulyshev, A. E. Souvorov, A. G. Nazarov, Y. E. Sizov, V. G. Posukh, A. Pavlovsky, P. N. Repin, A. N. Starostin, B. Voinov, G. P. Tatsis, V. Y. Baranov // IEEE Trans BME. – 2002. – Vol. 49, № 1. – P. 55–63.

63. Semenov, S. Y. Microwave tomography for detection/imaging of myocardial infarction. 1. Excised canine hearts / S. Y. Semenov, A. E. Bulyshev, V. G. Posukh, Y. E. Sizov, T. C. Williams, A. E. Souvorov // *Annals of Biomedical Engineering*. – 2003. – Vol. 31. – P. 262–270.
64. Bulyshev, A. E. Computational modeling of the three-dimensional microwave tomography of the breast cancer / A. E. Bulyshev, S. Y. Semenov, A. E. Souvorov, R. H. Svenson, G. P. Tatsis. // *IEEE Trans. BME*. – 2001. Vol. 48, № 9. – P. 1053–1056.
65. Garvin, J. Microwave imaging for watermelon maturity determination. / J. Garvin, F. Abushakra, Z. Choffin, B. Shiver, Y. Gan, L. Kong, N. Jeong. // *Current Research in Food Science*. – 2022. – Vol. 6. – № 5.
66. Tobon Vasquez, J. A. Noninvasive Inline Food Inspection via Microwave Imaging Technology: An Application Example in the Food Industry. / J. A. Tobon Vasquez, R. Scapaticci, G. Turvani, M. Ricci, L. Farina, A. Litman, M. R. Casu, L. Crocco, F. Vipiana. // *IEEE Antennas and Propagation Magazine*. – Vol.62. – P. 18–32.
67. Rub, T. Nonlinear Microwave Imaging for Breast-Cancer Screening Using Gauss-Newton's Method and the CGLS Inversion Algorithm / T. Rub, P. Meany, P. Mencke, K. Palsen. // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – Vol. 55. – № 8. – P. 2331.
68. Scapaticci, R. Design and Numerical Characterization of a Low-Complexity Microwave Device for Brain Stroke Monitoring / R. Scapaticci, J. A. Tobon, G. Bellizzi, F. Vipiana, L. Crocco // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2018. – Vol. 66, № 12. – P. 7328–7338.
69. Jofre, L. Medical imaging with a microwave tomographic scanner. / L. Jofre, M. S. Hawley, A. Broquetas, E. de los Reyes, M. Ferrando, A. R. Elias-Fuste // *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. – 1990. – Vol. 37, № 3. – P. 303–312.

70. Semenov, S. Y. Microwave tomography for brain imaging: Feasibility assessment for stroke detection / S. Y. Semenov, D. R. Corfield // *Int. J. Antennas Propag.*, Vol. 2008.

71. Semenov, S. Y. Electromagnetic tomography for brain imaging and stroke diagnostics: Progress towards clinical application / S. Y. Semenov, A. Hamidipour, T. Henriksson [et al.] // *Emerging Electromagnetic Technologies for Brain Diseases Diagnostics, Monitoring and Therapy* / ed. by L. Crocco, I. Karanasiou, M. L. James, R. C. Conceição. – Cham : Springer, 2018. – P. 59–84.

72. Sommerfeld, A. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung / A. Sommerfeld // *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. – 1912. – Vol. 21. – P. 309–353.

73. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.

74. Medvedik, M. Yu. The two-step method for determining a piecewise continuous refractive index of a 2D scatterer by near field measurements / M. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // *Inverse Problems in Science and Engineering*. – 2020. – Vol. 28, № 3. – P. 427–447.

75. Lapich, A. O. Algorithm of the search for inhomogeneities in the inverse nonlinear diffraction problems / A. O. Lapich, M. Yu. Medvedik // *Technical Physics*. – 2024. – Vol. 69, № 9. – P. 2454–2460.

76. Evstigneev, R. O. Inverse problem of determining parameters of inhomogeneity of a body from acoustic field measurements / R. O. Evstigneev, M. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. – 2016. – Vol. 56, №3. – P. 490–497.

77. Medvedik, M. Yu. Solution of integral equations by the subhierarchy method for generalized computational grids / M. Yu. Medvedik // *Mathematical models and computer simulations*. – 2015. – Vol. 7, № 6. – P. 570–580.

78. Medvedik M. Yu. A subhierarchy method for solving the lippmann-schwinger integral equation on bodies of complex shapes / M. Yu. Medvedik // Journal of communications technology and electronics. – 2012. – Vol. 57. – P. 158–163.

79. Лапич, А. О. Решение прямой и обратной задач дифракции на плоских объектах с различными видами нелинейности поля / А. О. Лапич. // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2024. – № 3. – С. 138–146.

80. Лапич, А. О. Решение скалярной двумерной нелинейной задачи дифракции на объектах произвольной формы / А. О. Лапич, М. Ю. Медведик // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2023. – № 2. – С. 167–177.

81. Лапич, А. О. Метод обобщенных и объединенных расчетных сеток для восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля / А. О. Лапич, М. Ю. Медведик // Математическое моделирование. – 2024. – № 4. – С. 24–36.

82. Lippmann, B. A. Variational Principles for Scattering Processes. I / B. A. Lippmann, J. Schwinger // Phys. Rev. Lett. – 1950. – Vol. 79, №. 3. – P. 469–480.

83. Ахмедиев Н. Н. Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки / Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – Москва: Физматлит, 2003. – 304 с.

84. Colton D. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory / D. Colton, R. Kress. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. – 2013. – 419 p.

85. Smirnov, Yu. G. On the volume singular integro-differential equation approach for the electromagnetic diffraction problem / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak, D. V. Valovik // Applicable Analysis. – 2017. – Vol. 96, № 2. – P. 173–189.

86. Smirnov, Yu. G. Existence and uniqueness theorems in electromagnetic diffraction on systems of lossless dielectrics and perfectly conducting screens / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Applicable Analysis. – 2017. – Vol. 96, № 8. – P. 1326–1341.

87. Beilina L. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems / L. Beilina, M. Klibanov. – New York : Springer. – 2012. – 419 p.
88. Isakov H. Inverse Problems for Partial Differential Equations / H. Isakov. – New York : Springer. – 2005. – 359 p.
89. Romanov V. G. Inverse Problems of Mathematical Physics / V. G. Romanov. – The Netherlands: VNU. – 1986. – 246 p.
90. Bakushinsky A. B. Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems / A. B. Bakushinsky, M. Yu. Kokurin. – New York : Springer. – 2004. – 298 p.
91. Colton, D. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory / D. Colton, R. Kress. – Cham : Springer International Publishing. – 2019. – 518 p.
92. Smirnov, Y. G. Two-Step Method for Solving Inverse Problem of Diffraction by an Inhomogenous Body / Yu. G. Smirnov, M. Yu. Medvedik, A. A. Tsupak // Nonlinear and Inverse Problems in Electromagnetics. – 2018. Vol. 243. – P. 83–92.
93. Lapich, A. O. Solving the Direct and Inverse Diffraction Problems on Flat Objects with Different Types of Field Nonlinearity / A. O. Lapich // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 2025. – Vol. 140, № 4. – P. 77–81.
94. Lapich A. O. Measuring a Near Electromagnetic Field and Restoring the Parameters of Inhomogeneities in a Dielectric Body / A. O. Lapich, Yu. G. Smirnov // Technical Physics Letters. – 2025. – Vol. 51, №. 3. – P. 115–119.
95. Lapich, A. O. Microwave Tomography Method for Solving the Inverse Problem on Cylindrical Bodies / A. O. Lapich, M. Yu. Medvedik // Technical Physics Letters. – 2024. – Vol. 50. – P. 360–364.
96. Lapich, A. O. Solution of a scalar two-dimensional nonlinear problem of diffraction on objects of arbitrary shape / A. O. Lapich, M. Yu. Medvedik // Technical Physics Letters. – 2024. – Vol. 50. – P. 6–12.
97. Лапич, А. О. Метод микроволновой томографии для решения обратной задачи на телах цилиндрической формы поля / А. О. Лапич, М. Ю. Медведик //

Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2024. – № 1. – С. 107–117.

98. Lapich, A. O. Method of generalized and combined computational grids for restoration of the parameters of inhomogeneities of a body based on the results of measurements of the electromagnetic field shape / A. O. Lapich, M. Yu. Medvedik // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2024. – Vol. 16, № 6. – P. 806–813.

99. Смирнов, Ю. Г. Решение электромагнитной обратной задачи восстановления неоднородности в диэлектрическом теле двухшаговым методом по измерениям ближнего поля / Ю. Г. Смирнов, А. О. Лапич // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2025. – Т. 28, № 1. – С. 33–38.

100. Lapich, A. O. Method for reconstruction the parameters of body inhomogeneities from the results of electromagnetic field measurements / A. O. Lapich, M. Yu. Medvedik // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Т. 45, № 10. – С. 4740–4747.

101. Smirnov, Y. Solution of the Vector Three-Dimensional Inverse Problem on an Inhomogeneous Dielectric Hemisphere Using a Two-Step Method / Y. Smirnov, E. Smolkin, M. Snegur // Computation. – 2024. – Vol. 12, № 11 – P. 213.

102. Smirnov, Y. G. Inverse vector problem of diffraction by inhomogeneous body with a piecewise smooth permittivity / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak, M. Yu. Medvedik // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2023. – Vol. 32, № 3. – P. 453–465.

103. Lapich A. O., Solution of a scalar two-dimensional nonlinear diffraction problem for objects of arbitrary shape. / A. O. Lapich, M. Yu. Medvedik // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2023. – Vol. 165, №. 2. – P.167–177.

104. Lapich A. O. Algorithm for searching inhomogeneities in inverse nonlinear diffraction problems / A. O. Lapich, M. Yu. Medvedik // Uchenye Zapiski Kazanskogo

Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2024. – Vol. 166, № 3. – P. 395–406.

105. Смирнов, Ю. Г. О решении нелинейного интегрального уравнения Липпмана–Швингера методом сжимающих отображений / Ю. Г. Смирнов, Д. А. Лабуткина // Известия высших учебных заведений Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2023. – № 3. – С. 3–10.

106. Оленев, Н. Н. Основы параллельного программирования в системе MPI / Н. Н. Оленев. – Москва : ВЦ РАН, 2005. – 77 с.

107. Антонов, А. С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI / А. С. Антонов. – Москва : Издательство МГУ, 2004. – 71 с.

108. Корнеев, В. Д. Параллельное программирование в MPI / В. Д. Корнеев. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. – 215 с.

109. Немнюгин, С. А. Параллельное программирование для многопроцессорных вычислительных систем / С. А. Немнюгин, О. Л. Стесик. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2002. – 397 с.

110. Хуторова, О. Г. Основы работы с библиотекой MPI: учебно-методическое пособие / О. Г. Хуторова. – Казань : Казанский университет, 2022. – 32 с.

111. Малявко, А. А. Параллельное программирование на основе технологий OpenMP, MPI, CUDA: учебное пособие / А.А. Малявко. – Новосибирск : НГТУ, 2015. – 116 с.

112. Земляная, Е. В. Введение в параллельное программирование на основе технологий MPI и OpenMP: учебное пособие / Е. В. Земляная, М. В. Башагин. – Дубна: Государственный университет «Дубна», 2023. – 101 с.

113. Медведик, М. Ю. Программа восстановления характеристик объемного тела, расположенного в свободном пространстве, с применением двухшагового метода / М. Ю. Медведик, А. О. Лапич. – Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024665656, 03.07.2024. – Заявка от 28.06.2024.

114. Лапич, А. О. Программа для решения обратной задачи дифракции на плоском объекте с нелинейной структурой / А. О. Лапич. – Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024665561, 03.07.2024. – Заявка от 28.06.2024.

115. Лапич, А. О. Программа для моделирования электромагнитного поля на объектах сложной геометрической формы / А. О. Лапич, М. Ю. Медведик. – Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2025687045, 08.10.2025. – Заявка от 16.09.2025.

116. Лапич, А. О. Программа восстановления диэлектрических параметров сферического тела методом микроволновой томографии / А. О. Лапич, М. Ю. Медведик. – Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024665656, 30.09.2025. – Заявка от 16.09.2025.

117. Векторный анализатор цепей Rohde&Schwarz ZNLE6. – URL: <https://www.protehnology.ru/vektorny-analizator-cepey-rohde-schwarz-znle6> (дата обращения: 23.01.2025).

118. Meaney, P. M. Electrical Characterization of Glycerin: Water Mixtures: Implications for Use as a Coupling Medium in Microwave Tomography / P. M. Meaney, C. J. Fox, S. D. Geimer, K. D. Paulsen // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2017. – Vol. 65, № 5. – P. 1471–1478.

119. Воскресенский, Д. И. Устройства СВЧ и антенны / Д. И. Воскресенский, В. Л. Гостюхин, В. М. Максимов, Л. И. Пономарев. – Москва : Радиотехника, 2006. – 376 с.

120. Медведик, М. Ю. Применение методов фильтрации в электромагнитной обратной задаче восстановления неоднородности в диэлектрическом теле по измерениям ближнего поля / Медведик М. Ю., А. В. Медведев, И. В. Елисеева, А. О. Лапич // В книге: VII научный форум телекоммуникации: Теория и технологии ТТТ-2024. Материалы XXI Международной научно-технической конференции (г. Самара, 6–8 ноября 2024

г.). – Самара: Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2024. – С. 119–120.

121. Лапич, А. О. Метод микроволновой томографии в задаче восстановления параметров неоднородностей объекта с помощью ближнего поля / А. О. Лапич, М. Ю. Медведик // В сборнике: Методы, средства и технологии получения и обработки измерительной информации ("Шляндинские чтения - 2024"). Материалы XVI Международной научно-технической конференции с элементами научной школы и конкурсом научно-исследовательских работ для студентов, аспирантов и молодых ученых (г. Пенза, 6–7 ноября 2024 г.). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2024. – С. 149–151.

122. Лапич, А. О. Задача диагностики рака молочной железы методами СВЧ-томографии / А. О. Лапич, М. Ю. Медведик // В сборнике: Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике. Сборник статей XXIV Международной научно-технической конференции (22–23 ноября 2024 г.). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2024. – С. 150–154.

123. Лапич, А. О. Задача восстановления характеристик неоднородного диэлектрического тела по результатам измерения электромагнитного поля / А. О. Лапич, М. Ю. Медведик // В сборнике: VI научный форум телекоммуникации: теория и технологии ТТТ-2023. материалы XX Международной научно-технической конференции (22–24 ноября 2023 г.). Казань: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева - КАИ», 2023. – С. 32–34.

124. Лапич, А. О. Задача дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом теле с нелинейностью в прямоугольном волноводе / А. О. Лапич, М. Ю. Медведик // В сборнике: VI научный форум телекоммуникации: теория и технологии ТТТ-2023. материалы XX Международной научно-технической конференции. (22–24 ноября 2023 г.).

Казань : федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева - КАИ» 2023. – С. 35–37.

125. Medvedik, M. An Effective Solution to the Problem of Searching for Inhomogeneities in Three-Dimensional Bodies Located in Free Space Based on the Results of Near-Field Measurements Using Parallel Calculations. / M. Medvedik, A. Lapich, O. Kondyrev // In: Voevodin, V., Antonov, A., Nikitenko, D. (eds) Supercomputing. RuSCDays 2025. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 16196. Springer, Cham. 2026. doi:10.1007/978-3-032-13127-0_2.

126. Medvedik, M. Microwave Tomography Method for Determining Inhomogeneities in the Inverse Diffraction Problem. / M. Medvedik, A. Lapich, O. Kondyrev // In: Voevodin, V., Antonov, A., Nikitenko, D. (eds) Supercomputing. RuSCDays 2024. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 15406. Springer, Cham. 2025. doi: 10.1007/978-3-031-78459-0_7.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

СВИДЕТЕЛЬСТВА О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**RU2024665656**

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):
2024665656
Дата регистрации: 03.07.2024
Номер и дата поступления заявки:
2024664879 28.06.2024
Дата публикации и номер бюллетеня:
03.07.2024 Бюл. № 7
Контактные реквизиты:
нет

Автор(ы):
Медведик Михаил Юрьевич (RU),
Лалич Андрей Олегович (RU)
Правообладатель(и):
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования "Пензенский государственный
университет" (RU)

Название программы для ЭВМ:

Программа восстановления характеристик объемного тела расположенного в свободном пространстве с применением двухшагового метода

Реферат:

Программный модуль предназначен для восстановления характеристик тела в свободном пространстве. В программе используется сведение краевой задачи к сингулярному интегральному уравнению. Результатами работы программы являются: численные решения обратной задачи определения неоднородностей в объекте, который находится в свободном пространстве. Выходными данными являются файлы xls и vtk. Вычислительный комплекс создан в рамках выполнения работ в рамках выполнения государственного задания на проведение НИР, регистрационный номер 124020200015-7. Тип ЭВМ: IBM PC-совмест. ПК на базе процессора Intel Core i7 и выше; ОС: Linux, Windows.

Язык программирования: C++

Объем программы для ЭВМ: 250 КБ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**RU2024665561**

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2024665561 Дата регистрации: 03.07.2024 Номер и дата поступления заявки: 2024664872 28.06.2024 Дата публикации и номер бюллетеня: 03.07.2024 Бюл. № 7	Автор(ы): Лапич Андрей Олегович (RU) Правообладатель(и): Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет" (RU)
--	--

Название программы для ЭВМ:
Программа для решения обратной задачи дифракции на плоском объекте с нелинейной структурой

Реферат:

Программа предназначена для восстановления характеристик плоского объекта с учетом различных параметров нелинейности поля. В программе используется сведение краевой задачи к сингулярному интегральному уравнению. В программе существует возможность выбора параметров нелинейности, точность решения. Результатами работы программы являются численные решения интегрального уравнения для исследуемого объекта. Выходными данными являются файлы xls и csv. Тип ЭВМ: IBM PC-совмест. ПК на базе процессора Intel Core i5 и выше; ОС: Linux, Windows.

Язык программирования:	C++
Объем программы для ЭВМ:	300 КБ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2025686225

**Программа восстановления диэлектрических
параметров сферического тела методом микроволновой
томографии**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"Пензенский государственный университет" (RU)*

Авторы: *Ланич Андрей Олегович (RU), Медведик Михаил
Юрьевич (RU)*



Заявка № 2025685376

Дата поступления 16 сентября 2025 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 30 сентября 2025 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

документ подписан электронной подписью
Сертификат субъекта: 3035642046/46/2025/024
Подпись: **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 01.01.2024 по 03.10.2026

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2025687045

**Программа для моделирования электромагнитного поля
на объектах сложной геометрической формы**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"Пензенский государственный университет" (RU)*

Авторы: *Липич Андрей Олегович (RU), Медведик Михаил
Юрьевич (RU)*



Заявка № 2025685265

Дата поступления 16 сентября 2025 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 08 октября 2025 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

документ подписан электронной подписью

Сертификат: 00025685265-00000000000000000000

Подпись: **Зубов Юрий Сергеевич**

Действителен с 01.10.2024 по 03.10.2025

Ю.С. Зубов

ПРИЛОЖЕНИЕ Б.

АКТЫ ВНЕДРЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
ФГБОУ ВО «Пензенский
государственный университет»
В.В. Механов
« 6 » Октября 2025 г.

АКТ



Об использовании результатов

Диссертационной работы Лапича Андрея Олеговича,
представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук

Настоящим актом удостоверяется, что результаты диссертационной работы Лапича Андрея Олеговича «Математическое моделирование и алгоритмы восстановления параметров неоднородных объектов по измерениям рассеянного электромагнитного поля», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, используются в учебном процессе при подготовке студентов, обучающихся в ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет».

Материалы диссертационной работы Лапича А.О., в том числе зарегистрированные программы для ЭВМ «Программа для решения обратной задачи дифракции на плоском объекте с нелинейной структурой» (Свидетельство № 2024665561, 03.07.2024), «Программа восстановления характеристик объемного тела расположенного в свободном пространстве с применением двухшагового метода» (Свидетельство № 2024665656, 03.07.2024), «Программа восстановления диэлектрических параметров сферического тела методом микроволновой томографии» (Свидетельство № 2025685376, 30.09.2025), «Программа для моделирования электромагнитного поля на объектах сложной геометрической формы» (Свидетельство № 2025687045, 08.10.2025), используются при изучении курсов «Спецсеминар», «Производственная практика: научно-исследовательская работа», «Математические основы численных методов», «Численные методы решения задач алгебры и анализа» студентами, обучающимися по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

Директор политехнического института

 Г.В. Козлов

Декан факультета вычислительной техники

 Л.Р. Фионова





МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ПГУ»)

ул. Красная, д. 40, г. Пенза, Россия, 440026
 Тел/факс: (841-2) 56-51-22, e-mail: snit@pnzgu.ru, <http://www.pnzgu.ru>
 ОКПО 02069042, ОГРН 1025801440620, ИНН/КПП 5837003736/583701001

СПРАВКА

об участии и выполнении научно-исследовательских работ

Выдана Лапичу Андрею Олеговичу и подтверждает, что он принимал участие в выполнении научно-исследовательских работах, реализуемых в ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет»:

1) НИР в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по теме: «Разработка технологии раннего обнаружения новообразований молочной железы на основе методов микроволновой томографии и биоимпедансной спектроскопии» (№ госрегистрации 124020200015-7, 2024-2025 гг.). Руководитель д.ф.-м.н. Смирнов Ю.Г.

2) НИР в рамках программы «Ректорские гранты для молодых ученых и аспирантов 2024» по теме: «Вычислительный алгоритм решения обратных задач для обнаружения неоднородных диэлектрических объектов» (приказ №244/о от 20.03.2024г.). Руководитель Лапич А.О.

Справка выдана для представления в диссертационный совет Д 24.2.357.03 Пензенского государственного университета при защите диссертационной работы Лапича Андрея Олеговича «Математическое моделирование и алгоритмы восстановления параметров неоднородных объектов по измерениям рассеянного электромагнитного поля», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки).

Проректор по НР и ИД



С.М. Васин

03.10.2025



УТВЕРЖДАЮ
Директор ООО «Ромб»

М.В. Щёголев

« 03 »

сентября

2025 г.

М.П.



АКТ

об использовании результатов
диссертационной работы Лапича Андрея Олеговича
представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук

Настоящим актом удостоверяется, что результаты диссертационной работы Лапича Андрея Олеговича «Математическое моделирование и алгоритмы восстановления параметров неоднородных объектов по измерениям рассеянного электромагнитного поля», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» применялись на производственном предприятии при проверке диэлектрических комплектующих на предмет наличия дефектов и неоднородностей.

Комиссия пришла к выводу, что полученные научные результаты имеют высокую эффективность в научно-техническом плане и инвестиционную привлекательность.

ПРИЛОЖЕНИЕ В.**ОПИСАНИЕ МАКЕТА ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ И ОБЪЕКТОВ
ИССЛЕДОВАНИЯ**

В данном приложении представлено описание макета измерительной установки, предназначенного для получения входных данных для решения обратной задачи (значений рассеянного поля) с помощью измерения S-параметров на векторном анализаторе цепей (ВАЦ). Установка позволяет исследовать объект, расположенный между двумя волноводами.

Измерительная установка (рисунки В.1–В.3) состоит из двух прямоугольных волноводов (1 и 2 на рисунке В.2), между которыми в области ближней зоны располагался исследуемый образец с неоднородностью внутри него (3 на рисунке В.2). Измерения проводились с помощью двухпортового векторного анализатора цепей Rohde&Schwarz (4 на рисунке В.2) и персонального компьютера, в частотном диапазоне 5–6 ГГц. Полученные данные обрабатывались на персональном компьютере (5 на рисунке В.2).

Получение большого количества измерений принципиально важно для достижения достаточной точности решения обратной задачи. Как показывают эксперименты, достаточная точность может быть достигнута при количестве измерений больше 300. Поэтому конструкция установки позволяет изменять положение подвижного волновода 2 (волновод 1 неподвижен) с шагом в 5° относительно центра, а также двигать его по высоте.



Рисунок В.1 – Измерительная установка с волноводами

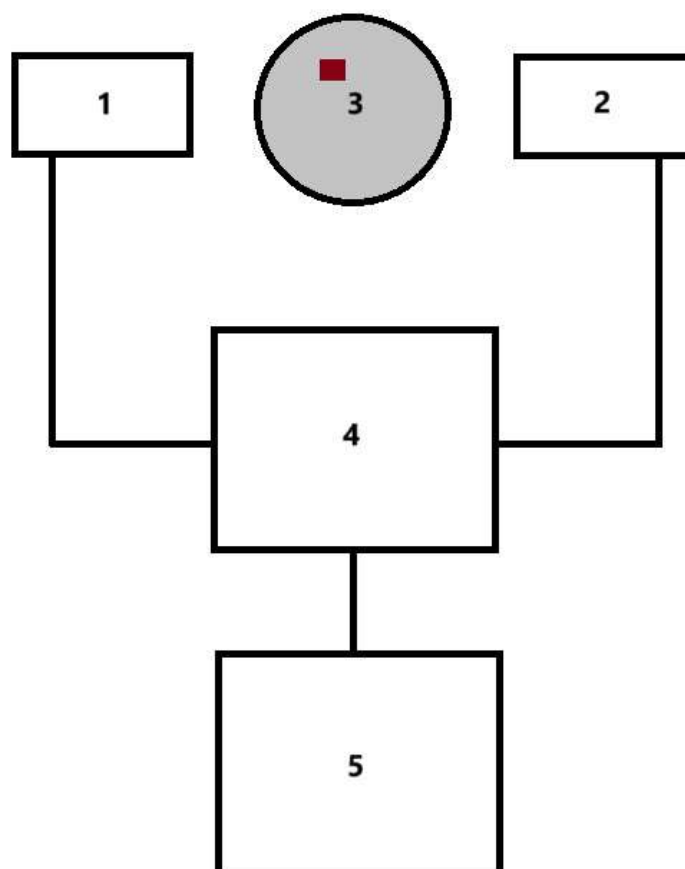


Рисунок В.2 – Схема измерительной установки

Перед началом измерений обязательным этапом является проведение калибровки оборудования для обеспечения требуемой точности и достоверности получаемых данных. Процесс калибровки ВАЦ проводился по следующим пунктам:

- Запуск процедуры калибровки и подключение стандартов с использованием калибровочного набора.
- Short (Короткое замыкание): подключение компонента «Short» к измерительному порту Port 1, затем Port 2. ВАЦ измерит отражение при коротком замыкании. Подтвердить измерение на ВАЦ.
- Open (Холостой ход): подключение компонента «Open» к измерительному порту ВАЦ. ВАЦ измерит отражение от холостого хода. Подтвердить измерение на ВАЦ.
- Load (Согласованная нагрузка): подключение компонента «Load» (50 Ом) к измерительному порту ВАЦ. ВАЦ измерит отражение от согласованной нагрузки. Подтвердить измерение на ВАЦ.
- Thru (Сквозная линия): подключение напрямую портов ВАЦ (Port 1 и Port 2) друг к другу с помощью прецизионного кабеля (или компонента Thru из калибровочного набора, если требуется). ВАЦ измерит передачу сигнала через сквозную линию. Подтвердить измерение на ВАЦ.
- Сохранение калибровки: после завершения всех измерений с калибровочным набором, ВАЦ рассчитывает коэффициенты коррекции ошибок. Сохранить калибровку в память ВАЦ.

Точность ВАЦ составляет $< 0,05$ дБ или $< 0,5^\circ$ для параметра передачи и $< 0,2$ дБ или $< 1,3^\circ$ для параметра отражения [117]. Выходная мощность, на которой проводились эксперименты, составляет -100 дБм.



Рисунок В.3 – Измерительная установка с волноводами WR-137 и объектами с неоднородностями

В экспериментах участвовали две пары волноводов:

- Прямоугольные волноводы размером 35,00x15,00 мм (WR-137 по стандарту EIA) с рабочим диапазоном частот 5,64–8,15 ГГц.
- Прямоугольные волноводы размером 23,00x10,00 мм (WR-90 по стандарту EIA) с рабочим диапазоном частот 8,15–12,05 ГГц.

С целью использования волновода небольших размеров и измерений в указанном диапазоне частот, волновод WR-90 заполнен диэлектриком (фторопласт-4). Относительная диэлектрическая проницаемость данного материала составляет 1,9–2,2. Фторопласт-4 (Ф4), более известный как тефлон, представляет собой политетрафторэтилен, композитный материал, производимый из смеси тетрафторэтилена и углеродного порошка. Диэлектрик изменяет диэлектрическую проницаемость среды внутри волновода. Отсюда происходит снижение критической (минимальной) частоты, при которой возможно распространение волн в направляющей системе.

Исследование проводилось на объектах полусферической формы радиуса $r = 5$ см. Объекты состоят из раствора агар-агара, которые показаны на рисунке В.4. Агар-агар является эффективным материалом для СВЧ диагностики, поскольку его диэлектрическая проницаемость хорошо соответствует характеристикам биологических тканей.



Рисунок В.4 –Фотография объектов исследования

Путем изменения концентрации раствора можно создавать внутренние структуры с измененными диэлектрическими параметрами, имитирующие опухоли или другие патологии, что позволяет тестировать методы их СВЧ обнаружения и визуализации. Внутри объектов полусферической формы имелись неоднородности различных размеров – кубические неоднородности со сторонами 1 см, 2 см, 3 см и эталонный объект с однородной структурой. Ниже эти варианты обозначены, соответственно, F_1, F_2, F_3, F_0 .

Далее представлен эксперимент с применением широкополосного поглотителя СВЧ электромагнитного излучения ЗИПСИЛ 641 РПМ-М4. РПМ (радиопоглощающий материал) представляет собой плоскую панель, на поверхности которой равномерно расположены конусообразные элементы, предназначенные для поглощения электромагнитных волн (рисунок В.5). Результаты эксперимента представлены на рисунках В.6–В.8. Использование

панели позволяет уменьшить уровень шума и нежелательных переотражений волн в ходе экспериментов.

На рисунках В.6–В.8 показаны значение модуля коэффициента прохождения, полученные в процессе изменений с применением СВЧ-абсорбера и его отсутствием.

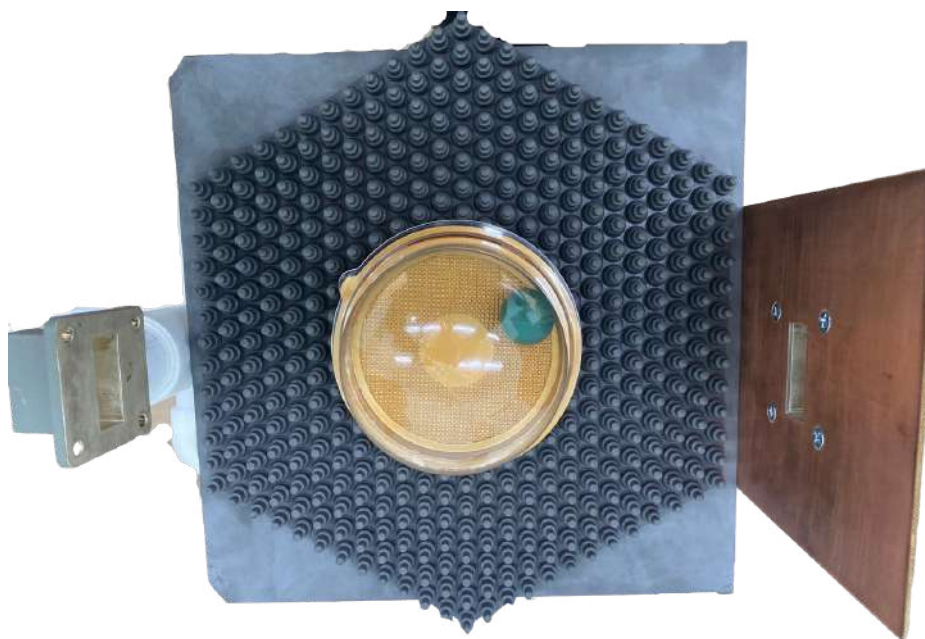


Рисунок В.5 – Применение СВЧ-абсорбера в экспериментальной установке

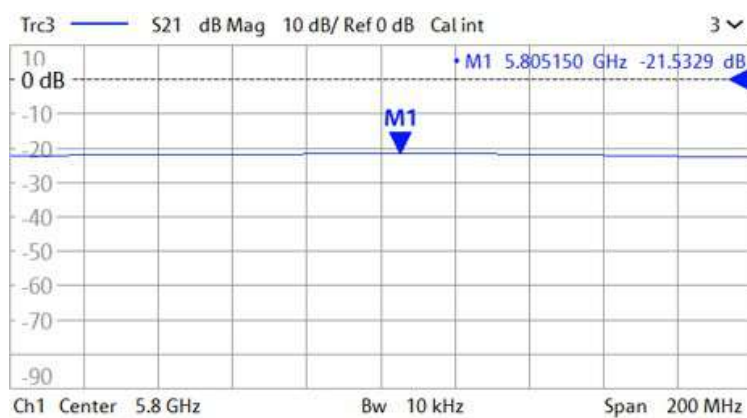


Рисунок В.6 – Значение модуля коэффициента прохождения S_{21} без применения СВЧ-абсорбера

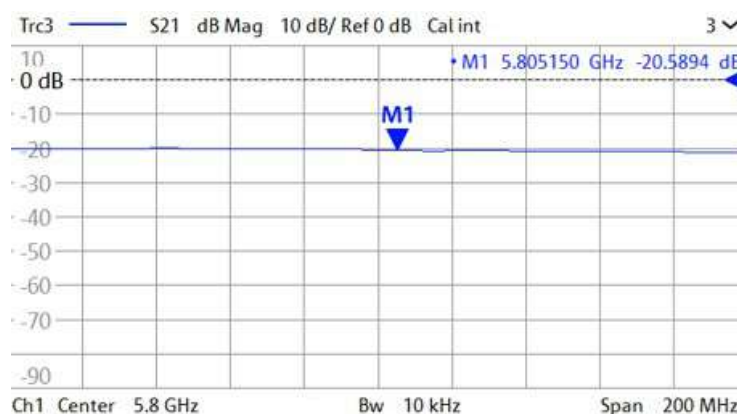


Рисунок В.7 – Значение модуля коэффициента прохождения S_{21} с применением СВЧ-абсорбера на нижней поверхности экспериментальной установки



Рисунок В.8 – Значение модуля коэффициента прохождения S_{21} с применением СВЧ-абсорбера на нижней и верхней поверхностях экспериментальной установки

В случае, когда РПМ находится на нижней поверхности (снизу исследуемого объекта, результаты на рисунке В.7), разница между экспериментом на рисунке В.6 составляет около 10 %, а в случае, когда РПМ находится снизу и сверху исследуемого объекта (рисунок В.8), разница между экспериментом на рисунке В.6 составляет около 25 %.

Для восстановления неоднородностей по результатам эксперимента необходимо использование данных всех измерений (при различных положениях волновода 2) и решения обратной задачи с этими данными. Для точного восстановления функции относительной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(r)$

неоднородного объекта в СВЧ-томографии требуется получение большого количества измерений S-параметров на разных частотах и позициях волновода 2. Традиционные подходы, включающие ручное сохранение данных и использование проприетарного программного обеспечения, становятся неэффективными и ограничивают возможности проведения исследований. Предлагается разработать специализированный программный комплекс с открытым исходным кодом, построенный на языке Python, который автоматизирует процесс измерений, обеспечивает структурированное хранение данных и позволяет эффективно использовать современные вычислительные ресурсы.

Для управления ВАЦ и синхронизации его с позиционером (роботизированным устройством) могут использоваться три основных интерфейса: GPIB, LAN и USB. Каждый имеет свои преимущества, недостатки и сценарии применения (представленные в таблице В.1).

Основываясь на требованиях к скорости, стабильности и стандартизации управления измерительным оборудованием, для связи с ВАЦ и позиционерами был выбран интерфейс LAN с использованием протокола Standard Commands for Programmable Instruments (SCPI).

Таблица В.1 – Основные характеристики интерфейсов передачи

Характеристика	GPIB (IEEE-488)	LAN (Ethernet)	USB
Скорость передачи	1–8 МБ/с	10–1000 МБ/с	10–480 МБ/с
Максимальное расстояние	≤ 20 м (с усилителем до 100 м)	До 100 м (через кабель)	≤ 5 м
Поддержка	Устаревший, но надежный	Современный стандарт	Универсальный
Плюсы	Стабильность, поддержка в старом ПО	Высокая скорость, удаленное управление	Простота подключения, низкая задержка
Минусы	адаптер, ограниченная длина	Настройка IP, сетевые задержки	Низкая скорость, драйверы под ОС

LAN обеспечивает высокую скорость передачи данных, что важно для быстрого получения S-параметров и управления позиционером в режиме реального времени, а также обеспечивает стабильное и надежное соединение на больших расстояниях.

Управление векторным анализатором цепей строилось на основе языка SCPI. Данный стандарт давно зарекомендовал себя как общепринятое средство программирования измерительного оборудования самого разного назначения. Его применение даёт двойное преимущество: во-первых, обеспечивается бесшовная работа с приборами и позиционерами от разных вендоров, во-вторых, программный комплекс не привязывается жёстко к продукции какого-то одного производителя. Это заметно упрощает не только начальную интеграцию аппаратной части, но и дальнейшее масштабирование или замену отдельных модулей без переписывания управляющего кода. В этом разделе рассматривается процесс автоматизации сбора данных с анализатора цепей Rohde&Schwarz с последующей передачей полученных данных по сети на компьютер (или сохранения результатов в локальный файл). Автоматизация подобных задач позволяет значительно ускорить и упростить процессы тестирования и измерений, исключая ручное вмешательство и повышая точность результатов.

Программа должна выполнить следующие операции:

- Установить связь с анализатором цепей Rohde&Schwarz через интерфейс LAN.
- Сконфигурировать прибор для проведения измерений в заданном диапазоне частот и с определенной мощностью сигнала (внести необходимые данные).
- Инициировать измерение и дождаться его завершения.
- Считать полученные данные (в данном случае, S-параметры).
- Предоставить возможность либо отправить данные по сети на удаленный компьютер, либо сохранить их в локальный файл.

Основные этапы работы (рисунок В.9 и В.10):

1. Конфигурация:

- Определяются параметры подключения к прибору: IP-адрес и порт.
- Задается имя файла для сохранения данных, которое генерируется на основе текущей даты и времени.
- Определяется IP-адрес и порт удаленного сервера (если данные будут отправляться по сети).
- Устанавливаются параметры измерения на приборе (начальная и конечная частота, количество точек измерения, выходная мощность генератора сигнала).

2. Подключение к прибору и чтение данных:

- Используется библиотека `pyvisa` для установления соединения с прибором по указанному IP-адресу и порту.
- Отправляются команды SCPI на прибор для: сброса прибора в начальное состояние, отключения непрерывного режима измерений, проверки наличия ошибок, установки параметров измерения (частотный диапазон, количество точек, мощность сигнала), запуска процесса измерения, ожидания завершения измерения, считываются полученные данные с прибора в виде строки, закрывается соединение с прибором.

3. Обработка данных:

- Отправка по сети (альтернатива): открывается соединение с удаленным сервером по указанному IP-адресу и порту. Полученные данные преобразуются в байты и отправляются на сервер. Закрывается сокетное соединение.
- Сохранение в файл (альтернатива): открывается файл с именем, сгенерированным на основе даты и времени. Полученные данные записываются в файл. Файл закрывается.

4. Обработка ошибок:

- Ошибки, связанные с установлением соединения с прибором (VisaIOError).
- Ошибки, связанные с отправкой данных по сети (socket.error).
- Ошибки, связанные с записью данных в файл.
- В случае возникновения ошибки, в консоль выводится сообщение об ошибке.



Рисунок В.9 – Схема выполнения программы автоматизации сохранения данных

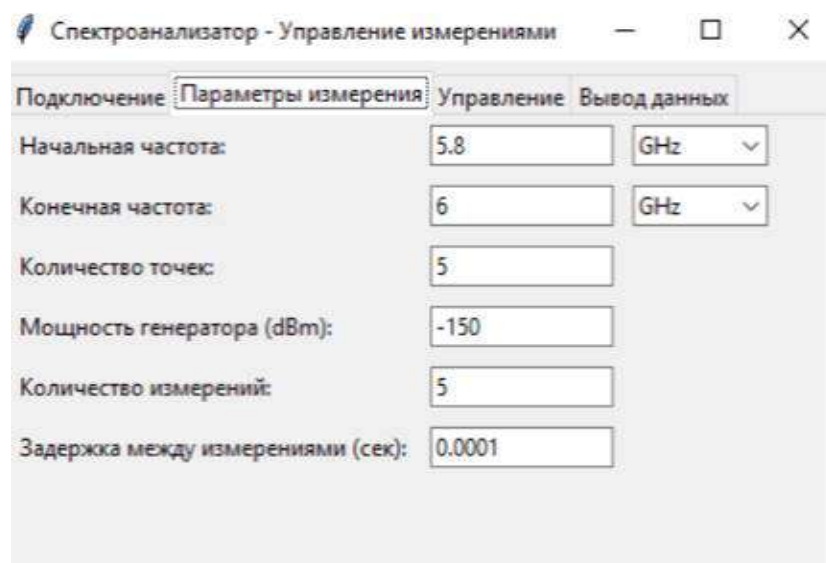


Рисунок В.10 – Графическое окно программы автоматизации сохранения данных

После выполнения всех пунктов программы, на выходе получается множество значений S-параметров, которые необходимы для восстановления неоднородности по результатам эксперимента (при различных положениях волноводов).

Кроме автоматизации сохранения данных, предложена моторизированная установка для проведения эксперимента (сбора данных), внешний вид которой представлен на рисунке В.11. Установка выполнена в виде «шкафа» из диэлектрического материала, состоящего из двух секций. В нижней секции расположен векторный анализатор цепей. В верхней секции на задней стенке установлен прямоугольный волновод WR137 (размером 35x15 см) с фланцем, который соединен с векторным анализатором.

В верхней панели шкафа сделано квадратное отверстие размером 15x15 см, куда помещается емкость кубической формы размером 15x15x15 см из диэлектрического материала. В емкость помещается неоднородный объект произвольной формы. На нижней панели верхней секции расположены три слайдера (два линейных и один поворотный), соединенные друг с другом. На вертикальном слайдере закреплен второй волновод WR137, также соединенный с векторным анализатором. Конструкция позволяет перемещать этот волновод по окружности (вокруг центра), по горизонтали и по вертикали. Это позволяет проводить множество измерений, сканируя электромагнитное поле в определенных точках измерения (рисунок В.12).



Рисунок В.11 – Внешний вид измерительной установки

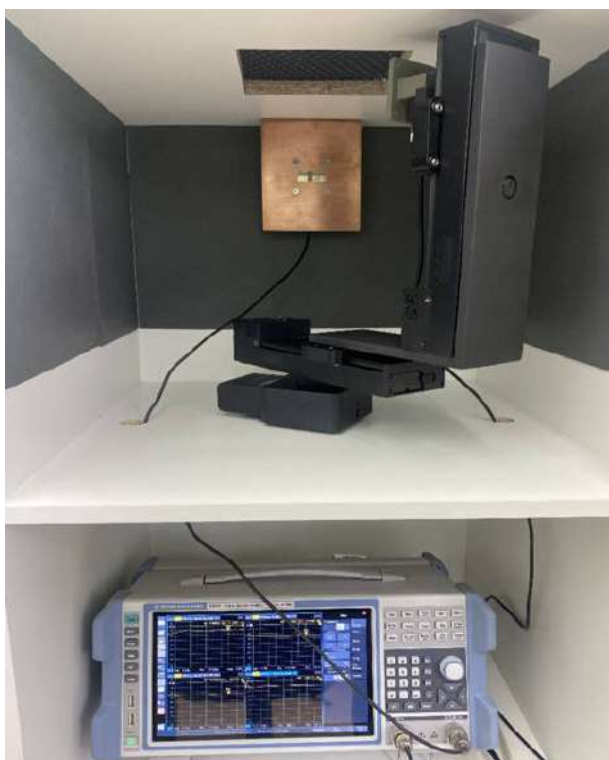


Рисунок В.12 – Измерительная установка без неоднородного объекта и с неоднородным объектом

Стенки верхней секции обклеены поглощающим материалом, для уменьшения нежелательных отражений. Конструкция позволяет проводить измерения в заданных точках (положениях второго волновода) дискретно.

Автоматизация СВЧ-томографии открывает многообещающие перспективы: увеличение скорости сканирования благодаря автоматизированным процессам измерения и позиционирования, расширение области применения, а также возможность разработки портативных и недорогих систем для широкого круга пользователей. Это направление требует комплексного подхода, сочетающего знания в СВЧ-технике, математике, программировании и обработке изображений, но, несмотря на сложности, обладает большим потенциалом для широкого применения в различных областях науки и техники.

Разработанная автоматизация решает 3 ключевые проблемы:

- Автоматизацию измерений без сложного ПО.
- Эффективное хранение и обработка данных.
- Возможность дополнения и интеграции с вычислительными алгоритмами.